Sur les Formes Automorphes de Carré Intégrable

Colette Mœglin

URA 748, UFR de Mathématiques, Université de Paris VII, 2, place de Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05, France

1. Définitions et notations

Soit k un corps global, pour simplifier de caractéristique 0, i.e. une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$. On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k c'est-à-dire la k-algèbre formée des éléments $\prod_v x_v$ où v parcourt l'ensemble des places de k et où x_v est un élément du complété k_v de k en la place v, entier pour tout v sauf un nombre fini.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique affine connexe, défini sur k que l'on suppose réductif. Les exemples classiques s'obtiennent en considérant un espace vectoriel de dimension finie V défini sur k et une forme bilinéaire Φ sur V (définie sur k); on prend alors pour $\mathbf{G}$ le groupe des automorphismes linéaires de V qui respectent Φ. Pour toute k-algèbre, k', on note $\mathbf{G}(k')$ les points de $\mathbf{G}$ définis sur k'.

On appelle forme automorphe sur $\mathbf{G}$, une fonction ϕ à valeurs complexes sur $\mathbf{G}(k)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})$ qui vérifie un certain nombre de propriétés pour lesquelles je renvoie à [3]. On appelle forme automorphe de carré intégrable modulo le centre, une forme automorphe, ϕ, pour laquelle il existe un caractère unitaire ω du centre $\mathbf{Z}(\mathbb{A})$ de $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ tel que:

$$(i) \quad \phi(zg) = \omega(z)\phi(g), \qquad \forall z \in \mathbb{Z}(\mathbb{A}), \quad \forall g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}),$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbf{G}(k)\mathbf{Z}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})} \phi(g)\overline{\phi}(g)\, dg < \infty,$$

où dg est une mesure de Haar sur $\mathbf{G}(k)\mathbf{Z}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})$.

Dans cet exposé, on s'intéresse à la détermination des formes automorphes de carré intégrable. L'article de base pour cette question est [5] (cf. aussi [8]).

On appelle sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$, un sous-groupe fermé $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{G}(\bar{k})/\mathbf{P}(\bar{k})$ soit une variété projective ($\bar{k}$ est une clôture algébrique de k). Ces groupes sont (comme $\mathbf{G}$) connexes et jouent un rôle privilégié dans la théorie. Si $\mathbf{P} \neq \mathbf{G}$, $\mathbf{P}$ n'est plus un groupe réductif mais comme tout groupe algébrique affine connexe, il contient un unique sous-groupe fermé normal, noté ${}^u\mathbf{P}$ tel que $\mathbf{P}/{}^u\mathbf{P}$ soit réductif et ${}^u\mathbf{P}$ est minimal avec cette propriété. On pose

$$\mathbf{M}_P := \mathbf{P}/{}^u\mathbf{P}.$$

On note X_P le groupe des caractères de $\mathbf{M}_P(\mathbb{A})$, à valeurs complexes, engendré par les caractères du type $|\chi|^s$ où $|\,|$ est la valeur absolue adélique, où χ est

Proceedings of the International Congress
of Mathematicians, Kyoto, Japan, 1990
© The Mathematical Society of Japan, 1991

un caractère rationnel de $\mathbf{M}_P$ et où s est un nombre complexe. Tout caractère appartenant à X_P est évidemment trivial sur $\mathbf{M}_P(k)$. On vérifie que X_P est un espace vectoriel.

Par exemple si $\mathbf{G} = \mathrm{Aut}(V, \Phi)$ avec $\Phi \equiv 0$, i.e. $\mathbf{G} \simeq \mathrm{GL}(V)$ alors les sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ sont les stabilisateurs des drapeaux:

$$V_0 = 0 \subset V_1 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_d = V$$

de V. Ici $\mathbf{M}_P \simeq \prod_{1 \leq i \leq d} \mathrm{GL}(V_i/V_{i-1})$ et $X_P \simeq \mathbb{C}^d$ isomorphisme donné par l'application qui à $(z_1, \cdots, z_d) \in \mathbb{C}^d$ associe le caractère $\chi\big((m_1, \cdots, m_d)\big) = |\det m_1|^{z_1} \cdots |\det m_d|^{z_d}$.

Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$; on généralise la notion de formes automorphes en notant $A\big(\mathbf{P}(k)\,{}^u\mathbf{P}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})\big)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes sur ce quotient qui vérifient les mêmes propriétés que les formes automorphes. En fait pour tout $\phi \in A\big(\mathbf{P}(k)\,{}^u\mathbf{P}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})\big)$ et pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A})$ la fonction ϕ_g sur $\mathbf{M}_P(\mathbb{A})$ définie par:

$$\phi_g(m) = \phi(mg)\delta_P(m)^{-1/2}$$

est une forme automorphe pour $\mathbf{M}_P$ ($\delta_P(m)$ est le Jacobien de l'automorphisme de ${}^u\mathbf{P}(\mathbb{A})$ qui envoit $u \in {}^u\mathbf{P}(\mathbb{A})$ sur mum^{-1}.

On aurra aussi besoin de la notion de formes automorphes cuspidales; soit ϕ comme ci-dessus, on demande en plus que l'on ait pour tout sous-groupe parabolique propre $\mathbf{P}'$ de $\mathbf{M}_P$:

$$\forall g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}), \quad \int_{{}^u\mathbf{P}'(k)\backslash{}^u\mathbf{P}'(\mathbb{A})} \phi(ug)\,du = 0.$$

Cela revient à dire que la représentation de $\mathbf{M}_P(\mathbb{A})$ engendrée par ϕ_g (aux places à l'infini, c'est un $\mathfrak{g} - K$ module) est une représentation automorphe cuspidale.

2. Séries d'Eisenstein

Les séries d'Eisenstein fournisse un procédé pour transformer un élément $\phi \in A\big(\mathbf{P}(k)\,{}^u\mathbf{P}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})\big)$ en une famille, $E(\phi, \lambda)$ de formes automorphes dépendant méromorphiquement de $\lambda \in X_P$. Toutefois l'existence de $E(\phi, \lambda)$ n'a de démonstration écrite que si ϕ est de carrée intégrable modulo le centre (cf. [5], Chapitre 6 et 7) (Le résultat général est annoncé par Bernstein et dans le cas, que nous ne considérons pas d'un corps global de caractéristique > 0, résulte de résultats de [11] et [15]).

Dans ce qui suit, on suppose que $\phi \in A\big(\mathbf{P}(k)\,{}^u\mathbf{P}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A})\big)$ vérifie la condition (i) ci-dessus (i.e. à un caractère central unitaire) pour l'action du centre de $\mathbf{M}_P(\mathbb{A})$ et est cuspidale. Alors ϕ est de carré intégrable modulo le centre de $\mathbf{M}_P(\mathbb{A})$. On sait que les pôles de $E(\phi, \lambda)$ sont de nature très simple: soit $\lambda_0 \in X_P$, alors il existe un ensemble fini E d'hyperplans de X_P passant par λ_0 et pour chacun de ces hyperplans $H \in E$ un entier n_H (E et n_H peuvent être choisi indépendamment de ϕ) tels que:

$$\prod_{H \in E} P_H^{n_H} E(\phi, \lambda)$$

soit holomorphe en λ_0 où P_H est l'équation de l'hyperplan H. On peut définir les résidus successsifs de $E(\phi, \lambda)$ le long d'un ensemble fini ordonné, E', d'hyperplans linéairement indépendants. On obtient une famille de formes automophes sur $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ dépendant méromorphiquement de λ appartenant à $\cap_{H \in E'} H$.

Nature des pôles des Séries d'Eisenstein

Admettons que l'on sache normaliser les opérateurs d'entrelacements (cf. [5], appendice 2 et [14]); on sait en particulier le faire si $\mathbf{G} \simeq \mathrm{GL}(V)$. Les pôles des séries d'Eisenstein sont alors de 3 types différents:

- le premier type est de nature locale, il correspond aux pôles des opérateurs d'entrelacements normalisés locaux;
- les deux autres types sont de nature globale: les facteurs de normalisations des opérateurs d'entrelacemetns sont des quotients de fonctions L. Le deuxième type correspond aux zéros des fonctions L qui apparaissent aux dénominateurs et le troisième type correspond aux pôles des fonctions L qui apparaissent aux numérateurs.

Forme faible des résultats de Langlands

Théorème (Langlands). *Toute forme automorphe de carré intégrable modulo le centre est un résidu de séries d'Eisenstein.*

En fait la théorie de Langlands [5] donne beaucoup plus de renseignements puisque elle limite très sérieusement les hyperplans qui peuvent fournir des résidus de carré intégrable.

Conjecture. *Soient $\phi, \lambda, E(\phi, \lambda)$ comme ci-dessus. Les seuls hyperplans singuliers pour $E(\phi, \lambda)$ qui peuvent fournir des résidus de carré intégrable sont les hyperplans singuliers provenant des pôles des fonctions L des numérateurs des facteurs de normalisations.*

3. Le cas de GL(V)

La conjecture est vraie et on démontre alors aisément le théorème suivant (cf. [9], conjecturé et démontré dans des cas particulier par Jacquet [4] (la partie (i) avait été obtenue par Speh [13]):

Théorème. *Soit V un espace vectoriel de dimension n sur k; on suppose que $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(V)$.*

(i) Soit $n = da$ une décomposition de n et soit

$$V_0 = 0 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_a = V$$

un drapeau tel que $\dim V_i = id$, *pour* $0 \leq i \leq a$. *On note* $\mathbf{P}$ *le stabilisateur de ce drapeau et alors* $\mathbf{M}_P \simeq \prod_{1 \leq i \leq a} \mathrm{GL}(d)$. *Soit* $\phi \in A(\mathbf{P}(k)^u\mathbf{P}(\mathbb{A})\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}))$ *telle que pour tout* $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A})$ *la représentation automorphe de* $\mathbf{M}_P(\mathbb{A})$ *engendrée par* ϕ_g *soit*

irréductible isomorphe à $\varrho\otimes\cdots\otimes\varrho$ *où* ϱ *est une représentation automorphe cuspidale fixée de* $\mathrm{GL}(d)(\mathbb{A})$ *de caractère central unitaire. On rappelle que* $X_P \simeq \mathbb{C}^a$. *Alors l'ensemble des hyperplans siuguliers pour* $E(\phi,\lambda)$ *passant par le point:*

$$(a-1)/2,\ldots,(a-2i+1)/2,\ldots,-(a-1)/2$$

est l'ensemble des hyperplans $s_i - s_{i-1} = 1$ *pour* $1 \leq i \leq a$. *Le résidu obtenu successivement le long de ces hyperplans rangés dans n'importe quel ordre (l'ordre est indifférent) est une forme automorphe sur* $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ *de carré intégrable modulo le centre.*

(ii) Toutes les formes automorphes de carré intégrable modulo le centre sont obtenues de cette façon.

Sur la preuve. (i) C'est un problème combinatoire peu profond (déjà résolu dans l'appendice 3 de [5] pour $n = 4$) que de montrer que les zéros des fonctions L des dénominateurs des facteurs de normalisations n'interviennent pas.

(ii) C'est un problème de décomposition de certaines induites (du moins il faut calculer leurs quotients irréductibles) qui permet de régler le cas des pôles des opérateurs d'entrelacements locaux.

4. Interprétation d'Arthur

Dans [6] Langlands suggère que les classes d'isomorphie de représentations automorphes tempérées se regroupent en paquets qui devraient être paramétrés par les classes de conjugaison d'homomorphismes "admissibles" d'un groupe (dont l'existence devrait provenir de la théorie des catégories tanakiennes), noté L_F, dans le L-groupe associé à G. Admettant cela, Arthur suggère que les classes d'isomorphie de représentations automorphes de carré intégrable se regroupent en paquets que devraient être paramétrés par les classes de conjugaison d'homomorphismes "admissibles" du produit direct de L_F par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe. Arthur donne aussi une paramétrisation (conjecturale) des représentations intervenant dans un paquet donné ainsi que de la multiplicité avec laquelle elles devraient intervenir.

En admettant la conjecture de Ramanujan, i.e. que l'ensemble des formes automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}(n)$, de caractère central unitaire, est exactement l'ensemble des formes automorphes tempérées, le résultat cité pour $\mathrm{GL}(n)$ prouve les conjectures d'Arthur dans ce cas (chaque paquet est ici réduit à un élément et la multiplicité est un).

Un cas particulier intéressant des conjectures d'Arthur est de considérer les homomorphismes "admissibles" triviaux sur L_F. Les paquets qu'ils devraient paramétriser sont appelés, par Arthur, unipotents. Supposons pour simplifier grandement que $\mathbf{G}$ est un groupe classique déployé. L'ensemble des paquets unipotents devrait alors être en bijection avec l'ensemble des orbites unipotentes du groupe complexe dual, G^*, associé à $\mathbf{G}$ (i.e. la composante neutre du L-groupe) ne rencontrant aucun sous-groupe de Levi propre de G^*. La méthode employée pour $\mathrm{GL}(n)$ devrait conduire aisément au résultat suivant:

soit $\mathbf{G}$ *un groupe classique déployé de centre fini; alors les résidus de carré intégrable des séries d'Eisenstein construites à partir des caractères non ramifiés d'un sous-groupe de Borel de* $\mathbf{G}$ *doivent réaliser avec multiplicité un les*

représentations automorphes de carré intégrable de $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ *paramétrées par les orbites unipotentes, O, de* G^* *ne rencontrant aucun sous-groupe de Levi propre de* G^* *et par les produits,*

$$\prod_v \chi_v,$$

indéxés par l'ensemble des places de k, de caractères du groupe, $\overline{A}(O)$*, introduit par Lusztig ([7], chapitre 14, où il est noté* $\overline{A}(u)$*), vérifiant:*

pour presque tout v, χ_v *est le caractère identité et le caractère de* $\overline{A}(O)$ *que l'on obtient en faisant le produit de tous les* χ_v *est le caractère identité.*

Pour un résultat dans ce sens, confer [10]. Ce qui me manque pour obtenir toutes les représentations d'un paquet unipotent est une construction générale des représentations automorphes cuspidales unipotentes; les séries theta en fournissent dans certains cas (cf. [12]).

Bibliographie

1. Arthur, J.: Unipotent automorphic representations: conjectures, in Orbites unipotentes et représentations II. Groupes p-adiques et réels. Astérisque **171-172** (1989) 13–72
2. Arthur, J.: Unipotent automorphic representations: global motivations. In: automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, vol. 1 (L. Clozel et J.S. Milne, eds.). Perspectives in Mathematics, 1990, pp. 1–75
3. Borel, A., Jacquet, H.: Automorphic forms and automorphic representaions. In: Proc. of Symp. in Pure Math., vol. 33, vol. 1. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, pp. 189–202
4. Jacquet, H.: On the residual spectrum of GL(n). In: Lie Group Representations II. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1041 (édité par R. Herb, S. Kudla, R. Lipsmann and J. Rosenberg.)) Springer, Berlin Heidelberg New York 1984, pp. 185–208
5. Langlands, R.P.: On the functional equations satisfied by Eisenstein series. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 544.) Springer, Berlin Heidelberg New York 1976
6. Langlands, R.P.: Automorphic representations, Shimura varieties and motives – ein Märchen. In: Proc. of Symp. in Pure Math., vol. 33, vol. 2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, pp. 205–246
7. Lusztig, G.: Characters of reductive groups over a finite field. Ann. Math. Studies, vol. 107. Princeton Univ. Press, 1984
8. Mœglin, C., Waldspurger, J.-L.: Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein, paraphrase sur l'Ecriture. Prépublication, Paris 1989
9. Mœglin, C., Waldspurger, J.-L.: Le spectre résiduel de GL(n). Ann. de l'ENS, 1989
10. Mœglin, C.: Orbites unipotentes et spectre discret non ramifié, à paraitre à Compositio
11. Morris, L.E.: Eisenstein series for reductive groups over global function fields 1 et 2. Can. J. Math. **34** (1982) 1112–1182 et Can. J. Math. **35** (1983) 974–985
12. Piatetski-Shapiro, I.: On the Saito Kurokawa lifting. Math. inv. **71** (1983) 309–338
13. Speh, B.: Some results on principal series for GL(n, **R**). Ph. D. dissertation M.I.T., Juin 1977
14. Shahidi, F.: A proof of Langlands conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups. Ann. Math., à paraitre
15. Waldspurger, J.-L.: Formes automorphes et series d'Eisenstein sur un corps de fonctions. Prépublication, Paris 1989