Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Berkeley, California, USA, 1986

Théorie locale des blocs d'un groupe fini

MICHEL BROUÉ

1. Les p-blocs d'un groupe fini et la matrice de décomposition généralisée.

A. *Les blocs: définition.* Soit p un nombre premier et soit G un groupe fini. On désigne par K une extension finie du corps des nombres p-adiques $\mathbf{Q}_p$, d'anneau des entiers $\mathcal{O}$ et de corps résiduel k. On suppose dans tout ce qui suit que K est "assez gros" pour G, i.e., que $\mathcal{O}$ contient les racines de l'unité d'ordre l'exposant du groupe (ce qui implique que les algèbres de groupe KG et kG sont déployées).

L'algèbre KG est semi-simple et se décompose en un produit direct d'algèbres de matrices sur K indexées par l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G sur K (cf. [**Se**]), donc par l'ensemble $\mathrm{Irr}(G,K)$ des caractères irréductibles de G sur K:

$$KG \xrightarrow{\sim} \prod M_K(\chi) \qquad (\chi \in \mathrm{Irr}(G,K)).$$

L'algèbre kG n'est pas semi-simple dès que p divise l'ordre de G. On note JkG son radical de Jacobson. Sa "semi-simplifiée" kG/JkG se décompose en un produit direct d'algèbres de matrices sur k indexées par l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G sur k, i.e., par l'ensemble $\mathrm{IBr}(G,\mathcal{O})$ des caractères de Brauer (ou caractères modulaires) irréductibles de G sur $\mathcal{O}$ (cf. [**Se**]):

$$kG/JkG \xrightarrow{\sim} \prod M_k(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathrm{IBr}(G,\mathcal{O})).$$

L'algèbre $\mathcal{O}G$ se décompose en un produit direct d'algèbres indécomposables appelées les blocs de $\mathcal{O}G$ (ou blocs de G sur $\mathcal{O}$). Cette décomposition est fournie par la décomposition de 1 en idempotents orthogonaux primitifs dans le centre $Z\mathcal{O}G$ de $\mathcal{O}G$: si b est un idempotent primitif de $Z\mathcal{O}G$, le bloc de $\mathcal{O}G$ correspondant est $\mathcal{O}Gb$. Puisque l'anneau $\mathcal{O}$ est complet, si B est un bloc de $\mathcal{O}G$, la k-algèbre $k \otimes_{\mathcal{O}} B$ est indécomposable; elle est appelée bloc de kG (ou bloc de G sur k). Dans toute la suite, on appellera "bloc de G" soit un bloc de $\mathcal{O}G$, soit un bloc de kG. Enfin pour tout bloc B de $\mathcal{O}G$, on note $\mathrm{Mod}(B)$ la catégorie des

B-modules à gauche, libres et de rang fini sur $\mathcal{O}$.

$$\begin{tikzcd} & KG \arrow[r, "\sim"] & \prod K \otimes_{\mathcal{O}} B \\ \mathcal{O}G \arrow[ur] \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & \prod B & \\ & kG/JkG \arrow[r, "\sim"] & \prod B/JB \end{tikzcd}$$

Soit B un bloc de $\mathcal{O}G$. On note $\mathrm{Irr}(G, B)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de G sur K tels que la projection $B \to M_K(\chi)$ ne soit pas nulle. On a alors

$$K \otimes_{\mathcal{O}} B \xrightarrow{\sim} \prod M_K(\chi) \qquad (\chi \in \mathrm{Irr}(G, B)).$$

On note de même $\mathrm{IBr}(G, B)$ l'ensemble des caractères modulaires irréductibles φ tels que la projection $B \to M_k(\varphi)$ ne soit pas nulle, et on a

$$B/JB \xrightarrow{\sim} \prod M_k(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathrm{IBr}(G, B)).$$

Les blocs de G définissent donc des partitions de l'ensemble des caractères irréductibles de G sur K et de l'ensemble des caractères modulaires irréductibles de G. Pour plus de détails (et pour d'autres définitions des partitions ainsi définies), on peut se reporter à [**Fe**].

On appelle bloc principal de G et on note $B_0(G)$ le bloc tel que $\mathrm{Irr}(G, B_0(G))$ contienne le caractère trivial de G sur K. Il est facile de vérifier que

$$\mathrm{IBr}(G, B_0(G))$$

contient alors le caractère modulaire de la représentation triviale de G sur k.

B. *La matrice de décomposition généralisée.* Tout au long des quelques trente années de travail que R. Brauer a consacrées à la théorie des représentations modulaires des groupes finis (cf. [**Bra**]), il a concentré son attention sur les relations entre les caractères irréductibles, la "structure p-locale" (cf. ci-dessous, §2) et les caractères modulaires, en particulier en étudiant l'objet mathématique qui exprime ces relations: la matrice de décomposition généralisée.

La "table généralisée des caractères modulaires" est par définition la matrice $(a^{(g)}_{(x,\varphi)})$ définie de la manière suivante

g parcourt un système de représentants des classes de conjugaison d'eléments de G,

x parcourt un système de représentants des classes de conjugaison des p-éléments de G, et φ parcourt l'ensemble des caractères modulaires irréductibles du centralisateur $C_G(x)$ de x dans G,

$a^{(g)}_{(x,\varphi)}$ vaut 0 si la p-composante de g n'est pas conjuguée à x, et vaut $\varphi(x')$ si x' et x sont respectivement la p'-composante et la p-composante de g.

La matrice de décomposition généralisée, notée ici $\mathrm{Dec}(G, p)$, est la matrice de passage entre la table des caractères ordinaires et la table généralisée des caractères modulaires définie ci-dessus. Elle est donc égale à la matrice $(d^{(x,\varphi)}_\chi)$ où les nombres $d^{(x,\varphi)}_\chi$ sont définis par

$$\chi(xx') = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(C_G(x), \mathcal{O})} d^{(x,\varphi)}_\chi \varphi(x')$$

pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}(G,K)$, x p-élément de G, x' p'-élément de $C_G(x)$. Il est facile de voir que $d_\chi^{(x,\varphi)} \in \mathbf{Z}[\zeta_p]$ où ζ_p désigne une racine de l'unité d'ordre la p-partie de l'exposant de G.

Le morphisme de Brauer (cf. ci-dessous, §2) permet de répartir les classes de conjugaison de paires (x,φ) entre les différents blocs de G ($*$ Si B est un bloc de G, on note $(x,\varphi) \in B$ si φ appartient à l'ensemble $\mathrm{IBr}(C_G(x),E)$ où E est un bloc de $C_G(x)$ tel que $(\langle x\rangle, E)$ soit une B-souspaire de G $*$). Le "Second Théorème Principal de Brauer" établit que la matrice de décomposition généralisée est décomposée en blocs diagonaux de matrices carrées indexées par les blocs de G:

$\mathrm{Dec}(G,p) =$  $\mathrm{Dec}(G,B) = (d_\chi^{(x,\varphi)}), \quad (x,\varphi) \in B,\ \chi \in \mathrm{Irr}(G,B).$

La partie (non carrée en général) de la matrice correspondant aux indices (x,φ) avec $x = 1$ est la matrice de décomposition usuelle (cf. [**Se**]).

2. Structure locale sur un bloc. Soit P un p-sous-groupe de G. On note $(kG)^P$ l'ensemble des points de kG fixes sous l'action de P par conjugaison et on note $C_G(P)$ le centralisateur de P dans G. Le résultat suivant, essentiellement dû à Brauer (cf. [**Al–Br**] pour une démonstration de la forme présentée ici) est à la base de l'étude locale des blocs.

(2.1) THÉORÈME-DÉFINITION. *Soit* $\mathrm{Br}_P\colon (kG)^P \to kC_G(P)$ *l'application induite par l'application linéaire de* kG *sur* $kC_G(P)$ *qui envoie* $g \in G$ *sur* g *ou* 0 *selon que* g *appartient ou non à* $C_G(P)$. *L'application* Br_P *est un morphisme d'algèbres, appelé morphisme de Brauer.*

(2.2) DÉFINITION [**Al–Br**]. On appelle souspaire de G toute paire (P,E) où P est un p-sous-groupe de G et E est un bloc de $C_G(P)$.

On a une notion naturelle d'inclusion entre souspaires [**Al–Br**], qui peut être définie de la manière suivant.

(2.3) THÉORÈME [**Br–Pu**]. *Soient* P *et* Q *deux* p*-sous-groupes de* G *tels que* $Q \subset P$. *Soit* E *un bloc de* $kC_G(P)$. *Il existe un (unique) bloc* F *de* $kC_G(Q)$ *possédant la propriété suivante: soit* i *un idempotent primitif de* $kC_G(P)$ *tel que* $i \in E$. *Si* $\hat{\imath}$ *est un idempotent primitif de l'algèbre* $(kG)^P$ *d'image* i *par le morphisme* Br_P, *on a* $\mathrm{Br}_Q(\hat{\imath}) \in F$.

$$\begin{array}{ccc} (kG)^P & \hookrightarrow & (kG)^Q \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Br}_P} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Br}_Q} \\ kC_G(P) & \hookrightarrow & kC_G(Q) \end{array}$$

On dit alors que la souspaire (Q,F) est contenue dans la souspaire (P,E) et on note $(Q,F) \subset (P,E)$.

De plus, on dit que (Q,F) est normale dans (P,E) si Q est normal dans P et si $(Q,F) \subset (P,E)$; cette dernière condition est réalisée si et seulement si $\mathrm{Br}_P(F) \subset E$. Il est clair d'après (2.3) que la relation d'inclusion est une relation d'ordre, et que si $(Q,F) \subset (P,E)$, alors (Q,F) est sous-normal dans

(P, E). Nous allons voir que l'inclusion des souspaires généralise l'inclusion des p-sous-groupes de G.

Soit B un bloc de G. On dit qu'une souspaire (P, E) est une B-paire si $(\{1\}, B)$ est contenue dans (P, E). Dans le cas particulier où B est le bloc principal de G, on a le résultat suivant, sorte de reformulation du "Troisième Théorème Principal de Brauer."

(2.4) THÉORÈME [**Al–Br**]. *L'application $P \mapsto (P, B_0(C_G(P)))$ est une bijection de l'ensemble des p-sous-groupes de G sur l'ensemble des $B_0(G)$-sous-paires de G qui respecte les relations d'inclusion.*

Suivant [**Pu1**], on appelle catégorie de Frobenius de G pour p et on note $\mathfrak{Fr}(G, p)$ la catégorie dont les objets sont les p-sous-groupes de G, et telle que les morphismes de Q dans P soient les homomorphismes de Q dans P induits par les automorphismes intérieurs de G. De manière analogue (et, en fait, plus générale: cf. (2.5) ci-dessous), si B est un bloc de G, on appelle catégorie de Brauer de G pour B et on note $\mathfrak{Br}(G, B)$ la catégorie dont les objets sont les B-souspaires de G, et telle que les morphismes de (Q, F) dans (P, E) soient les homomorphismes de Q dans P induits par les automorphismes intérieurs de G qui envoient (Q, F) sur une souspaire contenue dans (P, E).

De même que l'étude p-locale d'un groupe fini est l'étude de $\mathfrak{Fr}(G, p)$ [**Pu1**], l'étude locale d'un bloc B est l'étude de sa catégorie de Brauer $\mathfrak{Br}(G, B)$. Le théorème (2.4) ci-dessus peut se ré-interprêter de la manière suivante:

(2.5) *L'application $P \mapsto (P, B_0(C_G(P)))$ identifie*

$$\mathfrak{Fr}(G, p) \quad \textit{et} \quad \mathfrak{Br}(G, B_0(G)).$$

Ainsi, l'étude locale des blocs apparait comme une généralisation de l'étude p-locale des groupes finis. De fait, nombre de résultats connus se généralisent, tels les théorèmes de Sylow, qui peuvent être vus comme une reformulation du "Premier Théorème Principal de Brauer."

(2.6) THÉORÈME ([**Al–Br**] "THÉORÈMES DE SYLOW"). (1) *Soit B un bloc de G. Le groupe G opère transitivement par conjugaison sur l'ensemble des B-souspaires maximales de G.*

(1) (*caractérisation locale de la maximalité*) *Soit (P, E) une souspaire de G et soit $N_G(P, E)$ son stabilisateur dans G. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *(P, E) est une souspaire maximale de G,*

(ii) *(P, E) est une souspaire maximale de $N_G(P, E)$.*

(2.7) DÉFINITION. Si (P, E) est une B-souspaire maximale de G, le groupe P est appelé un groupe de défaut de B.

Les groupes de défaut de B forment (d'après (2.6)(1)) une classe de conjugaison de p-sous-groupes de G.

Un bloc B de groupe de défaut le groupe trivial $\{1\}$ se comporte "comme si p ne divisait pas l'ordre de G"; plus précisément, le bloc B a pour groupe

de défaut $\{1\}$ si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée:

(i) L'algèbre B est une algèbre de matrices sur $\mathcal{O}$;

(ii) la catégorie de modules $\mathrm{Mod}(B)$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{O})$ des modules libres et de rang fini sur $\mathcal{O}$.

Cette situation "triviale" donne une indication sur le cas général: la structure (à équivalence près) de la catégorie de Brauer $\mathfrak{Br}(G,B)$ influe sur la structure (à équivalence près) de la catégorie de modules $\mathrm{Mod}(B)$ (cf. ci-dessous (2.12)).

Le théorème de fusion d'Alperin (1967) (précisé par Goldschmidt [**Go**] et Puig [**Pu0**]) se généralise aussi en remplaçant p-sous-groupes par B-souspaires.

(2.8) DÉFINITIONS. (1) Soit (D,E) une souspaire maximale. Une famille $\mathcal{C}$ de souspaires contenues dans (D,E) est dite famille de conjugaison pour (D,E) si elle possède la propriété suivante: pour toute paire (P,E_P) et tout élément g de G tels que (P,E_P) et $(P,E_P)^g$ soient contenus dans (D,E), il existe $(Q_1,F_1),\dots,(Q_n,F_n)$ dans $\mathcal{C}$ et $g_i \in N_G(Q_i,F_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$, $z \in C_G(P)$ tels que

$$g = zg_1g_2\cdots g_n, \qquad (P,E_p) \subset (Q_1,F_1),$$
$$(P,E_P)^{g_1\cdots g_{i-1}} \subset (Q_i,F_i) \quad \text{pour } i=2,\dots,n.$$

(2) Une souspaire (Q,F) est dite essentielle si

(a) elle est maximale comme souspaire du groupe $QC_G(Q)$,

(b) le groupe $N_G(Q,F)/QC_G(Q)$ contient un sous-groupe propre p-fortement plongé.

(*On dit que le sous-groupe H de G est p-fortement plongé dans G si p divise l'ordre de H mais ne divise l'ordre d'aucun des groupes $H \cap H^g$ pour $g \in G-H$.*)

(2.9) THÉORÈME. *Une famille $\mathcal{C}$ de souspaires contenues dans une souspaire maximale (D,E) est une famille de conjugaison pour (D,E) si et seulement si $\mathcal{C}$ contient un représentant de chaque classe de conjugaison de souspaires essentielles.*

Le théorème de Burnside concernant le cas où les p-sous-groupes de Sylow sont abéliens se généralise aisément à la catégorie de Brauer.

(2.10) PROPOSITION. *Soit (D,E) une B-souspaire maximale de G. On suppose D abélien. Alors l'application $P \mapsto (P,E_P)$ où $(P,E_P) \subset (D,E)$ définit une équivalence de catégories entre $\mathfrak{Fr}(D \rtimes (N_G(D,E)/C_G(D)),p)$ et $\mathfrak{Br}(G,B)$.*

Dans le cas où B est le bloc principal (i.e., $\mathfrak{Br}(G,B) = \mathfrak{Fr}(G,p)$), on n'en déduit rien de plus sur la structure du groupe G. Mais l'étude de la catégorie $\mathrm{Mod}(B)$ des B-modules permet d'aller un peu plus loin, y compris dans le cas où $B = B_0(G)$. Si par exemple D est cyclique, la catégorie de modules $\mathrm{Mod}(B)$ "ressemble" à la catégorie des modules sur $(D \rtimes N_G(D,E)/C_G(D))$. Si elle ne lui est pas équivalente en général, elle a néanmoins le même nombre d'indécomposables, d'irréductibles, et est bien décrite par l'arbre de Brauer (cf. [**Da**, **Fe**]). De plus, les matrices de décomposition généralisées $\mathrm{Dec}(G,B)$

et $\mathrm{Dec}(D \rtimes (N_G(D,E)/C_G(D)), p)$ ont même taille et sont égales "aux signes près":

$$\mathrm{Dec}(G,B) = \begin{bmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \pm 1 & \\ 0 & & & \pm 1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Dec}(D \rtimes N_G(D,E)/C_G(D), p).$$

Ce dernier fait a également été vérifié dans tous les exemples connus de blocs tels que D soit abélien et $D \rtimes N_G(D)/C_G(D)$ soit un groupe de Frobenius de noyau D. Ces hypothèses impliquent en tout cas (Puig) l'équivalence stable des catégories $\mathrm{Mod}(B)$ et $\mathrm{Mod}(D \rtimes N_G(D,E)/C_G(D))$. Plus généralement, il est conjecturé (Alperin) que $\mathrm{Dec}(G,B)$ et $\mathrm{Dec}(D \rtimes N_G(D,E)/C_G(D), p)$ ont la même taille lorsque D est abélien (cf. (3.3) ci-dessous).

Un des résultats les plus remarquables de la théorie locale des groupes finis est dû à Frobenius (1907). Avant de l'énoncer, remarquons que si $O_{p'}(G)$ désigne le plus grand sous-groupe normal de G d'ordre premier à p, la surjection canonique de G sur $G/O_{p'}(G)$ définit une équivalence de catégories entre $\mathfrak{Fr}(G,p)$ et $\mathfrak{Fr}(G/O_{p'}(G), p)$. Le théorème de Frobenius établit que si $\mathfrak{Fr}(G,p)$ est équivalente à la catégorie d'un p-groupe, alors G lui-même (modulo $O_{p'}(G)$) est un p-groupe. Plus précisément:

(2.11) THÉORÈME (FROBENIUS). *Si $N_G(P)/C_G(P)$ est un p-groupe pour tout p-sous-groupe P de G, alors $G/O_{p'}(G)$ est un p-groupe.*

On peut voir ce théorème comme un résultat concernant le bloc principal, de la manière suivante. Soit D un p-sous-groupe de Sylow de G, et soit $b_0(G)$ l'idempotent primitif de $Z\mathcal{O}G$ correspondant au bloc principal de G. Alors $G/O_{p'}(G)$ est un p-groupe si et seulement si l'application $x \mapsto xb_0(G)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{O}D$ et le bloc principal $\mathcal{O}Gb_0(G)$.

Ce résultat a pu être généralisé au cas d'un bloc quelconque [**Br-Pu**, **Pu3**], sous la forme suivante:

(2.12) THÉORÈME. *Soit B un bloc de G, de groupe de défaut D. Supposons que $N_G(P,E)/C_G(P)$ soit un p-groupe pour toute B-souspaire (P,E). Alors* $\mathrm{Mod}(B)$ *est équivalente à* $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}D)$. *De plus, les matrices* $\mathrm{Dec}(G,B)$ *et* $\mathrm{Dec}(D,p)$ *sont "égales aux signes près":*

$$\mathrm{Dec}(G,B) = \begin{bmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Dec}(D,p).$$

Il est à noter que la structure de D lui-même n'intervient pas dans l'énoncé précédent, et donc que ce théorème met en évidence l'importance cruciale de la structure de $\mathfrak{Br}(G,B)$ pour la structure de $\mathrm{Mod}(B)$. Cela étant, la structure du groupe D influe sur celle de la catégorie $\mathfrak{Br}(G,B)$, comme le montre le cas où D est cyclique (ou, plus simplement, le cas où $D = \{1\}$). De plus, les résultats obtenus concernent bien la structure de la catégorie de modules $\mathrm{Mod}(B)$ et non celle de groupe G: il existe des blocs de groupes simples satisfaisant aux hypothèses du théorème (2.12).

Ce résultat met aussi en évidence les limites de l'étude locale: il ramène le problème à celui de l'étude des représentations d'un p-groupe. Ce dernier problème requiert alors d'autres méthodes, en particulier homologiques, comme le montrent par exemple les travaux récents de J. Carlson.

D'autres résultats généraux de la théorie locale des groupes finis fournissent des conjectures naturelles pour le cas d'un bloc quelconque. Il en est ainsi du Z^*-p-théorème, dû à Glauberman [**Gl**] pour $p = 2$, et conséquence de la classification des groupes finis simples pour p impair.

(2.13) THÉORÈME. *Soit P un p-sous-groupe de G tel que l'inclusion de $C_G(P)$ dans G induise une équivalence de catégories entre $\mathfrak{Fr}(C_G(P), p)$ et $\mathfrak{Fr}(G, p)$. Alors $G = C_G(P)O_{p'}(G)$.*

Un cas particulier (dû à Brauer et Suzuki) du théorème précédent est obtenu en considérant un groupe dont un 2-sous-groupe de Sylow D est quaternionien. Il est facile de vérifier que, si P est l'unique sous-groupe d'ordre 2 de D, les hypothèses de (2.13) sont satisfaites. Cela suggère la question suivante:

(2.14) QUESTION. Soit $p = 2$, et soit B un bloc de G dont les groupes de défaut sont quaternioniens. Soit P l'unique sous-groupe d'ordre 2 d'un groupe de défaut, et soit E un bloc de $C_G(P)$ tel que (P, E) soit une B-souspaire de G. Les catégories de modules $\mathrm{Mod}(B)$ et $\mathrm{Mod}(E)$ sont-elles équivalentes?

3. Quelques problèmes ouverts.

A. *Les algèbres de source.* La théorie locale des blocs et celle des "vertices" et sources des modules indécomposables (due à J. A. Green) ont été englobées par Puig dans le langage des groupes pointés [**Pu2**]. Dans ce cadre, la notion d'algèbre de source d'une G-algèbre intérieure indécomposable joue un rôle crucial (cf. [**Pu3**], par exemple). Nous nous contentons de la définir ici pour les blocs.

Soit B un bloc de G et soit (D, E) une B-souspaire maximale. Il est immédiat de vérifier que le bloc E de $C_G(D)$ vérifie les hypothèses du théorème "de Frobenius" (2.13), et par conséquent $\mathrm{Mod}(E)$ est équivalente à la catégorie des modules sur un p-groupe; en particulier, il n'y a (à isomorphisme près) qu'un seul E-module projectif indécomposable.

Considérons alors la situation décrite dans l'énoncé du théorème (2.3). Soit i un idempotent primitif de $kC_G(D)$ tel que $i \in k \otimes_{\mathcal{O}} E$ (ainsi, le $(k \otimes_{\mathcal{O}} E)$-module $(k \otimes_{\mathcal{O}} E)i$ est projectif indécomposable), et soit $\hat{i}$ un idempotent primitif de $(kG)^D$ d'image i par Br_D. Soit enfin j un idempotent primitif de $(\mathcal{O}G)^D$ d'image $\hat{i}$ dans $(kG)^D$.

On note $\mathrm{Sce}(B)$ et on appelle algèbre de source de B l'algèbre jBj munie de l'homomorphisme de groupes $D \to \mathrm{Sce}(B)^\times$ défini par $x \mapsto xj$. Puisque i est unique (à conjugaison près par $(kC_G(D))^\times$), le couple $(D, \mathrm{Sce}(B))$ est ainsi défini de manière unique à G-conjugaison près.

(3.1) THÉORÈME (PUIG). (1) *Les catégories de modules*

$$\mathrm{Mod}(B) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Mod}(\mathrm{Sce}(B))$$

sont équivalentes.

(2) *La connaissance de* $\mathrm{Sce}(B)$ *permet de reconstituer* $\mathfrak{Br}(G,B)$ *à équivalence prés.*

(3) *La connaissance de* $\mathrm{Sce}(B)$ *permet de reconstituer* $\mathrm{Dec}(G,B)$.

La notion d'algèbre de source peut être un outil commode vers une classification en théorie des blocs, grâce au théorème précédent et à la conjecture suivante.

(3.2) CONJECTURE (PUIG). Pour tout p-groupe D, il n'existe qu'un nombre fini de couples (S,π) (à isomorphisme près) où S est une $\mathcal{O}$-algèbre et π un homomorphisme $D \to S^\times$ qui soient les algèbres de source de blocs de groupes de défaut D.

Cette conjecture est vérifiée, grâce à la classification des groupes finis simples, dans le cas où on se restreint aux blocs des groupes p-résolubles.

A l'appui de cette conjecture, voici un exemple d'une famille infinie de blocs ayant tous même groupe de défaut et même algèbre de source.

Soit r un nombre premier tel que p divise $r-1$, et soit (a_n) une suite infinie d'entiers non divisibles par p. Soit enfin m un entier tel que $m < p$. On pose $G_n = \mathrm{GL}_m(r^{a_n})$, et on note B_n le sous-groupe de G_n formé des matrices triangulaires supérieures; on pose

$$i_n = \frac{1}{|O_{p'}(B_n)|} \sum_{x \in O_{p'}(B_n)} x.$$

Soit D un p-sous-groupe du Sylow de G_n, isomorphe au produit direct de m copies du p-sous-groupe de Sylow de $(\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^\times$. Il est facile de vérifier que i_n est un idempotent primitif de $(\mathcal{O}G_n)^D$ et que $i_n\mathcal{O}G_n i_n$ est algèbre de source du bloc principal de G_n. D'autre part, $i_n\mathcal{O}G_n i_n$ est "constante" et isomorphe à $\mathcal{O}(D \rtimes N_{G_1}(D)/C_{G_1}(D))$.

B. *La conjecture d'Alperin.* Comme indiqué au paragraphe précédent, l'expérience suggère que certains des résultats connus sur les blocs à groupe de défaut cyclique peuvent s'étendre à une situation plus générale. D'autre part, il serait important, en vue d'une simplification de la démonstration du théorème de classification des groupes finis simples, de posséder une démonstration *a priori* du Z^*-p-théorème (cf. (2.14) ci-dessus) dans le cas où p est impair.

Un pas important dans ces deux directions serait fourni par la vérification de la conjecture d'Alperin, qui affirme que l'on peut "calculer localement" la taille de la matrice de décomposition $\mathrm{Dec}(G,B)$. Plus précisément:

(3.3) CONJECTURE (ALPERIN). Le nombre de k-représentations irréductibles d'un bloc B de G est égal à

$$\sum_{(P,E)} n_0(P,E),$$

où $n_0(P,E)$ est le nombre de classes d'isomorphismes de $kN_G(P,E)$-modules irréductibles sur lesquels l'élément unité de E agit comme l'identité et qui sont des $k(N_G(P,E)/P)$-modules projectifs, et où (P,E) parcourt un système de représentants des classes de conjugaison (sous G) de B-souspaires de G.

Cette conjecture a été vérifiée dans le cas des groupes p-résolubles par Dade [**Da2**] et par Okuyama et Wajima [**Ok**], dans le cas des groupes de type de Lie en caractéristique p par Cabanes, dans le cas des groupes symétriques par Alperin et dans celui des groupes linéaires en caractéristique différente de p par Fong.

C. *Les blocs des groupes de type de Lie en caractéristique non naturelle.* Le travail de Fong et Srinivasan [**Fo–Sr**] a mis en évidence les relations remarquables qui existent entre les outils de la théorie des blocs et l'induction généralisée introduite par Deligne et Lusztig. Ces relations ont permis [**Bro**] de déterminer la structure de $\mathfrak{Br}(G, B)$ pour $G = \mathrm{GL}_n(q)$ ou $\mathrm{U}_n(q^2)$, et B un l-bloc de G avec $l \nmid p$. Il reste à généraliser ces résultats aux autres "groupes finis réductifs," et à étudier les exemples nombreux qu'ils fournissent et les généralisations qu'ils suggèrent.

BIBLIOGRAPHIE

[**Al-Br**] J. L. Alperin et M. Broué, *Local methods in block theory*, Ann. of Math. **110** (1979), 143–157.

[**Be**] D. Benson, *Modular representation theory: new trends and methods*, Lecture Notes in Math., vol. 1081, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984.

[**Bra**] R. Brauer, *Collected papers*. I, II, III, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1980.

[**Bro**] M. Broué, *Les l-blocs des groupes* $\mathrm{GL}(n,q)$ *et* $\mathrm{U}(n,q^2)$ *et leurs structures locales*, Sém. Bourbaki, 37è année (1984/85), n°640, Astérisque **133–134** (1986), 159–188.

[**Br-Pu**] M. Broué et Ll. Puig, *A Frobenius theorem for blocks*, Invent. Math. **56** (1981), 117–128.

[**Da1**] E. C. Dade, *Blocks with cyclic defect groups*, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 20–48.

[**Da2**] ——, *A correspondance of characters*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, pp. 401–404.

[**Fo-Sr**] P. Fong et B. Srinivasan, *The blocks of finite general linear and unitary groups*, Invent. Math. **69** (1982), 109–153.

[**Fe**] W. Feit *The representation theory of finite groups*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[**Go**] D. M. Goldschmidt, *A conjugation family for finite groups*, J. Algebra **16** (1970), 138–142.

[**Gl**] G. Glauberman, *Central elements in core-free groups*, J. Algebra **4** (1966), 403–420.

[**Gr**] J. A. Green, *Some remarks on defect groups*, Math. Z. **107** (1968), 133–150.

[**Ok**] T. Okuyama, *Module correspondence in finite groups*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 299–318.

[**Pu0**] Ll. Puig, *Structure locale dans les groupes finis*, Bull. Soc. Math. France **47** (1976).

[**Pu1**] ——, *La classification des groupes finis simples: bref aperçu et quelques conséquences internes*, Sém. Bourbaki, 34è année (1981/82), n°584, Astérisque **92–93** (1984), 101–128.

[**Pu2**] ——, *Pointed groups and construction of characters*, Math. Z. **176** (1981), 265–292.

[**Pu3**] ——, *The source algebra of a nilpotent block*, Preprint, 1982.

[**Pu4**] ——, *Local fusions in block source algebras*, J. Algebra (à paraitre).

[**Se**] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, 3è édition, Hermann, Paris, 1978.

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 75005 PARIS, FRANCE

Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Berkeley, California, USA, 1986

Equivariant Embeddings of Homogeneous Spaces

CORRADO DE CONCINI

0. Introduction. Given an algebraic group G over an algebraically closed field k, which, for most of this paper, will be assumed of characteristic 0, and a closed subgroup $H \subset G$, an embedding of the homogeneous space G/H is a pair (X, i), where X is a G-variety and i a G-equivariant embedding $i\colon G/H \to X$ with $i(G/H)$ an open dense subset of X.

For a general homogeneous space the structure of embeddings is largely unknown and mysterious except in some cases (for a beautiful beginning see [**LV**]). Here we shall review some results on embeddings of a special type of homogeneous space that is called spherical. By definition a homogeneous space G/H is called spherical [**BLV**, **B1**] if G is a connected reductive group and a Borel subgroup $B \subset G$ has a dense orbit in G/H.

This class of homogeneous spaces, although quite "small," (for a classification when H is reductive see [**B1**]) contains many interesting examples such as tori, homogeneous spaces G/H with H a maximal unipotent subgroup of G (see [**P1**] where a classification of embeddings in this case is given), or H the subgroup of elements fixed by an automorphism of order two of G (in this case one calls G/H a symmetric variety).

The paper will be organized in a way respectful of the "history" of the subject. So we shall start by recalling a few facts about the, by now, well-known theory of torus embeddings [**D1**, **KMS**, **Da**, **O**], which plays a special role in the theory of embeddings of spherical homogeneous spaces since, as we shall see below, one can in a certain sense reduce to the case of a torus. Then we shall review the case of symmetric varieties [**DP1**, **DP2**], which is on the one hand motivated by some examples arising from classical enumerative geometry and on the other motivates, at least for the author, further developments. We shall then briefly explain some recent results [**BLV**] in the general case of a spherical space. Finally we shall define an "intersection ring" for spherical homogeneous spaces, which gives sound foundations for Schubert calculus on such spaces.

We finish this introduction by giving some of the notation needed below.

Given two embeddings $(X_1, i_1), (X_2, i_2)$ of a homogeneous space G/H, a morphism $\phi\colon (X_1, i_1) \to (X_2, i_2)$ is a morphism of G-varieties $\phi\colon X_1 \to X_2$ with the

property that the diagram

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \phi \\ G/H & \xrightarrow{i_2} & X_2 \end{array}$$

commutes.

It is clear that a morphism between two embeddings, if it exists, is unique, so we can give a structure of partially ordered set to the set of (isomorphism classes of) embeddings of G/H by setting $(X_1, i_1) \geq (X_2, i_2)$ if a morphism $\phi\colon (X_1, i_1) \to (X_2, i_2)$ exists. Usually in what follows, when considering an embedding (X, i), we shall omit the injection and denote it only by X.

1. Review of the theory of torus embeddings. As already remarked, the theory of torus embeddings is by now well known and here we shall only give a brief review of it. In this section the field k can be taken of arbitrary characteristic. Let $T \cong G_m^n$, let G_m the multiplicative group of k, be a torus, and let $X^*(T)$ be its group of characters. Consider the group $X_*(T) = \mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbf{Z})$ of one-parameter subgroups of T together with the real vector space $V = \mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbf{R}) \supset X_*(T)$. The lattice $X_*(T)$ induces a rational structure on V.

Given an affine embedding A of T, we associate to it a rational pointed cone σ_A of V as follows: Let $S \subset X^*(T)$ be the subset consisting of characters χ with the property that there exists a T-proper vector in the coordinate ring of A transforming according to χ; we define $\sigma_A = \{v \in V \mid \langle v, \chi \rangle \geq 0, \forall \chi \in S\} \subset V$.

It is then easily seen that, if we assume A to be normal, the cone σ_A determines A and the map $A \to \sigma_A$ gives a bijection between normal affine embeddings of T and rational pointed cones.

Let us now consider a general normal T-embedding Z. By [S] we can cover Z with open affine T-stable subsets. Given an affine open T-stable subset $A \subseteq Z$, we have seen how to associate a cone σ_A to A. Thus to Z we can associate a (finite) collection $\Sigma_Z = \{\sigma_A\}$, A varying over the (finite) set of open affine T-stable subsets of Z.

The collection Σ_Z satisfies the following two properties:

(a) If $\sigma \in \Sigma_z$ and τ is a face of σ, then $\tau \in \Sigma_Z$.

(b) If $\sigma, \tau \in \Sigma_Z$, $\sigma \cap \tau$ is a face of both σ and τ.

We now define a rational partial polyhedral decomposition (briefly r.p.p.d.) of V to be a collection Σ of rational pointed cones in V satisfying properties (a) and (b) above.

PROPOSITION. *The mapping $Z \to \Sigma_Z$ gives a bijection between normal T-embeddings and r.p.p.d.'s.*

In fact one can read many of the geometric properties of Z from the associated r.p.p.d. We list a few here.

(1) Given an open affine T-stable subset $A \subseteq Z$, there is a unique T-orbit $O_A \subseteq A$ which is relatively closed in A. Vice versa, any T-orbit in Z is relatively

closed in a unique affine T-stable open subset of Z. In this way one gets a bijection between T-orbits in Z and cones in Σ_Z. Furthermore, given two orbits O_1 and O_2 of Z and letting σ_1 and σ_2 be the corresponding faces, $O_1 \subseteq \overline{O}_2$ if and only if σ_2 is a face of σ_1.

(2) Z is complete if and only if V is the union of the cones in Σ_Z.

(3) Z is smooth if and only if for each cone $\sigma \in \Sigma_Z$ there exist vectors $v_1, v_2, \ldots, v_r \in X_*(T)$ such that $\sigma = \{v \in V | v = \sum a_i v_i,\ a_i \geq 0\}$ and $v_1, v_2, \ldots, v_r$ can be completed to a basis of $X_*(T)$.

(4) $Z_1 \geq Z_2$ if and only if every cone in Σ_{Z_1} is contained in a cone in Σ_{Z_2}. (In this case we set $\Sigma_{Z_1} \geq \Sigma_{Z_2}$.) Furthermore the morphism $\phi\colon Z_1 \to Z_2$ is proper if and only if each cone in Σ_{Z_2} is the union of cones in Σ_{Z_1}.

2. Symmetric varieties. In this section G will be a semisimple group of adjoint type, $\sigma\colon G \to G$ an order two automorphism of G, $H = G^\sigma = \{g \in G | \sigma(g) = g\}$.

In this case G/H, which is, as one can easily deduce from the Iwasawa decomposition, a spherical homogeneous space, has a canonical projective embedding X. X has various definitions [**DP1**, **Sp**]. Here we shall give the quickest and most natural one, which was inspired by [**D2**], where some special cases were treated, warning the reader that it is by no means the easiest to work with.

Let $\mathfrak{g} = \mathcal{L}ie\, G$, $\mathfrak{h} = \mathcal{L}ie\, H$, $\dim \mathfrak{h} = s$. We can consider $\mathfrak{h}$ as a point in the Grassman variety $\mathcal{G}_s(\mathfrak{g})$ of s-dimensional subspaces of $\mathfrak{g}$. The adjoint action of G on $\mathfrak{g}$ induces an action on $\mathcal{G}_s(\mathfrak{g})$. We define X as the closure of the orbit $G \circ \mathfrak{h} \subseteq \mathcal{G}_s(\mathfrak{g})$. Since H equals its normalizer in G, we then get that X is indeed a projective embedding of G/H.

The study of X depends on the existence of a very nice open set in X. In order to explain this we need to recall a few facts. A torus $S \subseteq G$ is called split if, $\forall s \in S$, $\sigma(s) = s^{-1}$. Split tori exist [**V1**]. Fix a maximal split torus T_1 and a maximal torus $T \subseteq G$ containing T_1. One knows that T is stable under σ; thus σ induces an involution on the character group $X^*(T)$ which preserves the root system $\mathcal{R}$. We define a map $\mu\colon X^*(T) \to X^*(T)$ by $\mu(\chi)(t) = \chi(t)\chi(\sigma(t^{-1}))$. Restricting characters to T_1 we see that we can identify $\mu(X^*(T))$ with $X^*(T')$, where $T' = T_1/T_1 \cap H \cong T/T \cap H$. (Notice that $T_1 \cap H$ is the subgroup of T_1 of elements of order two.)

Furthermore $\mathcal{R}' = \mu(\mathcal{R}) - \{0\} \subset X^*(T')$ is a (possibly nonreduced) root system. Let W_r be its Weyl group. Consider the vector space

$$V = \mathrm{Hom}(X^*(T_1'), \mathbf{R}) \supset X_*(T').$$

The root system $\mathcal{R}'$ induces a rational polyhedral decomposition Σ of V whose cones are the Weyl chambers and their faces. Associated to Σ, we then get a smooth and complete embedding Z of T'. Notice that Σ is W_r-stable, i.e., if $\sigma \in \Sigma$, $w \in W_r$, $w \circ \sigma \in \Sigma$. This implies that W_r acts on Z, extending the natural action of W_r on T'. If we choose a fundamental Weyl chamber σ, and hence an ordering on the root system $\mathcal{R}'$, we can associate to σ an affine T'-stable

open subset $Z^{(o)}$ of Z which is isomorphic to an affine space, and a parabolic subgroup $P \subset G$, namely, the parabolic associated to the set of roots $\alpha \in \mathcal{R}$ such that $\mu(\alpha) \geq 0$. We denote by P^u the unipotent radical of P.

Consider now the T-orbit $T \circ [H] \subseteq G/H$. It is easy to see that $T \circ [H]$ is isomorphic to T', so for an embedding Y of G/H, the closure Z_Y of $T \circ [H]$ in Y is an embedding of T'. Furthermore we have [**He**] that $W_r \cong N_H(T_1)/C_H(T_1)$, where $N_H(T_1)$ (resp. $C_H(T_1)$) denotes the normalizer (resp. centralizer) of T_1 in H, so that W_r acts on Z_Y, extending the natural action of W_r on T (we shall call such an embedding an embedding with W_r-action). Going back to X we have

LEMMA [**DP1**]. *There exists an affine P-stable open set $A \subseteq X$ meeting every G-orbit in X such that*

(1) $A \cap Z_X \cong Z^{(o)}$.

(2) *The map $P^u \times Z^{(o)} \cong P^u \times (A \cap Z_X) \to A$ induced by the P^u action on A is an isomorphism; in particular, A is isomorphic to an affine space.*

(3) *For every G-orbit O in X there exists a unique T-orbit O' in $Z^{(o)}$; such $O \cap A$ is the isomorphic image of $P^u \times O'$ under the isomorphism given in* (2).

From this lemma it is then easy to deduce many properties of X.

THEOREM [**DP1**]. (1) *The closure of every G-orbit in X is smooth* (*in particular, X is smooth*).

(2) *$X - G \circ \mathfrak{h}$ is a divisor D with normal crossings and each irreducible component of D is the closure of a G-orbit.*

(3) *Let $D_1, D_2, \ldots, D_m$, $m = \dim T_1$, be the irreducible components of D. Then the closure of any G-orbit O is the transversal intersection of the D_i's containing O.*

(4) *$\bigcap_{i=1}^r D_i \cong G/P$ is the unique closed orbit in X.*

We now define $\mathcal{E}$ to be the partially ordered set of embeddings of G/H which are greater than or equal to X and $\mathcal{T}$ to be the set of embeddings with W_r-action of T' which are greater than or equal to Z. The following proposition, which is an easy consequence of the above theorem and its proof, tells us that a lot of information about the geometry of an embedding $Y \in \mathcal{E}$ can be deduced by looking at the torus embedding Z_Y.

PROPOSITION [**DP2**]. (1) *$Z_X = Z$. In particular, for any $Y \in \mathcal{E}$, $Z_Y \in \mathcal{T}$.*

(2) *The map $\not{f}: \mathcal{E} \to \mathcal{T}$, defined by $\not{f}(Y) = Z_Y$, is an isomorphism of partially ordered sets.*

(3) *An embedding $Y \in \mathcal{E}$ is normal* (*resp. complete, smooth, projective*) *if and only if Z_Y is normal* (*resp. complete, smooth, projective*). *In particular, by the theory of torus embeddings we get a bijection between the normal embeddings in $\mathcal{T}$ and the set of W_r-stable r.p.p.d. of V which are greater than or equal to Σ.*

(4) *Let $Y \in \mathcal{E}$. The intersection of Z_Y with any G-orbit $O \subseteq Y$ is proper, nonempty, and is the disjoint union of T'-orbits which are permuted transitively by W_r. Given two G-orbits O_1 and O_2 we have that $O_1 \subseteq \overline{O_2}$ if and only if $Z_Y \cap O_1 \subseteq \overline{Z_Y \cap O_2}$.*

Notice that in the case when $G = H \times H$ and $\sigma(h_1, h_2) = (h_2, h_1)$, $G/H \cong H$, considered as a $H \times H$-space under the action given by left and right multiplication, so in this case the variety X is a canonical compactification of the group H, which we shall denote by $\overline{H}$. (In this case the theory of embeddings is closely related to the algebraic monoids of [**Pu**, **Re**].)

It turns out that we can embed the canonical compactification X of any symmetric variety G/H, in $\overline{G}$ as follows: we consider the map $\mu\colon G \to G$ defined by $\mu(g) = g\sigma(g^{-1})$; then $\mu(G)$ is a closed subvariety of G isomorphic to G/H [**R**], and its closure in $\overline{G}$ is exactly X.

At this point a few final remarks are in order.

(a) When $X = \overline{\mathrm{PGl}(n)}$, X is called the variety of complete projectivities of $\mathbf{P}^{n-1}$. When $G = \mathrm{PGl}(n)$ and σ is orthogonal involution, G/H is the variety of nondegenerate quadrics in $\mathbf{P}^{n-1}$ and X is called the variety of complete quadrics. Both these varieties have been introduced and studied by classical geometers (see [**T**, **Se**] and for more modern treatments [**V**, **La**]) in relation to enumerative problems such as the computation of characteristic numbers for quadrics. An algorithm for computation of "characteristic numbers" in the case of a general symmetric variety has been given in [**DP1**] and implemented on a computer [**DGT**].

(b) A variety analogous to the variety X has been introduced in [**OS**] in the context of real symmetric spaces. The construction given in [**OS**] has been translated into the algebraic contest to give an alternative construction of X in [**Sp**].

(c) In [**V2**] Vust has announced a complete classification of normal embeddings of G/H in terms of "colored r.p.p.d.'s" using the theory developed in [**LV**].

(d) In the "case of a group" one can prove the results stated in this section under no assumption on the characteristic (see [**St**] where other properties of $\overline{H}$ are proved in a characteristic-free contest). In general the theory works under the assumption that the base field has characteristic not 2 using [**U**], but the proofs are substantially different from those given in [**DP1**].

3. Spherical spaces. In this section we shall review the results on [**BLV**] which show how to generalize at least some of the results of the preceding section to general spherical spaces.

The results in [**BLV**] about spherical homogeneous spaces are a consequence of a very general result which we are going to state. Let G be a reductive connected group, Z a normal G-variety, $z \in Z$ a point with the property that the orbit $G \circ z$ is projective, so that the stabilizer of $G_z \subseteq G$ is parabolic. Let P be a parabolic subgroup opposite to G_z and $L = G_z \cap P$. L is of course a Levi factor of P. Let P^u denote the unipotent radical of P. Then we have:

THEOREM [**BLV**]. *There exists a locally closed affine variety $W \subseteq Z$ such that*

(a) *$z \in W$ and W is L-stable;*

(b) *$P^u \circ W$ is an open set in Z;*

(c) *the map* $P^u \times W \to P^u \circ W$, *given by the action of* P^u *on* Z, *is an isomorphism.*

This result is proved by reducing the analysis, by a result of [**S**], to the case in which G acts linearly on a vector space N, and we take $Z = \mathbf{P}(N)$, with G-action induced by the linear action of G on N.

In order to clarify the relation with the results of §2, we notice that, using the notations of §2, if we take Z to be the canonical compactification X of a symmetric variety, z to be the center of the open Schubert cell in the closed orbit of X, we can take $W = A \cap Z_X \cong Z^{(o)}$.

We can now briefly explain which results about spherical homogeneous space are deduced in [**BLV**] from this theorem.

Let G/H be a spherical homogeneous space, and let $B \subseteq G$ be a Borel subgroup in G, with the property that $BH \subseteq G$ is open in G. One can easily check that $G - BH$ is a subvariety which is pure of codimension 1 in G. We denote by $\mathcal{P}_{++} \subset k[G]$, the subset of regular functions whose set of zeros is exactly (set-theoretically) $G - BH$ and have value 1 on the identity of G. We now want to define a parabolic subgroup $P \supseteq B$ of G and a torus in P which will play, in this case, a role analogous to the role played for symmetric varieties by the parabolic subgroup associated to a fundamental Weyl chamber for $\mathcal{R}'$ and by a maximal split torus.

P is easily defined. We let $P = \{g \in G | gBH = BH\}$. It is then clear that $P \supseteq B$. As for the torus, its definition is more subtle. We choose $f \in \mathcal{P}_{++}$ and consider the differential $df(e)$, e the identity of G. $df(e) \in g^*$, $g = \mathcal{L}ie\, G$. G acts on g^* by the coadjoint action and we let $L^f \subseteq G$ be the stabilizer of $df(e)$ in G. We now define our torus C^f to be the connected center of L^f. The fact that C^f is a torus follows since one shows [**BLV**] that L^f is a Levi subgroup of P and hence reductive.

By a repeated application of the above theorem one then gets:

THEOREM [**BLV**]. (1) $L^f \cap H = P \cap H$ *and this group is reductive.*

(2) *The derived subgroup of* L^f *is contained in* H.

(3) *Given any* G*-variety* Z *and a point* $z \in Z$ *fixed by* H, *the subset* $P^u \circ \overline{(C^f \circ z)}$ *contains a nonempty open set of every* G*-orbit in* $\overline{G \circ z}$.

Notice that (3) tells us exactly that the torus embedding $\overline{C^f \circ z}$ meets every orbit in $\overline{G \circ z}$; in particular, this applies for embeddings of G/H, that is, when $G_z = H$.

Let Y be a G/H embedding and Z_Y be the embedding of $C^f/C^f \cap H$ which is the closure of $C^f \circ [H]$ in Y. From the above theorem we see immediately that Y contains finitely many G-orbits (in effect each G-orbit of Y meets Z_Y in a nonempty union of C^f-orbits and there are finitely many such orbits), and each G-orbit is itself a spherical homogeneous space, so by [**B2**] we get in fact that Y has finitely many B-orbits.

From these results one can hope to describe the G/H-embeddings, Y, in terms of the torus embeddings Z_Y. From the methods used in the proof of the theorem

quite a bit can be said (see also [**BL**]). On the other hand, it is not at all clear (for some examples see [**P1**, **P2**]) which torus embeddings appear as Z_Y's for some G/H embedding Y. (In the case of a symmetric variety the Weyl group W_r played an important role but this seems to have no analogue in general.) The situation is complicated by the fact that the choice of $f \in \mathcal{P}_{++}$ is arbitrary and there is not, up to now, a clear "best choice" (one is proposed in [**BLV**]).

4. Schubert calculus. Let us consider a general homogeneous space $G/H = M$, with G connected and let $n = \dim M$. By Kleiman's transversality theorem [**K**] we have that, given two irreducible subvarieties $V_1, V_2 \subseteq M$, the intersection $V_1 \cap g \circ V_2$ is a proper intersection with multiplicity one in each component for g belonging to a nonempty open set U of G. When V_1 and V_2 have complementary codimensions in M we can choose U in such a way that for $g \in U$ the intersection $V_1 \cap V_2$ consists of finitely many simple points whose number, which we shall denote by (V_1, V_2), is independent of the choice of g in U.

It is clear that we can extend the pairing $(\ ,\ )$ to arbitrary cycles by linearity. Thus denoting by $Z^r(M)$ the group of codimension r cycles in M we get a bilinear pairing,

$$(\ ,\ ): Z^r(M) \times Z^{n-r}(M) \to \mathbf{Z}.$$

We then set $\mathcal{B}^r(M) = \{a \in Z^r(M) | (a, b) = 0, \forall b \in Z^{n-r}(M)\}$ and set $C^r(M) = Z^r(M)/\mathcal{B}^r(M)$ and $C^*(M) = \bigoplus_r C^r(M)$, so that $C^*(M)$ is a graded abelian group together with a bilinear pairing,

$$(\ ,\ ): C^r(M) \times C^{n-r}(M) \to \mathbf{Z},$$

induced by the pairing on Z^*, which is nondegenerate in the sense that if $a \in C^r(M)$ is such that $(a, b) = 0\ \forall b \in C^{n-r}(M)$, then $a = 0$. The question we want to address is the following:

Does there exist a ring structure on $C^*(M)$ having the property that given $V_1, V_2 \subseteq M$ as above and denoting by $[V_1]$ and $[V_2]$ their classes in $C^*(M)$, $[V_1][V_2] = [V_1 \cap gV_2]$ with g generic?

This is in general not possible (for an easy example see [**DP2**]). However if we are in the case of a spherical homogeneous space it is possible to define this structure.

Consider the partially ordered set $\mathcal{S}$ of smooth projective embeddings of G/H. If $Y \in \mathcal{S}$, then since Y contains finitely many G-orbits, any maximal torus $T \subseteq G$ has finitely many fixpoints in Y. Hence using the theory of [**BB**] we have that Y has a "cellular decomposition" by locally closed affine cells. From this it is easy to verify that, denoting by $A^*(Y)$ (resp. $H^*(Y)$) the Chow ring (resp. the cohomology ring) of Y, Y has no odd cohomology and the natural map $A^*(Y) \to H^{2*}(Y)$ is an isomorphism. Recall that if $Y_1 \leq Y_2$ we get a unique morphism $\pi: Y_1 \to Y_2$ and hence a canonical homomorphism $A^*(Y_2) \to A^*(Y_1)$.

We can then consider the direct limit,

$$\mathcal{H}^*(G/H) = \varinjlim A^*(Y) \cong \varinjlim H^{2*}(Y), \qquad Y \in \mathcal{S}.$$

Any irreducible subvariety $V \subseteq G/H$ has a well-defined class in $\mathcal{H}^*(G/H)$. Indeed one shows [**DP2**] that there exists $Y \in \mathcal{S}$ such that $\overline{V} \subseteq Y$ has proper intersection with every G-orbit in Y, and if we consider the class of $\overline{V}$ in $A^*(Y)$ its image (V) in $\mathcal{H}^*(G/H)$ is independent of the choice of Y with the above properties.

We then have

THEOREM [**DP2**]. *There is a natural isomorphism*

$$\Phi\colon \mathcal{H}^*(G/H) \to C^*(G/H),$$

such that $\Phi((V)) = [V]$ *for every irreducible subvariety* $V \subseteq G/H$. *In particular,* $C^*(G/H)$ *inherits a ring structure from* $\mathcal{H}^*(G/H)$ *which has the properties required above.*

In [**DP2**] the result is proved for symmetric varieties; however one can see, using the results stated in §2, that the proofs go on verbatim in the spherical case.

The computation of the ring $\mathcal{H}^*$ is a complicated matter even in the case of a torus where at least the computation of the cohomology ring of smooth projective embeddings is completely known [**Da**]. In general even the knowledge of the cohomology ring of a smooth projective embedding of spherical homogeneous space is very limited. The only examples known to the author apart from torus embeddings are the case of the "compactifications of a group" [**DP3**], and of complete quadrics [**DGMP**] where the rational cohomology is known (for conics see also [**CX**]).

Betti numbers have been computed for the canonical embedding of a symmetric variety [**St1**, **DS**].

REFERENCES

[**BB**] A. Bialynicki-Birula, *Some theorem on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 480–497.

[**B1**] M. Brion, *Classification des espàces homogènes sphériques*, Bull. Soc. Math. France (to appear).

[**B2**] ——, *Quelques propriétés des espàces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.

[**BL**] M. Brion and D. Luna, *Sur la structure locale des variétés spheriques*, Preprint.

[**BLV**] M Brion, D. Luna and Th. Vust, *Espaces homogènes sphériques*, Invent. Math. **84** (1986), 617–632.

[**CX**] E. Casas and S. Xambó, *The enumerative theory of conics after Halphen*, Lecture Notes in Math., vol. 1196, Springer-Verlag, Berlin-New York.

[**Da**] V. I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys **33** (1978), 97–154.

[**DGT**] C. De Concini, P. Gianni and C. Traverso, *Computation of new Schubert tables for quadrics and projectivities*, Adv. Stud. Pure Math. **6** (1985), 515–523.

[**DGMP**] C. De Concini, M. Goreski, R. McPherson, and C. Procesi, *On the geometry of quadrics and their degenerations*, Comment. Math. Helv. (to appear).

[**DP1**] C. De Concini and C. Procesi, *Complete symmetric varieties*, Lecture Notes in Math., vol. 996, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983, pp. 1–44.

[**DP2**] ——, *Complete symmetric varieties*. II, Adv. Stud. Pure Math. **6** (1985), 481–513.

[**DP3**] ——, *Cohomology compactifications of a semisimple adjoint group*, Duke Math. J. **53**, no. 3, 585–596.

[**DS**] C. De Concini and T. A. Springer, *Betti numbers of complete symmetric varieties*, Progr. Math., vol. 60, Birkhäuser, 1985, pp. 87–119.

[**D1**] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **3** (1971), 507–588.

[**D2**] ——, *Limites de groupes orthogonaux ou symplectiques*, Preprint (1980).

[**He**] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[**KMS**] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings*, Lecture Notes in Math., vol. 339, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[**K**] S. Kleiman, *The transversality of a general translate*, Compositio Math. **28** (1974), 287–297.

[**L**] D. Laksov, *Complete linear maps*. I: *The geometry*, Preprint.

[**LV**] D. Luna and Th. Vust, *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 186–245.

[**O**] T. Oda, *Lectures on torus embeddings and applications*, Tata Inst. Fund. Res. Lecture Notes XI, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1978.

[**OS**] T. Oshima and J. Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators in affine symmetric spaces*, Invent. Math. **57** (1980), 1–81.

[**P1**] F. Pauer, *Normale einbettungen von G/U*, Math. Ann. **257** (1981), 371–396.

[**P2**] ——, *Plongements normaux de l'espace homogène* SL(3)/Sl(2), C. R. du 108e Con. nat. Soc. sav. Grenoble (1983).

[**Pu**] M. Putcha, *Linear algebraic semigroups*, Semigroup Forum **22** (1981), 287–309.

[**Re**] L. E. Renner, *Classification of semisimple algebraic monoids*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 193–223.

[**R**] R. W. Richardson, *Orbits invariants and representations associated to involutions of reductive groups*, Invent. Math. **66** (1982), 287–312.

[**Se**] J. G. Semple, *The variety whose points represent complete collineations of S_r on S'_r*, Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. **10** (1951), 201–208.

[**Sp**] T. A. Springer, *Algebraic groups with involutions*, Preprint.

[**St1**] E. Strickland, *Schubert type cells for complete quadrics*, Adv. in Math. (to appear).

[**St2**] ——, *A vanishing theorem for group compactifications in arbitrary characteristic*, Preprint.

[**S**] H. Sumihiro, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 1–28.

[**T**] J. A. Tyrell, *Complete quadrics and collineations in S_n*, Mathematika **3** (1956), 69–79.

[**U**] To. Uzawa, *On the equivariant completions of algebraic symmetric spaces*, Alg. Top. Theories (1985), 569–577.

[**V**] I. Vainsencher, *Schubert calculus for complete quadrics*, Enumerative geometry and classical algebraic geometry (Nice, 1981), Progr. Math., vol. 24, Birkhäuser, 1982, pp. 199–235.

[**V1**] Th. Vust, *Opération des groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes*, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 317–333.

[**V2**] ——, Communication in Basel, 1982.

UNIVERSITÀ DI ROMA, TOR VERGATA, ITALY