

Séminaire de théorie des nombres

Le 02 décembre 2024 à 14h (Jussieu)

Equirépartition simultanée revisitée

Exposé de Farrell Brumley
(IMJ-PRG)

Résumé : Ramanujan s’est intéressé aux entiers d positifs représentés par la forme quadratique ternaire $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 10z^2$. Des conditions de congruences explicites fournissent des conditions nécessaires, et la question est de savoir si elles sont suffisantes. La formule de masse de Siegel montre que les entiers localement représentés (ou “admissibles”) par q sont globalement représentés soit par q soit par l’autre forme dans son genre $q'(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$. En 1990, Duke et Schulze-Pillot ont montré que les d admissibles suffisamment grands, sans facteurs carrés, sont en fait représentés par q (et par q' aussi, le nombre de représentations pour chaque forme suivant une loi quasi-uniforme). Ce résultat s’étend à toute forme quadratique ternaire définie à coefficients entiers, ainsi apportant une réponse positive (si toutefois ineffective) au 11ème problème de Hilbert.

Dans leur article à l’ICM de 2006, Michel et Venkatesh ont conjecturé que si on se donne deux formes q_1 et q_2 de genre distinct, alors les entiers admissibles (sans facteurs carrés, suffisamment grands) pour les deux sont globalement simultanément représentés par q_1 et q_2 (ainsi que par chaque paire (q'_1, q'_2) dans le produit des deux genres, en proportion quasi-uniforme). D’un point de vue ergodique – il y a une action par un groupe de classes sur les solutions – il s’agit d’un joining, au sens de Furstenberg, de deux problèmes distincts considérés par Duke et Schulze-Pillot. Il y a quelques années, dans un travail en commun avec V. Blomer, nous avons pu affirmer cette conjecture sous condition de supposer l’hypothèse de Riemann généralisée (GRH).

Dans cet exposé nous présenterons une nouvelle méthode pour aborder la conjecture de Michel–Venkatesh, développée en collaboration avec V. Blomer et M. Radziwiłł, qui remplace GRH par une condition plus faible, d’une abondance de petits nombres premiers décomposés. Un ingrédient essentiel dans la preuve est un équivalent pour un moment mollifié d’une famille de fonctions L obtenu précédemment avec Blomer et Khayutin.