Séminaire de théorie des nombres

Le 18 novembre 2019 à 14h (Jussieu)

Courbes elliptiques à gros groupe de Tate-Shafarevich sur $\mathbf{F}_q(t)$

Exposé de Richard Griffon
(Université de Bâle)

Résumé : Le groupe de Tate-Shafarevich Sha(E) d'une courbes elliptique E sur un corps global est un objet arithmétique intéressant, qui reste encore mystérieux. Par exemple on conjecture que c'est un groupe fini, mais ce fait n'est connu que dans un nombre limité de cas. En supposant la finitude de Sha(E), on peut s'attacher à encadrer son ordre en fonction d'invariants plus simples de E. Modulo finitude, Goldfeld et Szpiro ont ainsi donné des majorations de #Sha(E), en termes du conducteur et de la hauteur de E. Il est conjecturé que ces majorations devraient être "presque" optimales.

Dans cet exposé, je parlerai d'un travail récent avec Guus de Wit (ArXiv :1907.13038) dans lequel nous avons étudié une famille explicite de courbes elliptiques sur $\mathbb{F}_q(t)$. Pour ces courbes elliptiques, nous avons montré que le groupe de Tate-Shafarevich est très gros : #Sha(E) est en effet essentiellement aussi gros que possible (au vu des majorations mentionnées ci-dessus), ce qui montre la presque optimalité de ces bornes. Notre résultat est inconditionnel et il fournit quelques informations additionnelles quant à la structure de Sha(E), notamment le fait que #Sha(E) est premier à la caractéristique de $\mathbb{F}_q(t)$. La preuve utilise divers outils dont le calcul des fonctions L, une étude détaillées de la distribution de leurs zéros, et la preuve de la conjecture de B-SD pour ces courbes elliptiques.