Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 285 à 290.

GROUPES ALGÉBRIQUES SEMI-SIMPLES SUR UN CORPS LOCAL

par François BRUHAT

Soit K un *corps local*, i.e. un corps *complet* pour une valuation *discrète* non impropre, à corps résiduel k *parfait* ; on sait que le groupe additif des entiers de K, ou le groupe multiplicatif des entiers inversibles, peut être muni d'une structure de *limite projective de groupes algébriques sur k*. La théorie que nous allons résumer ci-dessous fournit une construction analogue pour un groupe *semi-simple* sur K, le faisant ainsi apparaître comme un "objet algébrique de dimension infinie" sur k. D'autre part, notre théorie fournit des analogues (mais "de rang infini") des systèmes de racines, sous-groupes de Borel, sous-groupes paraboliques, systèmes de Tits (ou BN-paires) de la théorie maintenant classique des groupes réductifs sur un corps quelconque.

Nos recherches trouvent leur origine dans l'étude des sous-groupes compacts maximaux des groupes $\mathfrak{p}$-adiques. Un pas fondamental a été fait par Iwahori et Matsumoto lorsqu'ils ont démontré en 1964 l'existence d'un système de Tits à groupe de Weyl infini dans un groupe semi-simple déployé sur un corps local, résultat généralisé peu après à divers types de groupes par Hijikata. Les résultats qui suivent sont dus à J. Tits et à l'auteur.

1. – Soit $\mathfrak{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur un corps K (quelconque) ; soient $\mathfrak{S}$ un tore déployé maximal sur K de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}$ le centralisateur et $\mathfrak{N}$ le normalisateur de $\mathfrak{S}$. On pose $G = \mathfrak{G}(K)$, $Z = \mathfrak{Z}(K)$, etc. La théorie classique permet d'introduire les objets suivants :

(1) un système de racines Φ dans le dual V^* d'un espace euclidien V ;

(2) un homomorphisme surjectif ν_0 de N sur le groupe de Weyl W_0 de Φ, de noyau Z ;

(3) pour chaque racine $a \in \Phi$, un sous-groupe unipotent $\mathfrak{U}_a$ défini sur K.

Ces objets possèdent les propriétés suivantes :

(4) $nU_an^{-1} = U_{\nu_0(n)(a)}$ (*pour* $n \in N$ *et* $a \in \Phi$) ;

(5) *pour* $a, b \in \Phi$, *le groupe des commutateurs* (U_a, U_b) *est contenu dans le sous-groupe engendré par les* U_{pa+qb} *avec* p, q *entiers* > 0 *et* $pa + qb \in \Phi$;

(6) *si* $a, 2a \in \Phi$, *on a* $U_{2a} \subset U_a$;

(7) *pour* $a \in \Phi$, *posons* $M_a = \nu_0^{-1}(r_a)$, *où* r_a *est la réflexion par rapport à la racine a. Pour tout* $u \in U_a$, $u \neq 1$, *il existe un triple* $(u', m(u), u'') \in U_{-a} \times M_a \times U_{-a}$ *et un seul tel que* $u = u'm(u)u''$;

(8) *Soit* U^+ (resp. U^-) *le groupe engendré par les* U_a *pour* a *décrivant l'ensemble des racines positives (resp. négatives) pour un ordre total choisi sur* V^* ; *on a* $ZU^+ \cap U^- = \{1\}$;

(9) *le couple* (ZU^+, N) *est un système de Tits de groupe de Weyl* W_0 *dans* G ; *en particulier, l'application naturelle est une bijection de* W_0 *sur l'ensemble des doubles classes* $ZU^+\backslash G/ZU^+$.

Notons que $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}^+$ est un sous-groupe parabolique défini sur K minimal.

D'une manière générale, nous appellerons *donnée radicielle* de type Φ dans un groupe G la donnée de sous-groupes N et U_a (pour $a \in \Phi$), engendrant G, et d'un homomorphisme surjectif $\nu_0 : N \to W_0$ de noyau noté Z, satisfaisant aux conditions (4) à (8) ci-dessus. Elles entraînent (9).

2. — Lorsque $\mathfrak{G}$ est déployé sur K, les sous-groupes U_a sont isomorphes au groupe additif de K et le choix d'une "base de Chevalley" dans l'algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$ permet de choisir les isomorphismes $u_a : K \to U_a$ de manière "cohérente". Si K est muni d'une valuation ω non impropre, on peut alors transporter ω à chacun des U_a en posant $\varphi_a(u_a(t)) = \omega(t)$. La famille $\varphi = (\varphi_a)$ possède les propriétés suivantes :

(10) *pour tout* $k \in \mathbf{R}$, *l'image réciproque* $U_{a,k} = \varphi_a^{-1}([k, +\infty])$ *est un sous-groupe de* U_a *non réduit à* $\{1\}$ *et l'intersection des* $U_{a,k}$ *est égale à* $\{1\}$;

(11) *soient* $a, b \in \Phi$, *avec* $b \notin -\mathbf{R}_+ a$, *et soient* $h, k \in \mathbf{R}$; *le groupe des commutateurs* $(U_{a,h}, U_{b,k})$ *est contenu dans le groupe engendré par les* $U_{pa+qb,\, ph+qk}$ *pour* p, q *entiers* > 0 *et* $pa + qb \in \Phi$.

Pour énoncer commodément les autres propriétés, introduisons un langage géométrique. Pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$, soit $\alpha_{a,k}$ le demi-espace fermé de V défini par l'inéquation $a(x) + k \geqslant 0$; pour $\alpha = \alpha_{a,k}$, on pose encore $U_\alpha = U_{a,k}$. Les $\alpha_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \varphi_a(U_a) \cap \mathbf{R}$ seront appelés les *racines affines* de V et leurs bords les *murs* de V.

(12) *il existe un homomorphisme* ν *de* N *dans le groupe des automorphismes affines de* V *tel que* $\nu(N)$ *permute les racines affines et que* $nU_a n^{-1} = U_{\nu(n)(\alpha)}$ *pour tout* $n \in N$ *et toute racine affine* α.

Posons $W = \nu(N)$: c'est une extension du groupe de Weyl W_0 par son sous-groupe des translations. On pose $H = \operatorname{Ker} \nu$.

(13) *soient* $a \in \Phi$ *et* $u \in U_a$, $u \neq 1$; *posons* $k = \varphi_a(u)$ *et écrivons* $u = u'm(u)u''$ *comme en* (7). *Alors* $\varphi_{-a}(u') = \varphi_{-a}(u'') = -k$ *et* $\nu(m(u))$ *est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation* $a(x) + k = 0$.

D'une manière générale, nous appellerons *valuation* d'une donnée radicielle $(N, (U_a))$ une famille φ de fonctions $\varphi_a : U_a \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ satisfaisant aux conditions (10) à (13) et aussi à

(14) *si* $a, 2a \in \Phi$, φ_{2a} *est la restriction à* U_{2a} *de* $2\varphi_a$.

Pour simplifier l'exposé, nous supposerons désormais que Φ est *irréductible* et que G *est engendré par* H *et les* U_a (ce qui est le cas pour les groupes algé-

briques simples simplement connexes) ; on passe de là au cas général comme l'on passe, dans la théorie classique, du cas des groupes connexes au cas général.

Il est immédiat que, pour tout $x \in V$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, la famille des $\psi_a = \lambda\varphi_a + a(x)$ est encore une valuation de la donnée radicielle, notée $\lambda\varphi + x$. On dit que φ et $\lambda\varphi + x$ sont *équivalentes.*

3. — A la valuation φ est associée une *bornologie* sur G, à savoir la plus petite bornologie compatible avec la loi de groupe et pour laquelle sont bornés d'une part les $U_{a,k}$, d'autre part les parties M de N telles que $\nu(N)$ soit borné (c'est-à-dire relativement compact) dans le groupe des automorphismes affines de V. *Cette bornologie détermine la valuation à équivalence près.*

Revenons alors au cas des groupes algébriques simples sur un corps valué. La valuation de K détermine une bornologie naturelle sur G : une partie M de G est bornée si chaque fonction régulière reste bornée sur M. *Nous conjecturons que, si K est complet, il existe une valuation de la donnée radicielle de G (et une seule à équivalence près) dont la bornologie associée est la bornologie naturelle de G.* Sans pouvoir actuellement démontrer ce théorème dans toute sa généralité, nous savons le faire dans des cas fort larges : lorsque $\mathfrak{G}$ est *déployé* ou *quasi-déployé* sur K (et alors même si K n'est pas complet), lorsque G est un "*groupe classique*" (et même pour des groupes classiques non algébriques, associés à des corps gauches valués de rang infini sur leur centre), et, ce qui est le plus important pour les applications, lorsque K est un *corps local* au sens rappelé ci-dessus.

Notons que ce théorème entraîne que $\mathfrak{G}$ *est anisotrope sur K* (i.e. que $\Phi = \emptyset$) *si et seulement si le groupe G tout entier est borné.*

4. — Nous allons maintenant introduire des sous-groupes de G qui vont être l'analogue des sous-groupes paraboliques minimaux du cas classique. Soit $x \in V$ et soit D une chambre de Weyl de Φ dans V. Considérons le cône $x + D$ et soit $B = B_{x,D}$ le sous-groupe de G engendré par H et les U_α, où α décrit l'ensemble des racines affines contenant un voisinage de x dans $x + D$. Alors :

(15) *B est borné. Plus précisément, on a*

$$B = \prod_{a \in \Phi_+^{\mathrm{red}}} U_{a,-a(x)} \times H \times \prod_{a \in \Phi_+^{\mathrm{red}}} U_{-a,-a(x)+}$$

(où Φ_+^{red} désigne l'ensemble des racines indivisibles positives sur D et où $U_{a,k+}$ désigne la réunion des $U_{a,h}$ pour $h > k$).

(16) *On a une* "décomposition d'Iwasawa" $G = BNU^+ = BW_0ZU^+$. *Si de plus x est un point* spécial (i.e. *si $-a(x) \in \varphi_a(U_a)$ pour tout $a \in \Phi^{\mathrm{red}}$*), *il existe un sous-groupe $P \supset B$ qui est un sous-groupe borné maximal tel que $G = PZU^+$.*

(Rappelons que ZU^+ est un sous-groupe parabolique minimal).

(17) *On a une* "décomposition de Bruhat" $G = BNB$; *plus précisément, l'application naturelle est une bijection de W sur $B\backslash G/B$.*

On peut compléter ce qui précède lorsque φ est *discrète* (i.e. $\varphi_a(U_a - \{1\})$ discret dans **R** pour tout a). Il existe alors un système de racines réduit Ψ dans V^*, de même groupe de Weyl W_0 que Φ (c'est-à-dire dont les directions des racines sont les mêmes que celles de Φ, mais Φ peut par exemple être de type B_n et Ψ de type C_n ou inversement) tel que W soit le *groupe de Weyl affine* de Ψ : quitte à remplacer φ par une valuation équivalente, les murs de V sont les hyperplans d'équation $b(x) + k = 0$ pour $b \in \Psi$ et $k \in \mathbf{Z}$. Les murs déterminent alors sur V une structure de *complexe simplicial*, les *chambres* de V, c'est-à-dire les simplexes de dimension maximale, étant ce que N. Bourbaki appelle les *alcôves* de Ψ. Le groupe $B_{x,D}$ ne dépend alors que de la chambre de V qui contient un voisinage de x dans $x + D$ et les divers groupes B sont tous conjugués (ce qui n'est pas nécessairement vrai lorsque φ n'est pas discrète). De plus, *le couple* (B, N) *est un système de Tits de groupe de Weyl* W, ce qui explique la décomposition $G = BNB$ (17).

5. – Pour $x \in V$, soit N_x le stabilisateur de x dans N et soit P_x le sous-groupe de G engendré par N_x et les U_α pour $x \in \alpha$ (lorsque x est un point spécial, c'est le sous-groupe P de (16)). Disons que deux points (g, x) et (h, y) de $G \times V$ sont équivalents s'il existe $n \in N$ tel que $y = \nu(n).x$ et $g^{-1}hn \in P_x$: l'*immeuble* I de G est par définition le quotient de $G \times V$ par cette relation d'équivalence. Le groupe G opère sur I, l'espace affine V se plonge canoniquement dans I, l'action de G sur I prolonge celle de N sur V et le stabilisateur d'un point $x \in V$ n'est autre que P_x. Il existe sur I une *distance* et une seule invariante par G et induisant sur V la distance euclidienne. Lorsque φ est discrète, I est aussi muni d'une structure de complexe simplicial invariante par G et prolongeant celle de V.

L'espace métrique I ainsi défini joue alors un rôle analogue à celui de l'espace riemannien symétrique d'un groupe de Lie semi-simple réel. C'est un espace *contractile* ; deux points quelconques sont joints par une *géodésique unique* ; I est "*à courbure négative*" en ce sens que si $x, y, z \in I$ et si m est le milieu de la géodésique $[xy]$, on a

$$d(x, z)^2 + d(y, z)^2 \geqslant 2d(m, z)^2 + \frac{1}{2} d(x, y)^2$$

Mais I n'est pas toujours *complet*, sauf toutefois lorsque φ est discrète ou, dans le cas des groupes algébriques, lorsque le corps de base K est maximalement complet. Cependant, la propriété de courbure négative entraîne un "théorème de point fixe" : *le stabilisateur dans G d'une partie bornée de I possède au moins un point fixe dans le complété* $\hat{I}$ *de I*. Ceci permet de déterminer les *sous-groupes bornés maximaux* de G : lorsque φ est "dense", ce sont les stabilisateurs des points du complété $\hat{I}$; lorsque φ est discrète, ce sont les stabilisateurs des *sommets* du complexe simplicial I et ils se répartissent en $r + 1$ classes de conjugaison, où r est le rang de G, c'est-à-dire la dimension de V. Remarquons ici que si l'on ne fait pas les hypothèses simplificatrices de la fin du n° 2 et si l'on étudie le cas "non simplement connexe", la classification des sous-groupes bornés maximaux est un peu plus compliquée à décrire : ce sont les stabilisateurs des sommets et des centres de certaines facettes de I.

6. — Bornons-nous désormais au cas d'un groupe algébrique simple et simplement connexe sur un corps local. Les *sous-groupes parahoriques* de G sont par définition les sous-groupes contenant un conjugué de B et différents de G lui-même lorsque G n'est pas anisotrope sur K. A tout sous-groupe parahorique P de $G = \mathfrak{G}(K)$, est alors canoniquement associé un "groupe proalgébrique connexe $\mathfrak{P}$ défini sur le corps résiduel k" tel que $P = \mathfrak{P}(k)$: autrement dit, à P est associé un système projectif $(\mathfrak{P}_n)_{n \geqslant 0}$ de groupes algébriques connexes définis sur k, tel que P s'identifie à $\lim \mathfrak{P}_n(k)$. Les homomorphismes $\mathfrak{P}_m \to \mathfrak{P}_n$ sont surjectifs, de noyaux unipotents connexes, et $\mathfrak{P}_0$ est réductif. Les sous-groupes *parahoriques* contenus dans P sont les images réciproques des sous-groupes *paraboliques* de $\mathfrak{P}_0(k)$.

On a aussi des résultats relatifs à la "descente non-ramifiée" du corps de base analogues à ceux de la théorie classique : si $\widetilde{K}$ est une extension galoisienne non-ramifiée de K, un sous-groupe parahorique de $\mathfrak{G}(K)$ est le groupe des points rationnels sur K d'un sous-groupe parahorique $\widetilde{P}$ de $\mathfrak{G}(\widetilde{K})$ invariant par le groupe de Galois Γ de $\widetilde{K}$ sur K, et d'un seul, et ceci de manière cohérente avec les structures de groupe proalgébrique : l'action de Γ sur $\widetilde{P}$ définit sur chaque $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ une structure de groupe algébrique défini sur k et $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ s'identifie alors à $\mathfrak{P}_n$.

7. — Pour terminer, donnons une application : la démonstration de la nullité du H^1 d'un groupe simple simplement connexe sur un corps local dont le corps résiduel est de dimension cohomologique $\leqslant 1$, théorème dû à M. Kneser dans le cas des corps $\mathfrak{p}$-adiques. Pour cela, on peut supposer $\mathfrak{G}$ déployé sur K. Soit $\widetilde{K}$ l'extension non-ramifiée maximale et soit Γ le groupe de Galois de $\widetilde{K}$ sur K. On sait que $H^1(\mathfrak{G}) = H^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\widetilde{K}))$. Soit donc $a = (a_\sigma)$ un 1-cocycle de Γ à valeurs dans $\mathfrak{G}(\widetilde{K})$ et soit $\mathfrak{G}_a$ la forme de $\mathfrak{G}$ sur K obtenue en tordant $\mathfrak{G}$ par a. Puisque les sous-groupes parahoriques de $\mathfrak{G}_a(K)$ correspondent aux sous-groupes parahoriques de $\mathfrak{G}_a(\widetilde{K}) = \mathfrak{G}(\widetilde{K})$ invariants par la nouvelle action de Γ, il existe au moins un tel sous-groupe parahorique Q de $\mathfrak{G}(\widetilde{K})$. Comme $\mathfrak{G}$ est déployé sur K, on voit facilement que Q est conjugué dans $\mathfrak{G}(\widetilde{K})$ d'un sous-groupe parahorique P invariant par l'ancienne action de Γ. On en déduit que a est cohomologue à un cocycle a' tel que $a'_\sigma P a'^{-1}_\sigma = P$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Mais P est son propre normalisateur et ceci entraîne $a'_\sigma \in P$. Ecrivons alors P comme limite projective des $\mathfrak{P}_n$: comme $\dim k \leqslant 1$, on a $H^1(\mathfrak{P}_n) = 0$, d'où l'on tire $H^1(\Gamma, P) = 0$ et a' est cohomologue à 0.

BIBLIOGRAPHIE

BRUHAT F. et TITS J. — Groupes algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. Local Fields* (Driebergen 1966), Springer, Berlin, 1967, p. 23-36.

BRUHAT F. et TITS J. — *Groupes réductifs sur un corps local,* chapitre I, *Données radicielles valuées,* à paraître aux Publ. I.H.E.S.

IWAHORI N. et MATSUMOTO H. — *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups, Publ.* I.H.E.S., 25, 1965, p. 5-48.

Université Paris 7ème
2, Place Jussieu,
Paris 5ème