Applications dont la source est un classifiant

JEAN LANNES

Université Paris 7, UFR de Mathématiques, Tour 45-55
2 place Jussieu, F-75251 Paris, France

0 Introduction

Depuis la fin des années 70 un grand nombre de travaux ont été consacrés aux espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(BG, -)$ dont la source est le classifiant d'un groupe de Lie compact G (par exemple un groupe fini). Rappelons la terminologie : l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(X, Y)$ est l'espace des applications d'un espace X dans un espace Y. Les motivations originales étaient les conjectures de Segal et Sullivan. La conjecture de Segal concernait l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(BG, QS^0)$, G désignant un groupe fini et QS^0 la limite directe des espaces de lacets $\Omega^n S^n$. Un cas particulier de la conjecture de Sullivan, celui traité en premier par H. R. Miller [Mi], concernait les espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(B(\mathbb{Z}/p), Y)$ avec Y un CW-complexe fini.

La théorie des espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(BG, -)$ avec G un groupe de Lie compact apparaît comme un jeu de construction dont la pièce élémentaire est le cas $G = \mathbb{Z}/p$, p premier. Nous nous proposons dans cet article de résumer la théorie des espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(B(\mathbb{Z}/p), -)$ [La1][La2], et de décrire quelques-unes de ses interventions en théorie de l'homotopie.

Pour alléger la notation, on pose ci-après $\sigma = \mathbb{Z}/p$.

Une généralisation de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(B\sigma, Y)$ est l'espace des points fixes homotopiques $X^{h\sigma}$ d'une action de σ sur un espace X, c'est-à-dire l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}_\sigma(E\sigma, X)$ des applications σ-équivariantes de $E\sigma$ dans X, $E\sigma$ désignant comme d'habitude le revêtement universel de $B\sigma$; $\mathbf{hom}(B\sigma, Y)$ n'est donc rien d'autre que l'espace des points fixes homotopiques de l'action triviale de σ sur Y. En fait commme $\mathbf{hom}_\sigma(E\sigma, X)$ est la fibre en l'identité de l'application $\mathbf{hom}(B\sigma, E\sigma \times_\sigma X) \to \mathbf{hom}(B\sigma, B\sigma)$ l'analyse des points fixes homotopiques d'une action quelconque se ramène à celle d'une action triviale.

Venons-en à la question essentielle : Pourquoi peut-on dire des choses raisonnables sur les espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(B\sigma, -)$ alors que l'on sait si peu, par exemple, sur les espaces $\mathbf{hom}(S^n, -)$?

Ceci tient aux propriétés de la cohomologie modulo p de l'espace $B\sigma$, à la fois comme module et algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod modulo p, qui en font ce qu'on pourrait appeler un co-espace d'Eilenberg-Mac Lane.

1 Propriétés de $H^*(B\sigma; \mathbf{F}_p)$

Pour exprimer ces propriétés il nous faut introduire les analogues du bifoncteur $\mathbf{hom}(-, -)$ dans les catégories des modules et algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p.

Proceedings of the International Congress
of Mathematicians, Zürich, Switzerland 1994
© Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland 1995

On note :
- A l'algèbre de Steenrod modulo p ;
- $\mathcal{U}$ la catégorie des A-modules instables (pour $p = 2$, un A-module M est instable si $Sq^i x = 0$ quand i est strictement plus grand que le degré de x) ;
- $\mathcal{K}$ la catégorie des A-algèbres instables (la cohomologie modulo p d'un espace Y, notée H^*Y, est l'exemple type d'une telle algèbre).

Dans la catégorie des espaces (en fait ensembles simpliciaux) on définit le foncteur $Y \mapsto \mathbf{hom}(X, Y)$ comme l'adjoint à droite du foncteur $Z \mapsto X \times Z$:

$$\mathrm{Hom}(X \times Z, Y) = \mathrm{Hom}(Z, \mathbf{hom}(X, Y)).$$

Il n'est pas difficile de transposer cette définition dans les catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$. Soient $\mathcal{C}$ l'une de ces deux catégories et K un objet de $\mathcal{C}$, que l'on suppose de dimension finie en chaque degré, on montre sans peine que le foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $N \mapsto K \otimes N$ admet un adjoint à gauche, que l'on note $M \mapsto (M : K)_{\mathcal{C}}$ (et qu'il est raisonnable d'appeler la division par K dans la catégorie $\mathcal{C}$). On a donc par définition

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, K \otimes N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((M : K)_{\mathcal{C}}, N).$$

Supposons H^*X de dimension finie en chaque degré (rappelons que H^* est une abréviation pour $H^*(\,;\mathbf{F}_p)$). L'application d'évaluation

$$X \times \mathbf{hom}(X, Y) \to Y$$

induit en cohomologie modulo p un $\mathcal{K}$-morphisme naturel

$$H^*Y \to H^*X \otimes H^*\mathbf{hom}(X, Y)$$

qui donne par adjonction un $\mathcal{K}$-morphisme tout aussi naturel (une sorte d'homomorphisme d'Hurewicz)

$$h : (H^*Y : H^*X)_{\mathcal{K}} \to H^*\mathbf{hom}(X, Y).$$

La bonne surprise, comme nous le verrons au §2, est que h est "très souvent" un isomorphisme pour $X = B\sigma$. Mais n'anticipons pas et revenons à $H^*B\sigma$.

Nous notons T le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $M \mapsto (M : H^*B\sigma)_{\mathcal{U}}$; les propriétés de $H^*B\sigma$ qui nous intéressent peuvent s'exprimer de la façon suivante :

THÉORÈME 1.1.
(a) *Le foncteur T est exact.*
(b) *Le foncteur T commute aux produits tensoriels.*
(c) *Si M est une A-algèbre instable, alors TM possède une structure naturelle de A-algèbre instable et TM munie de cette structure coïncide avec $(M : H^*B\sigma)_{\mathcal{K}}$.*

Le point (a) concerne la structure de A-module instable de $H^*B\sigma$. Les points (b) et (c) concernent la structure de A-algèbre instable de $H^*B\sigma$; en particulier on utilise le produit de $H^*B\sigma$ pour définir la transformation naturelle $T(-\otimes-) \to T(-)\otimes T(-)$ dont le point (b), dans sa formulation précise, affirme que c'est un isomorphisme.

Plus généralement, soit V un p-groupe abélien élémentaire (c'est-à-dire un groupe isomorphe à σ^d pour un certain entier d) ; nous notons T_V le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $M \mapsto (M : H^*BV)_{\mathcal{U}}$. Comme H^*BV est isomorphe au produit tensoriel $H^*B\sigma \otimes H^*B\sigma \otimes \ldots \otimes H^*B\sigma$, d fois, le foncteur T_V est équivalent à la composition $T \circ T \circ \ldots \circ T$, d fois, et l'on peut dans le théorème 0.1 remplacer T par T_V :

THÉORÈME 1.2.
(a) *Le foncteur T_V est exact.*
(b) *Le foncteur T_V commute aux produits tensoriels.*
(c) *Si M est une A-algèbre instable, alors $T_V M$ possède une structure naturelle de A-algèbre instable et $T_V M$ munie de cette structure coïncide avec $(M : H^*BV)_{\mathcal{K}}$.*

Les propriétés des A-algèbres instables H^*BV que l'on exprime ainsi sont tout à fait exceptionnelles ; en fait ces algèbres sont "caractérisées" par les "restrictions en degré zéro" de (a) et (b).

Précisons un peu. Considérons une A-algèbre instable de dimension finie en chaque degré K et posons $V = (K^1)^*$, $(K^1)^*$ désignant le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel dual de K^1, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) Le $\mathcal{K}$-morphisme canonique $H^*BV \to K$ est un isomorphisme.
(ii) Le foncteur $M \mapsto t(M) = ((M : K)_{\mathcal{U}})^0$ est exact (en d'autres termes, le A-module instable sous-jacent à K est injectif) et commute aux produits tensoriels (i.e. la transformation naturelle $t(-\otimes-) \to t(-)\otimes t(-)$, induite par le produit de K, est un isomorphisme).

2 Conséquences homotopiques

Il existe plusieurs méthodes pour exploiter ces propriétés magiques de H^*BV. La plus facile à esquisser, que l'on doit à E. Dror Farjoun et à J. Smith [DS], procède de la façon suivante.

On considère d'abord la classe des espaces Y, que j'appellerai p-π_*-finis, tels que
- $\pi_0 Y$ est fini ;
  et pour tout choix du point base,
- $\pi_n Y$, $n \geq 1$, est un p-groupe fini ;
- $\pi_n Y$ est trivial pour $n >> 0$.

THÉORÈME 2.1. *Pour un espace p-π_*-fini Y l'application naturelle*

$$h_Y : T_V H^*Y \to H^*\mathbf{hom}(BV, Y)$$

est un isomorphisme.

Esquisse de démonstration. On peut supposer Y connexe. Dans ce cas il existe une suite finie de fibrations principales $Y_s \to Y_{s-1}$, $0 \leq s \leq r$, avec groupe structural $K(\mathbb{Z}/p, m_s)$ $(m_s \geq 1)$, Y_{-1} étant un point et Y_r ayant le type d'homotopie de Y. On démontre le théorème 2.1 en vérifiant de proche en proche que les h_{Y_s} sont des isomorphismes ; cette escalade s'effectue avec le matériel suivant :

LEMME 2.1.1. *L'application $h_{K(\mathbb{Z}/p,n)}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. En fait, pour tout espace X avec H^*X de dimension finie en chaque degré, on a un $\mathcal{K}$-isomorphisme

$$H^*\mathbf{hom}(X, K(\mathbb{Z}/p, n)) \cong (H^*K(\mathbb{Z}/p, n) : H^*X)_{\mathcal{K}}\,.$$

LEMME 2.1.2. *On considère une fibration $Z \to Y \to K(\mathbb{Z}/p, n)$; on suppose H^*Y et $H^*\mathbf{hom}(BV, Y)$ de dimension finie en chaque degré. Alors si h_Y est un isomorphisme, il en est de même pour h_Z.*

Indications sur la démonstration. Soient $E(1)$ et $E(2)$ les suites spectrales d'Eilenberg-Moore des fibrations $Z \to Y \to K(\mathbb{Z}/p, n)$ et $\mathbf{hom}(BV, Z) \to \mathbf{hom}(BV, Y) \to \mathbf{hom}(BV, K(\mathbb{Z}/p, n))$; $E(1)$ et $E(2)$ sont des suites spectrales de A-modules instables. On vérifie que le théorème 1.2 fournit un isomorphisme de suites spectrales $T_V E(1) \to E(2)$ compatible avec h_Z.

Spécialisons le theorème 2.1 en degré zéro. Le fait que h_Y soit en particulier un isomorphisme en degré zéro se traduit par l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2.2. *Pour un espace p-π_*-fini Y l'application naturelle*

$$[BV, Y] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*Y, H^*BV)$$

est une bijection (d'ensembles finis).

(La notation $[-,-]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie libre d'applications).

Voilà pour les espaces p-π_*-finis. On considère ensuite des tours d'espaces p-π_*-finis et on "passe à la limite".

Soit $\widehat{Y}$ le p-complété de Bousfield-Kan de Y. Quand H^*Y est de dimension finie en chaque degré (ce que nous supposerons toujours) $\widehat{Y}$ est la limite inverse d'une tour fonctorielle d'espaces p-π_*-finis (et coïncide à homotopie près avec le p-complété de Sullivan de Y). En passant à la limite respectivement dans les théorèmes 2.2 et 2.1, on obtient :

THÉORÈME 2.3. *Pour tout espace Y dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré, l'application naturelle*

$$[BV, \widehat{Y}] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*Y, H^*BV)$$

est une bijection (homéomorphisme d'ensembles profinis).

THÉORÈME 2.4. *Soit Y un espace dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré et nulle en degré un, alors l'application naturelle*

$$T_V H^*Y \to H^*\mathbf{hom}(BV, \widehat{Y})$$

est un isomorphisme de A-algèbres instables.

(L'existence des applications naturelles ci-dessus résulte par exemple de celle d'une application naturelle $H^*Y \to H^*\widehat{Y}$).

On peut remplacer $\widehat{Y}$ par Y dans 2.3 et 2.4 (et avoir ainsi des énoncés d'apparence moins technique) si l'on est prêt à faire des concessions sur le π_1 de Y, par exemple :

THÉORÈME 2.5. *Pour tout espace simplement connexe Y dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré, l'application naturelle*

$$[BV, Y] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*Y, H^*Y, H^*BV)$$

est une bijection.

THÉORÈME 2.6. *Soit Y un espace simplement connexe dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré. Si $T_V H^*Y$ est de dimension finie en chaque degré et nulle en degré un, alors l'application naturelle*

$$h_Y : T_V H^*Y \to H^*\mathbf{hom}(BV, Y)$$

est un isomorphisme de A-algèbres instables.

Enfin on obtient également le résultat suivant :

THÉORÈME 2.7. *Soient Y et Z deux espaces dont la cohomologie modulo p est de dimension finie en chaque degré ; soit ω une application $BV \times Z \to Y$ (on observera que se donner ω revient à se donner une application $Z \to \mathbf{hom}(BV, Y)$). Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'homomorphisme de A-algèbres instables $T_V H^*Y \to H^*Z$, adjoint de ω^* : $H^*Y \to H^*V \otimes H^*Z$, est un isomorphisme ;*

(ii) *l'application $\widehat{Z} \to \mathbf{hom}(BV, \widehat{Y})$ induite par ω est une équivalence d'homotopie.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) fournit une méthode pour déterminer le type d'homotopie de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(BV, Y)$, à des problèmes de p-complétion près, quand on a un candidat Z pour celui-ci : il suffit de vérifier la condition algébrique (i). En particulier on obtient ainsi une preuve de la conjecture de Sullivan sur les points fixes homotopiques.

3 Quelques utilisations en théorie de l'homotopie

Pour terminer, nous citons quelques travaux dans lequel la théorie précédente intervient plus ou moins directement.

3.1. Soient π un p-groupe fini et X un espace muni d'une action de π. Considérons une suite exacte $1 \to \kappa \to \pi \to \sigma \to 1$; les espaces de points fixes homotopiques satisfont, à homotopie près, le même type de formule que les espaces de points fixes ordinaires :

$$X^{h\pi} \cong (X^{h\kappa})^{h\sigma}.$$

On peut donc obtenir par récurrence des informations sur l'espace des points fixes homotopiques d'une action d'un p-groupe fini π à partir du cas $\pi = \sigma$.

D. Dwyer et A. Zabrodsky ont déterminé ainsi le type d'homotopie de l'espace $\mathbf{hom}(B\pi, BG)$ des applications entre classifiants d'un p-groupe fini et d'un groupe de Lie compact [DZ]. Ils obtiennent en particulier :

THÉORÈME 3.1.1. *Pour tout p-groupe fini π et tout groupe de Lie compact G, l'application naturelle*

$$\mathrm{Rep}(\pi, G) \to [B\pi, BG]$$

est une bijection.

(La notation $\mathrm{Rep}(\pi, G)$ désigne l'ensemble des représentations de π dans G, c'est-à-dire des homomorphismes modulo conjugaison dans G.)

D. Notbohm a montré ensuite que l'on pouvait remplacer dans la théorie de Dwyer-Zabrodsky le p-groupe fini π par un groupe p-toral, c'est-à-dire une extension d'un tore par un p-groupe fini, en passant cette fois à la limite à la source [No1]. En particulier :

THÉORÈME 3.1.2. *Pour tout groupe p-toral P et tout groupe de Lie compact G, l'application naturelle*

$$\mathrm{Rep}(\pi, G) \to [B\pi, BG]$$

est une bijection.

Idée de la démonstration. Expliquons brièvement comment montrer que l'application naturelle $\mathrm{Rep}(S^1, G) \to [BS^1, BG]$ est une bijection ; on suppose, pour simplifier, que G est connexe (ce qui équivaut à supposer que BG est simplement connexe). Comme l'algèbre $H^*(BG; \mathbb{Q})$ est polynômiale, engendrée par des générateurs (de degré pair) en nombre fini, la théorie de Sullivan [Su] permet de ramener sans trop de difficultés la détermination de l'ensemble $[BS^1, BG]$ à celle des ensembles $[BS^1, (BG)^\wedge_p]$, p premier (p étant variable, le p-complété de BG est ici noté $(BG)^\wedge_p$). Soit Π le sous-groupe de S^1 formé des éléments d'ordre une puissance de p ; on a donc $\Pi \cong \mathrm{colim}\{\mathbb{Z}/p^n; n \in \mathbb{N}\}$. Comme l'application canonique $B\Pi \to BS^1$ induit un isomorphisme en homologie modulo p, elle induit également une bijection $[B\Pi, (BG)^\wedge_p] \cong [BS^1, (BG)^\wedge_p]$. On se convainc alors que l'on a la suite de bijections suivante :

$$\begin{aligned}[B\pi, (BG)^\wedge_p] &\cong \lim\{[B(\mathbb{Z}/p^n), (BG)^\wedge_p; n \in \mathbb{N}\} \\ &\cong \lim\{\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}/p^n, G)\ ; n \in \mathbb{N}\} \cong \mathrm{Rep}(\Pi, G).\end{aligned}$$

3.2. Le travail de S. Jackowski, J. McClure et R. Oliver [JMO] dont nous allons parler à présent, n'est relié à la théorie des espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(B\sigma, -)$ que par l'intermédiaire de celui de Dwyer-Zabrodsky évoqué ci-dessus.

Soit G un groupe de Lie compact. Jackowski, McClure et Oliver montrent d'abord que BG peut être vu, à homotopie et p-complétion près, comme la limite directe homotopique d'un diagramme de classifiants de sous-groupes p-toraux (et donc finalement de p-sous-groupes finis).
Le cas facile est celui où p ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl de G. On a alors une équivalence d'homotopie :

$$(BG)^\wedge \cong (EW \times_W BT)^\wedge ,$$

T désignant "le" tore maximal de G et W son groupe de Weyl. Le cas où p divise l'ordre de W est beaucoup plus subtil et son analyse est la contribution principale de [JMO].

Ils sont alors en mesure d'étudier certains espaces fonctionnels dont la source est BG. Par exemple, ils déterminent complètement le monoïde $[BG, BG]$ pour G un groupe de Lie compact connexe simple. Ce monoïde est fait des automorphismes extérieurs de G et des "applications d'Adams instables" ψ^k, k premier à l'ordre de W ; ψ^k est caractérisée, à homotopie près, par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} BG & \xrightarrow{\psi^k} & BG \\ \uparrow & & \uparrow \\ BT & \xrightarrow{Bk} & BT , \end{array}$$

k désignant, dans la notation Bk qui apparaît ci-dessus, l'endomorphisme multiplication par k du groupe abélien T.

3.3. La théorie des espaces $\mathbf{hom}(BV, -)$ est l'un des ingrédients utilisés pour montrer que le type d'homotopie de la p-complétion du classifiant de certains groupes de Lie compact est uniquement déterminé par sa cohomologie modulo p [DMW1][DMW2]. Voir aussi [No2].

3.4. W. Dwyer et C. Wilkerson montrent dans [DW1] que le foncteur T satisfait une "Théorie de Smith algébrique" (voir aussi le travail de S. Zarati et de l'auteur [LZ]). Ils en déduisent dans [DW2] des théorèmes de points fixes homotopiques analogues aux théorèmes de points fixes classiques. Par exemple :

THÉORÈME 3.4. *Soit X un espace muni d'une action de σ. On fait les hypothèses suivantes :*
- *l'homologie $H_*(X; \mathbf{F}_p)$ est finie ;*
- *les espaces X et $X^{h\sigma}$ sont p-complets.*

Alors $H_*(X^{h\sigma}; \mathbf{F}_p)$ est finie et l'on a la congruence

$$\chi(X^{h\sigma}) \equiv \chi(X) \mod p ,$$

$\chi(-)$ désignant la caractéristique d'Euler du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué fini $H_*(-; \mathbf{F}_p)$.

(Un espace X est dit p-complet si l'application canonique $X \to \widehat{X}$ est une équivalence d'homotopie.)

Ils utilisent alors ces théorèmes de points fixes homotopiques pour montrer que les espaces de lacets dont l'homologie modulo p est finie, partagent une grande partie de la riche structure interne des groupes de Lie : tores maximaux, groupes de Weyl ... (la référence est toujours [DW2]).

References

[DMW1] W. G. Dwyer, H. R. Miller and C. W. Wilkerson, *The homotopic uniqueness of BS^3*, Algebraic topology, Barcelona 1986 (proceedings), Springer LNM **1298** (1987), 90–105.

[DMW2] W. G. Dwyer, H. R. Miller and C. W. Wilkerson, *Homotopic uniqueness of classifying spaces*, Topology **31** (1992), 29–45.

[DS] E. Dror Farjoun and J. Smith, *A geometric interpretation of Lannes' functor T*, Théorie de l'homotopie, Astérisque **191** (1990), 87–95.

[DW1] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, *Smith theory and the functor T*, Comm. Math. Helv. **66** (1991), 1–17.

[DW2] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, *Homotopy fixed points methods for Lie groups and finite loop spaces*, Annals of Math. **139** (1994), 395–442.

[DZ] W. G. Dwyer and A. Zabrodsky, *Maps between classifying spaces*, Algebraic Topology, Barcelona 1986 (proceedings), Springer LNM **1298** (1987), 106–119.

[JMO] S. Jackowski, J. E. McClure and R. Oliver, *Self-maps of classifying spaces of compact simple Lie groups*, Annals of Math. **135** (1992), 183–270.

[La1] J. Lannes, *Sur la cohomologie modulo p-groupes abéliens élémentaires*, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory 1985, London Math. Soc. LNS **117**, Cambridge Univ. Press 1987, 97–116.

[La2] J. Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire*, Publ. Math. I.H.E.S. **75** (1992), 135–244.

[Mi] H. R. Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Annals of Math. **120** (1984), and corrigendum, Annals of Math. **121** (1985), 605–609.

[LZ] J. Lannes et S. Zarati, *Théorie de Smith algébrique et classification des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs*, Bulletin de la S.M.F. **123** (1995), 189–223.

[No1] D. Notbohm, *Abbildungen zwischen klassifizierenden Räumen*, Dissertation, Göttingen (1988).

[No2] D. Notbohm, *Homotopy uniqueness of classifying spaces of connected Lie groups at primes dividing the order of the Weyl group*, Topology **33** (1994), 271–330.

[Su] D. Sullivan, *Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture*, Annals of Math. **100** (1974), 1–79.