Séminaire de théorie des nombres

Le 20 octobre 2003 à 14h

Démonstration hypergéométrique de la « conjecture des dénominateurs » liée aux valeurs de la fonction ζ de Riemann

Exposé de Tanguy Rivoal

Résumé : La seule méthode dont on dispose pour étudier la nature arithmétique des valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers impairs consiste à construire, à l'aide de séries hypergéométriques, des suites (indicées par n) de combinaisons linéaires à coefficients rationnels en les valeurs de ζ aux entiers. Pour appliquer les critères d'irrationalité ou d'indépendance linéaire, il est nécessaire de déterminer un dénominateur commun aux coefficients *le plus petit possible* : typiquement, on obtient d_n^M, où d_n =p.p.c.m.$\{1, 2, \ldots, n\}$ et M est un certain entier. Or lorsque la construction provient d'une série hypergéométrique *très bien équilibrée*, on constate numériquement que d_n^{M-1} suffit déjà : ce phénomène est maintenant connu sous le nom de « conjecture des dénominateurs ».

Dans un travail en commun avec Christian Krattenthaler, nous venons de prouver l'essentiel de cette conjecture : j'indiquerai les étapes qui nous ont menés vers la solution, basée sur une imposante identité hypergéométrique entre une somme simple finie et une somme finie multiple. À titre d'exemple, on a pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n}{2}-j\right) \binom{n}{j}^4 \binom{n+j}{n} \binom{2n-j}{n} \left(5H_{n-j} - 5H_j + H_{n+j} - H_{2n-j} - \frac{1}{\frac{n}{2}-j}\right)$$
$$= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \binom{n}{i}^2 \binom{n+j}{n} \binom{n+j-i}{n},$$

où la première somme n'a aucune raison apparente d'être un entier, puisque $H_m = \sum_{i=1}^{m} 1/m$ est le m-ième nombre harmonique. J'indiquerai également les améliorations que l'on obtient immédiatement sur la nature arithmétique des nombres $\zeta(2m+1)$ et ce que l'on peut encore espérer.