Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 697 à 701.

UNE ALGÈBRE ASSOCIÉE AUX PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

par Louis BOUTET de MONVEL

Nous nous proposons de décrire une méthode d'étude des problèmes aux limites elliptiques. Classiquement, il s'agit de résoudre un système d'équations :

$$(1) \qquad \begin{aligned} Pf &= g \quad \text{dans } X \\ B_j f &= u_j \quad \text{sur } \partial X \end{aligned}$$

où X est une variété à bord, de bord ∂X, P est un opérateur différentiel elliptique sur X, et les B_j sont des opérateurs différentiels.

Sous cette forme, le problème a été étudié par de très nombreux auteurs, et finalement résolu dans le cas le plus général par Agmon, Douglis et Nirenberg (1959).

On peut généraliser le problème en remplaçant l'opérateur P de (1) par un opérateur pseudo différentiel : ce nouveau problème a été étudié et résolu par Visik et Eskin dans une série d'articles commençant en 1964.

Dans le même ordre d'idées, on a remarqué et utilisé le fait que sur le bord ∂X, les dérivées successives d'une solution de l'équation $Pf = 0$ sont reliées entre elles par des opérateurs pseudo différentiels (Calderon, Seeley, Agranovitch - Dynin, Hörmander).

La théorie décrite ci-dessous rend bien compte de ces résultats.

1.

Afin d'éclairer ce qui suit, nous commençons par rappeler comment les opérateurs pseudo différentiels (Calderon - Zygmund, 1952 ; Kohn - Nirenberg, 1965) permettent de décrire la situation quand il n'y a pas de bord. Ces opérateurs forment une algèbre, ie. $P + Q$, $P \circ Q$ sont des opérateurs pseudo différentiels si P et Q en sont. En outre, ils donnent lieu à un calcul symbolique : si P est un tel opérateur, on définit son degré, puis son symbole (principal) $\sigma(P)$.

$\sigma(P)$ est une fonction sur l'espace T^*X des vecteurs cotangents non nuls (quand on a affaire à un système d'opérateurs, il est plus commode de l'interpréter comme un homomorphisme de fibrés vectoriels sur T^*X). σ respecte l'addition et la multiplication ; et on a le résultat suivant :

THEOREME. — *P est elliptique*

équivant à : *$\sigma(P)$ est inversible*

ou : *P possède une parametrix de degré* $-\deg P$ *(i.e. il existe un opérateur pseudo différentiel Q de degré* $-\deg P$ *tel que $P \circ Q - 1$, $Q \circ P - 1$ soient des opérateurs à noyau C^∞)*

Ceci permet de rendre compte très agréablement de la théorie des opérateurs elliptiques.

2. L'algèbre des opérateurs de Green

Nous proposons maintenant de développer une théorie analogue pour les problèmes aux limites elliptiques. A cette fin, on introduit toute une classe d'opérateurs : les opérateurs de Green. Un tel opérateur A opère sur l'espace $C^\infty(X) + C^\infty(\partial X)$ ($C^\infty(X)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, dont toutes les dérivées ont une limite au bord). Il a une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} P_X + G & K \\ T & Q \end{pmatrix} \tag{2}$$

Nous commençons par décrire chaque terme de cette matrice.

(a) Q est un opérateur pseudo différentiel sur le bord ∂X.

(b) P_X est défini comme suit : soit Y une variété voisinage de X, et P un opérateur pseudo différentiel sur Y. Si $f \in C^\infty(X)$, on pose

$$P_X f = P(\tilde{f})/X$$

où $\tilde{f}$ est la fonction qui prolonge f par 0 hors de X ($P\tilde{f}/X$ est la restriction à X)

L'opérateur P_X ainsi défini n'est en général pas continu : $C^\infty(X) \to C^\infty(X)$, et pour qu'il le soit, il faut imposer à P une condition (transmission le long du bord ∂X)

(Si X est le demi espace $x_n \geqslant$ dans R^n, et si P est défini par la formule

$$Pf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi}\, p(x, \xi) \quad f(\xi)\, d\xi$$

P vérifie la condition de transmission si son symbole $p(x, \xi)$ et chacune de ses dérivées admet, pour chaque x du bord ($x_n = 0$) et chaque ξ' fixés, un développement asymptotique en puissances entières de ξ_n quand ξ_n tend vers l'infini :

$$p(x, \xi', \xi_n) \sim \sum_{k \text{ entier} \geqslant -N} a_k(x, \xi')\ \xi_n^{-k}$$

(c) K (opérateur de Poisson) est continu : $C^\infty(\partial X) \to C^\infty(X)$, de la forme

$$Ku = P(u\, \delta_{\partial X})/X$$

où P est un opérateur pseudo différentiel défini au voisinage de X, qui a comme ci-dessus la propriété de transmission, et $\delta_{\partial X}$ désigne une mesure de densité C^∞ sur le bord ∂X.

(d) T (opérateur trace) est continu : $C^\infty(X) \to C^\infty(\partial X)$, de la forme

$$Tf = \sum_1^N Q_k\, (P_X^k\, f\, /\, \partial X)$$

où les Q_k sont des pseudo différentiels sur le bord, et les P^k comme dans (b)

(e) Enfin G (opérateur de Green singulier) est continu $C^\infty(X) \to C^\infty(X)$, de la forme

$$G = \sum_1^\infty K_n T_n$$

où K_n, T_n sont deux suites à décroissance rapide d'opérateurs de Poisson (b–) (resp. trace, (c–)).

Les opérateurs de Green forment une algèbre (autrement dit $A + B$, $A \circ B$ sont des opérateurs de Green si A et B en sont).

Il est commode de les généraliser un peu pour les faire opérer sur les sections C^∞ de fibrés vectoriels.

3. Calcul symbolique

Si A est un opérateur de Green, on définit son degré, puis son symbole (principal). En fait il y a deux symboles :

– le symbole intérieur $\sigma_X(A)$, qui est simplement le symbole de l'opérateur pseudo différentiel P qui intervient dans la définition de A (2.b) : $\sigma_X(A)$ est donc une fonction (homomorphisme de fibrés) sur T^*X.

– le symbole bord $\sigma_{\partial X}(A)$. C'est un objet plus compliqué, et je me contente d'en donner une image grossière (et malheureusement pas tout à fait correcte si le degré de A est positif) :

soit $H = L^2(R)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur R.

soit $H^+ \subset H$ le sous espace des fonctions qui admettent un prolongement holomorphe (et pas trop grand) dans le demi plan complexe inférieur im $t \leqslant 0$ (H^+ est l'espace des transformées de Fourier des fonctions L^2 portées par la demi droite positive). Enfin soit p^+ la projection orthogonale sur H^+.

Si f est une fonction bornée sur R, l'opérateur p^+f (qui transforme $\varphi \in H^+$ en $p^+(f\varphi)$) est continu : $H^+ \to H^+$. Si f et g sont continues sur R, y compris à l'infini, $p^+fg - p^+fp^+g$ est un opérateur compact : $H^+ \to H^+$.

Soient E, E', F, F' quatre espaces vectoriels de dimension finie. Appelons opérateur de Wiener-Hopf un opérateur

$$a : H^+ \times E + F \to H^+ \times E' + F'$$

de matrice

$$a = \begin{pmatrix} p^+f + g & k \\ t & q \end{pmatrix} \tag{3}$$

où f est une matrice à coefficients continus (y compris à l'infini), g est un opérateur compact, k, t, q sont arbitraires (de rang fini).

Le symbole bord $\sigma_{\partial X}(A)$ fait correspondre à tout vecteur cotangent $\xi' \neq 0$ sur le bord un opérateur de Wiener-Hopf $a(\xi')$.

On a alors les résultats suivants :

THEOREME – *Les deux symboles σ_X, $\sigma_{\partial X}$ sont des "homomorphismes d'algèbre" (autrement dit $\sigma(A + B) = \sigma(A) + \sigma(B)$, $\sigma(A \circ B) = \sigma(A) \circ \sigma(B)$)*

THEOREME. — *A est elliptique*

équivant à : *$\sigma_X(A)$ et $\sigma_{\partial X}(A)$ sont inversibles*

ou : *A possède une parametrix B de degré $-$ deg A (i.e. B est un opérateur de Green de degré $-$ deg A, et $AB - 1$, $BA - 1$ sont des opérateurs à noyau C^∞)*

4. Indice d'un opérateur de Green elliptique.

Le problème est de relier l'indice de A : $\chi(A) = \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A$ à un invariant topologique du symbole de A. Je ne donne pas ici de formule, celle-ci demandant une construction trop longue de K-théorie. Je me contenterai d'indiquer une méthode qui y conduit.

– *premier cas* : $A = \begin{pmatrix} P_X & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ où P est un opérateur de degré 0, qui coïncide avec l'opérateur identité près du bord ∂X. L'opérateur A est alors bien décomposé : $\chi(A) = \chi(P_X) + \chi(Q)$, et chacun des deux indices $\chi(P_X)$, $\chi(Q)$ est donné par la formule de Atiyah et Singer.

– *deuxième cas* : appelons déformation de A une famille continue A_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ d'opérateurs de Green, avec $A_0 = A$. Si A est un opérateur de Green elliptique, et si on peut déformer A en un des opérateurs du premier cas, il est encore possible de calculer son indice par la formule de Atiyah et Singer.

– En général, il n'est pas possible de déformer A comme ci-dessus (même si son degré est nul, il y a une obstruction topologique à l'existence d'une telle déformation). On est alors conduit à introduire toute une collection d'opérateurs B, pour lesquels on prouve directement $\chi(B) = 0$ (très grossièrement, ces opérateurs sont construits à partir de facteurs de l'opérateur qui correspond au problème de Dirichlet). On constate alors que pour tout A elliptique, il existe un B tel que $A \circ B$ puisse être déformé comme ci-dessus. Ceci conduit tout naturellement à une formule de l'indice dans le cas général.

Le problème aux limites classique (1) correspond à un opérateur de Green dont la matrice est une colonne. Dans ce cas, le calcul symbolique décrit ci-dessus redonne très simplement les résultats connus, y compris la formule de l'indice de Atiyah et Bott.

BIBLIOGRAPHIE

(Je ne donne pas ici de références pour les problèmes aux limites classiques)

— Sur les opérateurs pseudo différentiels :

CALDERON A.P. et ZYGMUND A. — Singular integral operators and differential equations, *Amer. Journ. Math.*, Vol. 79, 1957, p. 901-921.

KOHN J.J. et NIRENBERG L. — An algebra of pseudo differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, 1965, p. 269-305.

HORMANDER L. — Pseudo differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, 1965, p. 501-517.

HORMANDER L. — Pseudo differential operators and hypoelliptic equations, *Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Appl. Math.*, 10, 1968, p. 138-183.

— Relations pseudo-différentielles entre les dérivées des solutions de $Pf = 0$.

CALDERON A.P. — Boundary value problems for elliptic equations, *Outline of the joint Soviet-American symposium on partial differential equations,* Novosibirsk 1963, p. 303-304.

SEELEY R.T. — Singular integrals and boundary problems, *Amer. J. Math.*, 88, 1966, p. 781-809.

HORMANDER L. — Pseudo differential operators and non elliptic boundary problems, *Ann. Math.*, 83, 1966, p. 129-209.

AGRANOVITCH M.S. et DYNIN A.S. — Problèmes aux limites généraux pour un système elliptique, *Dokl.*, 146, n° 3, 1962, p. 511-514, (traduction : *Soviet Math.*, Vol. 3, n° 5, p. 1323-1327).

— Problèmes aux limites pour un opérateur pseudo différentiel.

VISIK M.I. et ESKIN G.I. — Equations en convolution dans un domaine borné.
— *Uspeki Mat. Nauk,* 20, 1965, n° 3 (123), p. 89-152.
— *Mat. Sbornik,* 69 (111), 1966, p. 65-110.
— *Uspeki Mat. Nauk,* 22, 1967, n° 1 (133), p. 15-76.
— *Trudy Mosc. Mat. Obsc.*, 16, 1967, p. 25-50.
— *Mat. Sbornik,* 74 (116), 1967, n° 3, p. 326-356.

BOUTET DE MONVEL L. — Comportement d'un opérateur pseudo différentiel sur une variété à bord, *J. d'analyse,* Jérusalem, 17, 1966, p. 241-304.
— Opérateurs pseudo différentiels analytiques et problèmes aux limites elliptiques, *Ann. Inst. Fourier,* 19, 2 (1969), p. 169-268.
Le travail présenté ici doit paraître dans *Acta Math.*, 126, 1971, n° 1-2.

— Indice des problèmes elliptiques.

ATIYAH M.F. et SINGER I.M. — The index of elliptic operators, *Ann. Math.*, 87, 1968, p. 434-530.

ATIYAH M.F. et BOTT R. — The index problem for manifolds with boundary, *Coll. differential analysis,* Tata Inst., Bombay, Oxford University Press, 1964, p.175-186.

Faculté des Sciences de Nice
Département de Mathématique
Parc Valrose,
06 - Nice
France