Séminaire de théorie des nombres

Le 20 janvier 2003 à 14h15

Sur la trivialité des points rationnels de $X_{\mathrm{split}}(N)$

Exposé de Pierre Parent

Résumé : Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ sans multiplication complexe sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Un théorème de Serre affirme qu'il existe un entier B tel que, pour tout nombre premier N supérieur à B, la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ induite par l'action de Galois sur les points de N-torsion de E soit surjective. Serre a posé la question suivante : peut-on choisir B indépendamment de E ? Ce problème se ramène à montrer la trivialité, pour N assez grand, des points rationnels de quatre familles de courbes modulaires, à savoir $X_0(N)$, $X_{\mathrm{split}}(N)$, $X_{\mathrm{non-split}}(N)$ et $X_{\mathfrak{A}_4}$ (on dira qu'un point d'une de ces courbes est trivial si c'est une pointe, ou bien si la classe d'isomorphismes de courbes elliptiques qu'il définit a multiplication complexe sur $\overline{\mathbf{Q}}$). Le cas de $X_{\mathfrak{A}_4}(N)$ a été éliminé par Serre. Le fait que $X_0(N)(\mathbf{Q})$ n'est composé que de pointes pour $N > 163$ est un célèbre théorème de Mazur. Dans cet exposé, on donnera un critère de trivialité de $X_{\mathrm{split}}(N)(\mathbf{Q})$, et on montrera qu'il est vérifié pour les nombres premiers satisfaisant certaines congruences explicites.