Séminaire de théorie des nombres

Le 31 janvier 2022 à 14h (Jussieu)

Cycles d'Eisenstein et propriétés de Manin-Drinfeld

Exposé de Loïc Merel
(IMJ-PRG)

Résumé : Par un théorème de Belyi, toute courbe algébrique sur un corps de nombres peut être réalisée comme la compactifiée X_Γ du quotient du demi-plan supérieur par un sous-groupe Γ d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Cette situation est encodée par un dessin d'enfant, c'est-à-dire un graphe avec des propriétés simples (l'ensemble des sommets est bicolorié ; les couleurs doivent être différentes aux extrémités d'une arête donnée ; l'ensemble des arêtes associées à un sommet donné est muni d'une action transitive de $\mathbf{Z}$). Les pointes de la courbe X_Γ correspondent aux sommets de ce graphe. Comment déterminer si un diviseur D de degré zéro à support dans l'ensemble P_Γ des pointes est de torsion dans la jacobienne J_Γ de X_Γ ? Le théorème de Manin-Drinfeld affirme que c'est toujours le cas si Γ est un sous-groupe de congruence. Cette question, déjà considérée par Scholl d'une part, et K. Murty et Ramakrishnan d'autre part, est intimement liée à la détermination explicite de la *classe d'Eisenstein* associée à D : la classe E_D dans $\mathrm{H}_1(X_\Gamma, P_\Gamma; \mathbf{R})$ telle que $\int_{E_D} \omega = 0$ pour toute forme différentielle holomorphe ω sur X_Γ.

Nous verrons comment reformuler ce problème de façon agréable lorsque Γ est contenu dans $\Gamma(2)$, et lorsqu'on fait usage de certaines jacobiennes généralisées à la place de J_Γ. La réponse est de nature analytique et fait intervenir (ce que certains appellent) la fonction zeta de Kloosterman.

On verra en application ce qui se passe pour la courbe de Fermat ($X^N + Y^N = 1$), déjà considérée par Rohrlich, Vélu, Posingies et pour le revêtement d'Heisenberg de la courbe de Fermat, introduit par Murty et Ramakrishnan.

Travail joint avec D. Banerjee.