Fonctions L p-adiques

BERNADETTE PERRIN-RIOU

Université Paris-Sud
Bât. 425, F-91405 Orsay Cedex, France

Ce qui suit est une présentation d'un travail que l'on peut trouver dans [P92], [P93], [P94], [Pa], [Pb]. Le but principal est d'attacher à toute représentation p-adique galoisienne V:

- un module de fonctions L p-adiques défini par utilisation de cohomologie galoisienne non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places et de la théorie de Fontaine;
- une fonction L p-adique lorsque V est la réalisation p-adique d'un motif M par interpolation des valeurs de la fonction L de M (conjecturalement);

et de les relier (conjecturalement encore).
Nous insistons ici sur l'étude locale préliminaire dans laquelle une sorte de logarithme étendu aux modules d'Iwasawa locaux est défini et nous en tirons au passage quelques conséquences sur la continuité des logarithmes de Bloch-Kato.

On fixe un nombre premier p impair. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}_p$) de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}_p$) et un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Si K est une extension de $\mathbb{Q}$ (resp. de $\mathbb{Q}_p$) contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}$ (resp. dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$), on note G_K le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}_p$) sur K. Si M est un G_K-module topologique, on note $H^1(K, M) = H^1(G_K, M)$ les groupes de cohomologie continue.

1. Etude locale

1.1. Exponentielle et logarithme de Bloch-Kato.

1.1.1. Soit V une représentation p-adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$, c'est-à-dire un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie d muni d'une action linéaire et continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$, que l'on suppose cristalline; on note $\mathbf{D}_p(V)$ le φ-module filtré associé par la théorie de Fontaine: c'est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de même dimension que V, muni d'un endomorphisme bijectif φ et d'une filtration $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{D}_p(V)$ décroissante, exhaustive et séparée: ainsi, $\mathbf{D}_p(V) = (B_{cris} \otimes V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ (pour la définition des anneaux B_{cris}, B_{dR}, A_{cris}, voir [Bu]).

Proceedings of the International Congress
of Mathematicians, Zürich, Switzerland 1994
© Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland 1995

1.1.2. EXEMPLES. (i) Si $\mathbb{Z}_p(1)$ est le module de Tate associé aux racines de l'unité d'ordre une puissance de p et $V = \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p(1)$, $\mathbf{D}_p(V)$ est $\mathbb{Q}_p$, φ agit par multiplication par p^{-1}, la filtration est donnée par $\mathrm{Fil}^{-1}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$, $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$. On note $\mathbb{Q}_p(k) = \mathbb{Q}_p(1)^{\otimes k}$ si $k > 0$, $= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p(-k), \mathbb{Q}_p)$ si $k < 0$. Si χ est le caractère cyclotomique, l'action de Galois sur $\mathbb{Q}_p(k)$ est donc donnée par χ^k.

(ii) Si V est la représentation p-adique associée à une variété abélienne de dimension g définie sur $\mathbb{Q}_p$ et ayant bonne réduction, $\mathbf{D}_p(V)$ est essentiellement son module covariant de Dieudonné. La filtration est donnée par $\mathrm{Fil}^{-1}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$, $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ de dimension g, $\mathrm{Fil}^1\mathbf{D}_p(V) = 0$.

(iii) Si X est une variété projective lisse définie sur $\mathbb{Q}_p$, $V = \mathbb{Q}_p \otimes H^i_{\text{ét}}(X)$.

(iv) Si V est une représentation p-adique, on pose $V(k) = V \otimes \mathbb{Q}_p(k)$. On identifie dans ce texte les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathbf{D}_p(V(k))$, la lettre φ désignant alors l'endomorphisme de $\mathbf{D}_p(V)$.

1.1.3. On a la suite exacte de $G_{\mathbb{Q}_p}$-modules

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{cris} \to B_{cris} \oplus B_{dR}/\mathrm{Fil}^0 B_{dR} \to 0 \tag{1}$$

où la seconde application est donnée par $b \mapsto ((1-\varphi)b, b \bmod \mathrm{Fil}^0 B_{dR})$. De plus, cette suite exacte est scindée en tant que suite exacte d'applications continues. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. En tensorisant la suite (1) par V et en prenant la suite exacte de cohomologie, on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(K,V) \to \mathbf{D}_p(V)_{K_0} \quad &\to \quad \mathbf{D}_p(V)_{K_0} \oplus t_V(K) \\ &\to \quad H^1(K,V) \to H^1(K, B_{cris} \otimes V) \end{aligned} \tag{2}$$

où K_0 est la plus grande extension de $\mathbb{Q}_p$ non ramifiée contenue dans K et $\mathbf{D}_p(V)_{K_0} = K_0 \otimes \mathbf{D}_p(V)$, où le K-espace vectoriel $t_V(K) = ((B_{dR}/\mathrm{Fil}^0 B_{dR}) \otimes V)^{G_K} = K \otimes t_V$ avec $t_V = \mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ est appelé espace tangent de V sur K ; $\mathbf{D}_p(V)_{K_0} \to \mathbf{D}_p(V)_{K_0} \oplus t_V(K)$ est donnée par $x \mapsto ((1-\varphi)x, x \bmod \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V))$. Bloch et Kato ont noté $H^1_f(K,V)$ le noyau de $H^1(K,V) \to H^1(K, B_{cris} \otimes V)$. La suite exacte (2) devient:

$$0 \to H^0(K,V) \to \mathbf{D}_p(V)_{K_0} \to \mathbf{D}_p(V)_{K_0} \oplus t_V(K) \to H^1_f(K,V) \to 0\,. \tag{3}$$

On appelle exponentielle de Bloch-Kato l'application $t_V(K) \to H^1_f(K,V)$ qui s'en déduit et on la note $\exp_{V,K}$. Lorsque $\mathbf{D}_p(V)_{K_0}^{\varphi=1}$ est nul, cette application est bijective, on note alors $\log_{V,K}$ l'application réciproque.

1.1.4. EXEMPLES. (i) On a $\varphi = 1$ sur $\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p)$, si K^{nr} est la plus grande extension non ramifiée de K, on a $H^1_f(K,\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Gal}(K^{nr}/K), \mathbb{Q}_p)$. On a $t_{\mathbb{Q}_p(1)}(K) = K$, $H^1_f(K, \mathbb{Q}_p(1)) = \mathbb{Q}_p \otimes U_K$ où U_K est le groupe des unités de K, l'exponentielle est l'exponentielle p-adique classique.

(ii) Si V est attachée à une variété abélienne A ayant bonne réduction en p, $H^1_f(K,V)$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{Q}_p \otimes A(K)$ par la théorie de Kummer sur la variété abélienne, l'espace tangent t_V est l'espace tangent usuel et $\exp_{V,K}$ l'application exponentielle classique.

(iii) Supposons que $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$ et que p^{-1} n'est pas valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_p(V)_{K_0}$. Alors, l'application $\log_{V,K}$ est un isomorphisme de $H^1(K,V) = H^1_f(K,V)$ sur $K \otimes \mathbf{D}_p(V)$.

1.1.5. Le cup-produit induit une dualité $H^1(K,V) \times H^1(K,V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$ où $V^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V,\mathbb{Q}_p(1))$.[1] Bloch et Kato ont montré que le sous-espace vectoriel $H^1_f(K,V)$ est l'orthogonal de $H^1_f(K,V^*(1))$. D'autre part, dans la dualité naturelle $\mathbf{D}_p(V) \times \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$, le sous-espace $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ est l'orthogonal de $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V^*(1))$. La transposée de $t_{V^*(1)}(K) \to H^1_f(K,V^*(1))$ pour cette dualité donne une application $\lambda_V = \lambda_{V,K}$: $H^1(K,V)/H^1_f(K,V) \to K \otimes \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$.

1.2. Quelques problèmes. On note T un réseau de V stable par $G_{\mathbb{Q}_p}$ et M un réseau de $\mathbf{D}_p(V)$ que l'on munit de la filtration induite.

1.2.1. *Problème A.* Les constructions qui ont été décrites pour V ont bien sûr un sens pour $V(k) = V \otimes \mathbb{Q}_p(k)$ pour tout entier k. Remarquons que pour $k \gg 0$, par exemple $k > k_0$, $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V(k)) = 0$. On peut se poser le problème de la continuité de $\log_{V(k),\mathbb{Q}_p}$ en fonction de k de la manière suivante: On pose $T(k) = T\otimes\mathbb{Z}_p(k)$. Prenons deux entiers $k > k_0$ et $k' > k_0$ congrus modulo $(p-1)p^n$. Disons que $x \in H^1(\mathbb{Q}_p,T(k))$ et $x \in H^1(\mathbb{Q}_p,T(k'))$ sont congrus modulo p^{n+1} si leurs images respectives dans $H^1(\mathbb{Q}_p,T(k)/p^{n+1}T(k))$ et dans $H^1(\mathbb{Q}_p,T(k')/p^{n+1}T(k'))$ se correspondent par l'isomorphisme naturel $T(k)/p^{n+1}T(k) \cong T(k')/p^{n+1}T(k')$. La question est alors: si x et x' comme ci-dessus sont congrus modulo p^{n+1}, que peut-on dire de $\log_{V(k),\mathbb{Q}_p}(x)$ et de $\log_{V(k'),\mathbb{Q}_p}(x')$?

1.2.2. *Problème B.* Soit ω un élément non nul de $det_{\mathbb{Q}_p}t_V(K)$; on introduit un nombre $Tam_{\omega,K}(T)$ défini de la manière suivante:

$$\text{si} \quad det_{\mathbb{Q}_p}t_V(K) \cong det_{\mathbb{Q}_p}H^1_f(K,V) \otimes (det_{\mathbb{Q}_p}H^0(K,V))^*$$

est l'isomorphisme (défini au signe près) déduit de la suite exacte (3), $Tam_{\omega,K}(T)$ est l'élément de $p^{\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$Tam_{\omega,K}(T)^{-1}\omega\mathbb{Z}_p = det_{\mathbb{Z}_p}H^1_f(K,T) \otimes (det_{\mathbb{Z}_p}H^0(K,T))^* \ .$$

Ainsi, lorsque 1 n'est pas valeur propre de φ et si $L_p(V,1) = det(1-\varphi|\mathbf{D}_p(V))^{-1}$, $L_p(V,1)^{-1}Tam_{\omega,K}(T)$ est, à une unité près, le déterminant de

$$\exp_{V,K} : t_V(K) \to H^1_f(K,V)$$

dans la base ω et dans une base du $\mathbb{Z}_p$-module $det_{\mathbb{Z}_p}H^1_f(K,T)$.

Que peut-on dire de ces nombres et de l'image de $H^1_f(K,T)$ dans $K\otimes\mathbf{D}_p(V)$ lorsque K varie le long de l'extension cyclotomique ? Que peut-on dire par exemple de $Tam_{\omega,K}(T)/Tam_{\omega',K}(T^*(1))$?

Donnons tout de suite une réponse conjecturale à cette dernière question (celle-ci s'étend au cas où V est semi-stable à condition d'introduire les facteurs ϵ de V). Posons $h_i(V) = dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^{i+1}\mathbf{D}_p(V)$ et $t_H(V) = \sum_i ih_i(V)$. Notons e_T une base du $\mathbb{Z}_p$-module (de rang 1) $(t^{t_H(V)}A_{cris} \otimes det_{\mathbb{Z}_p}T)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ où t est

[1] Si W est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, on pose $W^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(W,\mathbb{Q}_p)$, si U est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, on pose $U^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(U,\mathbb{Z}_p)$; si ω est une base, on note ω^{-1} la base duale.

un générateur de l'image de $\mathbb{Z}_p(1)$ dans B_{cris}. Posons $\Gamma^*(j) = (j-1)!$ si $j > 0$ et $\Gamma^*(j) = (-1)^j(-j)!^{-1}$ si $j \leq 0$.

1.2.3. CONJECTURE. *Pour $\omega \in det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)$, $\omega' \in det_{\mathbb{Q}_p} t_{V^*(1)}(K)$ tels que $\omega \otimes \omega'^{-1}$ engendre $(det_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K)^{\otimes d} \otimes \mathbb{Z}_p e_T^{\otimes [K:\mathbb{Q}_p]}$ vu comme sous-module de $det_{\mathbb{Q}_p}(K \otimes \mathbf{D}_p(V))$,*

$$\frac{Tam_{\omega,K}(T)}{Tam_{\omega',K}(T^*(1))} \sim d_K^{-t_H(V^*(1))} \prod_i \Gamma^*(-i)^{-h_i(V)[K:\mathbb{Q}_p]} \tag{4}$$

où d_K est le discriminant de K sur $\mathbb{Q}_p$.[2]

La formule (4) a été montrée par Bloch et Kato pour $V = \mathbb{Q}_p(r)$ et K non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$. Elle est vraie aussi pour les représentations p-adiques ordinaires et K non ramifié. On notera $M(T)$ un réseau de $\mathbf{D}_p(V)$ tel que $det_{\mathbb{Z}_p} M(T) = (t^{t_H(V)} A_{cris} \otimes det_{\mathbb{Z}_p} T)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$.

1.2.4. *Problème C.* L'application λ_V est extrêmement importante. Elle mesure le défaut d'un élément de $H^1(\mathbb{Q}_p, T)$ à être dans $H^1_f(\mathbb{Q}_p, T)$ et intervient dans les problèmes de "loi explicite de réciprocité" [3]. Comment la calculer?

1.3. Résultats.

1.3.1. Soient $K_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})$, $G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}_p)$, $\chi : G_\infty \cong \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique. Si X est une indéterminée, on fait agir G_∞ sur $1+X$ par $\tau.(1+X) = (1+X)^{\chi(\tau)}$ et on prolonge cette action par linéarité et continuité à $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$. D'autre part, on fait agir φ sur $\mathbb{Q}_p[[X]]$ par $\varphi(1+X) = (1+X)^p$. Fixons un générateur (multiplicatif) $\epsilon = (\zeta_n)$ de $\mathbb{Z}_p(1)$. Notons $\tilde{\Delta}_j$ le composé de l'évaluation en χ^j et de la projection $\mathbf{D}_p(V) \to \mathbf{D}_p(V)/(1-p^j\varphi)$ et $\tilde{\Delta} = \oplus \tilde{\Delta}_j$. Si $g \in \Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V)$ vérifie $\tilde{\Delta}(g) = 0$ (il n'y a qu'un nombre fini de conditions), on montre qu'il existe un élément $G \in \mathbb{Q}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$ convergeant sur le disque unité ouvert, tel que $(1-\varphi)G = g.(1+X)$ (φ agit ici de manière diagonale). On pose $\Xi_{n,V}(g) = (p \otimes \varphi)^{-(n+1)}(G)(\zeta_n - 1) \in (K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V))/\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=1}$.

Notons $Z^1_\infty(T)$ la limite projective relativement aux applications de corestriction des $H^1(K_n, T)$. C'est un Λ-module de rang d. Son sous-Λ-module de torsion[4] est isomorphe à $T^{G_{K_\infty}}$. On définit un isomorphisme, noté Tw_ϵ: $x \mapsto x \otimes \epsilon$, de $Z^1_\infty(T(j))$ dans $Z^1_\infty(T(j+1))$ et induit par les isomorphismes $H^1(K_n, T_n(j)) \to H^1(K_n, T_n(j)) \otimes \mu_{p^{n+1}} = H^1(K_n, T_n(j+1))$, avec $T_n = T/p^{n+1}T$.

Définissons $\mathcal{H}(G_\infty)$ comme le tensorisé avec $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_p)/\mathbb{Q}_p)]$ de la sous-algèbre de $\mathbb{Q}_p[[\gamma - 1]]$ formée des $f = \sum_n a_n(\gamma-1)^n$ avec $\sup_{n>0} \frac{|a_n|}{n^r} < \infty$ pour un r convenable (ici, γ est un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}_p(\mu_p))$). Soit $\mathcal{K}(G_\infty)$ l'anneau total des fractions de $\mathcal{H}(G_\infty)$. Notons Tw l'application de twist induite par $\gamma \mapsto \chi(\gamma)\gamma$.

---

[2] $a \sim b$ si $a = ub$ avec u unité p-adique

[3] voir aussi les démonstrations "à la Kolyvagin".

[4] pour chacune des composantes relativement à l'action de $\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$

1.3.2. THÉORÈME. *Pour tous entiers h et j, il existe un unique Λ-homomorphisme injectif*

$$\Omega^{\epsilon}_{V(j),h} : (\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V(j)))^{\tilde{\Delta}=0} \to \mathcal{K}(G_\infty) \otimes_\Lambda (Z^1_\infty(T(j))/T(j)^{G_{K_\infty}})$$

tel que: (i) *pour tout entier $h \geq 1$, supérieur à la longueur de la filtration de Hodge de V et tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$ *et pour tout entier j tel que* $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V(j)) = 0$, $\Omega^{\epsilon}_{V(j),h+j}$ *est à valeurs dans $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda (Z^1_\infty(T(j))/T(j)^{G_{K_\infty}})$; pour $n \geq 0$, le diagramme suivant est alors commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
(\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V(j)))^{\tilde{\Delta}=0} & \longrightarrow & \mathcal{K}(G_\infty) \otimes_\Lambda (Z^1_\infty(T(j))/T(j)^{G_{K_\infty}}) \\
{\scriptstyle \Xi_{n,V(j)}}\downarrow & & \downarrow \\
K_n \otimes \mathbf{D}_p(V(j)) & \xrightarrow{(h+j-1)!exp_{K_n,V(j)}} & H^1(K_n, V(j))
\end{array}$$

où l'application verticale de droite se déduit de la projection naturelle;
(ii) *pour tous entiers j et h, on a*

$$Tw_\epsilon \circ \Omega^{\epsilon}_{V(j),h+j} \circ Tw = -\Omega^{\epsilon}_{V(j+1),h+j+1} \ ;$$

(iii) *pour tous entiers j et h,* $\Omega^{\epsilon}_{V(j),h+1} = l_h \Omega^{\epsilon}_{V(j),h}$ *avec* $l_h = h - \log\gamma/\log\chi(\gamma)$ *et γ élément de G_∞ d'ordre infini.*

1.3.3. On en déduit une famille d'isomorphismes de $\mathcal{K}(G_\infty)$-modules

$$\Omega^{\epsilon}_{V,h} : \mathcal{K}(G_\infty) \otimes (\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V(j))) \to \mathcal{K}(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_\infty(T(j)) \ ,$$

que l'on peut voir comme une sorte d'exponentielle au niveau des modules d'Iwasawa. Notons $\delta_h(V)$ (resp. $\delta_{\mathbb{Z}_p,h}(V)$) le sous-$\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$-module (resp. sous-$\Lambda$-module) de $\mathcal{K}(G_\infty)$ engendré par le déterminant de $\Omega^{\epsilon}_{V,h}$ dans des bases des $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$-modules $\Lambda \otimes det_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathbb{Q}_p \otimes det_\Lambda Z^1_\infty(T) \otimes (det_\Lambda Z^2_\infty(T))^*$[5] (resp. des Λ-modules $\Lambda \otimes det_{\mathbb{Z}_p} M(T)$ et $det_\Lambda Z^1_\infty(T) \otimes (det_\Lambda Z^2_\infty(T))^*$). [6]

1.3.4. THÉORÈME. $\prod_{j>-h} l_{-j}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)}\delta_h(V)$ *est indépendant de h et contenu dans $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$.*

1.3.5. CONJECTURE. $\tilde{\delta}_{\mathbb{Z}_p}(V) = \prod_{j>-h} l_{-j}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)}\delta_{\mathbb{Z}_p,h}(V)$ *est égal à Λ.*

La conjecture est indépendante du choix de T.

---

[5] Ici, * désigne $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)$

[6] Nous emploierons désormais le langage des déterminants pour les Λ-modules: rappelons que pour un Λ-module M de type fini et de Λ-torsion, $det_\Lambda M$ se plonge canoniquement dans l'anneau total des fractions de Λ et est égal à $f^{-1}\Lambda$ où f est une série caractéristique de M.

1.3.6. PROPOSITION. *Si* $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$ *ou* $\mathbf{D}_p(V)$ *et si 1 et* p^{-1} *ne sont pas valeurs propres de* φ, *avec les notations de 1.2.3,*

$$\prod_i \Gamma^*(-i)^{h_i(V)[K_n:\mathbb{Q}_p]} d_{K_n}^{t_H(V^*(1))} Tam_{\omega,K_n}(T)/Tam_{\omega',K_n}(T^*(1))$$

est égal (à une unité près) à $\prod_\eta \eta(f)$ *où* f *est un générateur de* $\tilde{\delta}_{\mathbb{Z}_p}(V)$ *et où* η *parcourt les caractères de* $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q}_p)$.

Ainsi, la conjecture 1.3.5 implique la conjecture 1.2.3. D'autre part, à condition de supposer vraie la conjecture 1.3.10 qui suit, on peut enlever l'hypothèse sur Fil^0.

Supposons $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$. Alors, $Tam_{\omega',K_n}(T^*(1))$, pour ω' base canonique, est le cardinal du quotient de $(V^*(1)/T^*(1))^{G_{K_n}}$ par sa partie divisible et est borné par rapport à n. On déduit alors de 1.3.4 que, si ω_n est une base de $\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_{K_n} \otimes M(T))$,

$$Tam_{\omega_n,K_n}(T) \sim d_{K_n}^{-t_H(V^*(1))} \prod_i \Gamma^*(-i)^{-h_i(V)p^n(p-1)} \prod_\eta \eta(f) p^c$$

(c constant pour n assez grand). Ainsi, si 1.3.5 est vraie,

$$Tam_{\omega,K_n}(T) \sim p^{-p^n(p-1)(n-\frac{1}{p-1})t_H(V^*(1))} \prod_i \Gamma^*(-i)^{-h_i(V)p^n(p-1)} p^c$$

où c est constant pour n assez grand. Sans la conjecture 1.3.5, il faut rajouter $p^{\mu p^{n+1}+\lambda n}$ où μ et λ sont des constantes.

1.3.7. EXEMPLE. Pour $\mathbb{Q}_p(r)$, la conjecture 1.3.5 est démontrée. Pour ω_n base de $M(\mathbb{Z}_p(r)) \otimes det_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{K_n}$ et $r > 0$, on a $Tam_{\omega_n,K_n}(\mathbb{Z}_p(r)) \sim p^c d_{K_n}^{1-r}(r-1)!^{-p^n(p-1)}$.

1.3.8. Revenons au problème A et prenons h comme dans le théorème 1.3.2. Soit $x \in Z^1_\infty(T)$. On déduit du théorème précédent qu'il existe un unique élément $\mathrm{L}_h(x)$ de $\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ tel que pour tout entier $j \gg 0$,

$$\chi^{-j}(\mathrm{L}_h(x)) = (-1)^j P_j(\varphi) \frac{\log_{V(j),\mathbb{Q}_p} P(x \otimes \epsilon^{\otimes j})}{(h+j-1)!} \tag{5}$$

où $P(x \otimes \epsilon^{\otimes j})$ désigne la projection de $x \otimes \epsilon^{\otimes j}$ dans $H^1(\mathbb{Q}_p, V(j))$ et où

$$P_j(\varphi) = (1 - p^{-j}\varphi)(1 - p^{j-1}\varphi^{-1})^{-1}.$$

Les propriétés d'analycité de $\mathrm{L}_h(x)$ ont des conséquences sur la fonction $j \mapsto \chi^{-j}(\mathrm{L}_h(x))$, en particulier sur sa continuité. Remarquons que $\mathrm{L}_h(x)$ est entièrement déterminée (par continuité) par ses valeurs aux entiers $j \gg 0$. Rappelons que M est un réseau fixé de $\mathbf{D}_p(V)$. On déduit des théorèmes précédents que pour tout $k \in \mathbb{Z}_p$, sauf un nombre fini, il existe une constante C telle que, pour n assez grand et $j \equiv j' \equiv k \bmod p^n(p-1)$, $j > k_0$, $j' > k_0$, si $x \in H^1(\mathbb{Q}_p, T(j))$ et $x' \in H^1(\mathbb{Q}_p, T(j'))$ sont congrus modulo p^{n+1}, $P_j(\varphi)\frac{\log_{V(j),\mathbb{Q}_p}(x)}{(h+j-1)!}$ et $P_{j'}(\varphi)\frac{\log_{V(j'),\mathbb{Q}_p}(x')}{(h+j'-1)!}$ sont congrus modulo $C^{-1}p^nM$. Si la conjecture 1.3.5 est vraie, l'ensemble exceptionnel est contenu dans la réunion des k tels que $V(k)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ ou $V(1-k)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est non nul et des entiers compris entre $-h$ et j_0. Sinon il faut aussi enlever les zéros d'un générateur de $\tilde{\delta}_{\mathbb{Z}_p}(V)$.

1.3.9. Soit $<,>_V$ l'application $Z^1_\infty(T) \times Z^1_\infty(T^*(1)) \to \Lambda$ qui est Λ-sesquilinéaire (relativement à $\iota : \Lambda \to \Lambda$ induit par $\tau \mapsto \tau^{-1}$ pour $\tau \in G_\infty$) et induit par le cup-produit: $< x, y >_V = \lim_{n\to\infty} \sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q}_p)} (\tau^{-1}x_n \cup y_n)\tau$. Notons $[\ ,\ ]_{\mathbf{D}_p(V)}$ la dualité naturelle $\mathbf{D}_p(V) \times \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$. On note de la même manière les formes obtenues par extension des scalaires à $\mathcal{H}(G_\infty)$.

1.3.10. Conjecture. *Pour tous* $x \in (\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V))^{\tilde{\Delta}=0}$, $y \in (\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))^{\tilde{\Delta}=0}$,

$$(-1)^{h-1} < \Omega^{\epsilon}_{V,h}(x), \Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h}(y^\iota) >_V = [x, y]_{\mathbf{D}_p(V)} \ . \tag{6}$$

1.3.11. En prenant la valeur de (6) au caractère unité et en utilisant le (iii) du théorème 1.3.2, on obtient une formule que l'on peut voir comme une description de l'application $\lambda_{V(-r)}$ et qui pour $\mathbb{Q}_p$ redonne la loi explicite de réciprocité de Bloch-Kato. Soit r un entier tel que $\mathrm{Fil}^0\, \mathbf{D}_p(V(r)) = 0$ et $\alpha \in \mathbf{D}_p(V(r))$. Pour $h \gg 0$ et $r_0 > h - r$, $\mathrm{Fil}^0\, \mathbf{D}_p(V^*(1 + r_0)) = 0$, si $y \in H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1 - r))$, il existe $g_h \in \mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1 + r_0))$ tel que $P(\Omega^{\epsilon}_{V^*(1+r_0),h}(g_h) \otimes \epsilon^{\otimes(-r_0-r)}) = y$. Soit G_h tel que $(1 - \varphi)G_h = g_h(1 + x)$. Alors,

$$< exp_{V(r),\mathbb{Q}_p}(\alpha), y >= \pm \frac{[\alpha, D^{r+r_0}(G_h)(0)]_{\mathbf{D}_p(V)}}{(r + r_0 - h)!} \ .$$

On en déduit facilement une formule pour $\lambda_{V^*(1-r)}$.

1.3.12. Une autre conséquence de (6) est que pour $r < -h$, $\mathrm{Fil}^r\, \mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$,

$$\chi^{-r}(\text{Ł}_h(x)) = \pm(1 - p^{-r}\varphi)(1 - p^{r-1}\varphi^{-1})^{-1} \frac{\lambda_{V(r),\mathbb{Q}_p}(P(x \otimes \epsilon^{\otimes r}))}{\Gamma^*(h + r)!} \ .$$

Ainsi, le membre de droite est une limite pour j tendant p-adiquement vers r et tendant vers l'infini dans $\mathbb{R}$, d'expressions du type (5).

2. Etude globale

A partir de maintenant, V est une représentation p-adique de $G_\mathbb{Q}$ non ramifiée en dehors d'un ensemble fini S de nombres premiers (avec $p \in S$) et cristalline en p, on désigne par T un réseau de V stable par $G_\mathbb{Q}$. On pose $F_n = \mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$, $G_\infty = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$. Si M est un $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})]$-module, on note $M_\pm$ le sous-module sur lequel la conjuguaison complexe agit par $\pm$. Si F est une extension de $\mathbb{Q}$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}$, on note $G_{S,F}$ le groupe de Galois de la plus grande extension de F non ramifiée en dehors de S sur F.

2.1. Point de vue arithmétique.

2.1.1. Soit $H^i_{\infty,S}(T)$ la limite projective des $H^i(G_{S,F_n}, T)$ relativement aux applications de corestriction. Ces Λ-modules de type fini sont nuls pour i différent de 1 et 2. On montre que $rg_{\Lambda_\pm} H^1_{\infty,S}(T) - rg_{\Lambda_\pm} H^2_{\infty,S}(T) = d_{-\pm}(V)$ où $d_+(V) = dim_{\mathbb{Q}_p} V^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$ et $d_-(V) = d - d_+(V)$.

2.1.2. CONJECTURE. *Le Λ-module $H^2_{\infty,S}(T)$ est de torsion.*

Dans les cas classiques, cette conjecture est ce qu'on appelle la conjecture faible de Leopoldt. Elle est équivalente à la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, V/T)$. Elle est démontrée pour $V = \mathbb{Q}_p(r)$, pour les représentations associées aux courbes elliptiques à multiplication complexe, définies sur $\mathbb{Q}$ et ayant bonne réduction en p à quelques exceptions près (Rubin, [Mc]). Les résultats de finitude de Flach impliquent cette conjecture pour le carré symétrique d'une forme modulaire de poids 2 (et pour certains espaces propres relativement à $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$). De manière un peu anecdotique, on peut aussi montrer que les conjectures à la Bloch-Kato sur l'ordre du zéro de la fonction L énoncées comme en [FP94] impliquent cette conjecture. Enfin, des critères vérifiables numériquement peuvent être donnés. Par exemple, Rubin et Silverberg [RS] ont calculé des polynômes $a_D(t)$ et $b_D(t)$, $c_D(t)$ tels que pour tout $t \in \mathbb{Q}$, si $E_t^{(D)}$ est la courbe elliptique $y^2 = x^3 + a_D(t)x^2 + b_D(t)x + c_D(t)$, le $G_{\mathbb{Q}}$-module $E_t^{(D)}[5]$ soit isomorphe à $\mathcal{E}[5]$ où $\mathcal{E}$ est la courbe d'équation $y^2 = x^3 - Dx$. On peut alors montrer en utilisant les calculs numériques de [BGS84] que si $D = 1, -1, -2, 3, 9, -27, \ldots$ et $t \in \mathbb{Z}_{(5)}$, $Dt^2 \not\equiv 3 \bmod 5$, la conjecture de Leopoldt faible pour la courbe $E_t^{(D)}$ et $p = 5$ est vraie.

2.1.3. Nous supposons désormais la conjecture 2.1.2 vraie. Si Σ est un ensemble fini de places de $\mathbb{Q}$, on pose $Z^i_{\infty,\Sigma}(T) = \varprojlim \oplus_{w|v\in\Sigma} H^i(F_{n,w}, T)$ et $\Delta^{glob}_{\infty,S}(T) = det_\Lambda H^2_{\infty,S}(T) \otimes det_\Lambda H^1_{\infty,S}(T)^*$. Posons $\Delta^{loc}_{\infty,S}(T) = det_\Lambda Z^2_{\infty,S}(T) \otimes det_\Lambda Z^1_{\infty,S}(T)^*$ et $\Delta_{\infty,S}(T)^* = \Delta^{loc}_{\infty,S}(T) \otimes \Delta^{glob}_{\infty,S}(T)^*$.

Donnons deux définitions possibles du module des fonctions L p-adiques attachées à V:

2.1.4. DÉFINITION. *Si $\omega = \omega_{glob} \otimes \omega_{loc}^{-1}$ est un élément de $\Delta_{\infty,S}(T)^*$ avec $\omega_{glob} \in \Delta^{glob}_{\infty,S}(T)$ et $\omega_{loc} \in \Delta^{loc}_{\infty,S}(T)$ et si $\delta \in \wedge^{d_\pm(V)}\mathbf{D}_p(V)$, on note $\lambda_{V,S,h,\pm}(\omega)(\delta)$ l'élément de $\mathcal{K}(G_\infty)_\pm$ défini par*

$$\lambda_{V,S,h,\pm}(\omega)(\delta)\omega^{-1}_{loc,\pm} = \wedge^{d_\pm(V)}(\Omega^\epsilon_{V,h,\pm})(\delta) \wedge \omega^{-1}_{glob,\pm} \tag{7}$$

Le sous-$\Lambda_\pm$-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_\pm(V)}\mathbf{D}_p(V), \mathcal{K}(G_\infty)_\pm)$ engendré par l'image de $\Delta_{\infty,S}(T)^*$ est noté $\mathbb{I}_{arith,\{\infty,p\},h}(T)_\pm$.

2.1.5. DÉFINITION. *Le sous-Λ-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_\pm(V)}\mathbf{D}_p(V), \mathcal{K}(G_\infty)_\pm)$ défini pour $\delta \in \wedge^{d_\pm(V)}\mathbf{D}_p(V)$ par*

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{arith,\{\infty,p\},h}(T)_\pm(\delta) det_{\mathbb{Z}_p} M(T) = \prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j \mathbf{D}_p(V)} \\ det_{\Lambda_\pm} Z^2_{\infty,S-\{p\}}(T)_\pm \delta \wedge (\wedge^{d_-\pm(V)}(\Omega^\epsilon_{V,h,\pm})^{-1}(\Delta^{glob}_{\infty,S}(T)^*)) \ .\end{aligned} \tag{8}$$

est noté $\mathbb{I}_{arith,\{\infty,p\},h}(T)_\pm$.

2.1.6. Si la conjecture 1.3.10 est vraie, ces deux définitions coïncident. Dans la suite, nous laissons l'ambiguïté. Ces modules généralisent la notion de "série caractéristique d'un module de Selmer" dans le cas où V est ordinaire en p. Dans les cas particuliers, il arrive qu'un choix de h s'impose. La dépendance en h est de toute façon simple et se déduit du théorème 1.3.2, (iii).

2.2. Point de vue analytique. Nous arrivons dans le domaine purement conjectural. Les énoncés s'appuient sur les conjectures de Beilinson et Deligne sur les valeurs spéciales des fonctions L des motifs. Ce qui suit tient de la loi-cadre. Nous renvoyons à [FP91] et [FP94] entre autres pour des bases plus précises et à [Pb] pour des "énoncés" plus complets.

2.2.1. Soit M un motif donné par ses réalisations de de Rham M_{dR}, de Betti M_B et l-adiques M_l pour tout l. Rappelons que M_{dR} est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une filtration $\mathrm{Fil}^i M_{dR}$, M_B est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une involution c (on note $M_B^{\pm}$ les parties $\pm$ pour cette involution), M_l est une représentation l-adique de $G_{\mathbb{Q}}$. Nous supposons que $V = M_p$ vérifie les hypothèses des paragraphes précédents et est en particulier cristalline en p. On a des isomorphismes de comparaison $\mathbb{C}\otimes M_{dR} \cong \mathbb{C}\otimes M_B, B_{cris}\otimes M_{dR} \cong B_{cris}\otimes M_p$ et $\mathbb{Q}_p\otimes M_{dR} \cong \mathbf{D}_p(M_p)$[7] compatibles avec les différentes structures supplémentaires. On note $\mathbb{Q}$ le motif trivial, $\mathbb{Q}(1)$ le motif de Tate et $\mathbb{Q}(j) = \mathbb{Q}(1)^{\otimes j}$ si $j > 0$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(-j), \mathbb{Q})$ si $j \leq 0$. Pour tout entier j, on définit le motif $M(j)$ twist de M par $\mathbb{Q}(j)$.

Fixons une $\mathbb{Z}$-structure $\mathcal{M}$ sur M, c'est-à-dire un réseau $\mathcal{M}$ de M_B tel que $\mathbb{Z}_l \otimes \mathcal{M}$ vu dans M_l soit stable par $G_{\mathbb{Q}}$. On choisit une base de la $\mathbb{Z}$-structure canonique $\mathbb{Z}(1)$ de $\mathbb{Q}(1)$. On fixe sur $\mathcal{M}$ une orientation c'est-à-dire des bases $\omega^+_{\mathcal{M}}$ de $det_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}^+$ et $\omega^+_{\mathcal{M}(1)}$ de $det_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}(1)^+$. On en déduit alors pour tout j une base $\omega^+_{\mathcal{M}(j)}$ de $det_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}(j)^+$.

Soit j un entier tel que $\mathrm{Fil}^{-1} M_{dR}(j) = 0$. **Conjecturalement**, on définit un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^1_f(\mathbb{Q}, M(j))$ de dimension $d_-(M(j))$ et une application $\mathbb{Q}$-linéaire $H^1_f(\mathbb{Q}, M(j)) \to H^1_f(\mathbb{Q}, M(j)_p)$ qui devient un isomorphisme lorsqu'on tensorise par $\mathbb{Q}_p$; on définit un isomorphisme $\mathbb{R} \otimes H^1_f(\mathbb{Q}, M(j)) \to \mathbb{R} \otimes \mathcal{M}_{dR}(j)/M_B(j)^+$. D'où une application

$$det_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M(j)) \otimes (det_{\mathbb{Q}} M_{dR}(j))^* \otimes det_{\mathbb{Q}} M_B(j)^+ \to \mathbb{R} \ .$$

Si $\omega \in (det_{\mathbb{Q}} M_{dR}(j))^* \otimes det_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M(j))$, on note $Per_{\infty,\mathcal{M}(j)}(\omega)$ l'image de $\omega \otimes \omega^+_{\mathcal{M}(j)}$ par cet isomorphisme. De même, en utilisant l'application exponentielle de $M(j)_p$, on définit une application

$$det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(\mathbb{Q}, M(j)_p) \otimes (det_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(M(j)))^* \otimes \wedge^{d_+(M(j))} \mathbf{D}_p(M(j)) \to \mathbb{Q}_p \ .$$

Si $\omega \in (det_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(M(j)))^* \otimes det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(\mathbb{Q}, M(j)_p)$ et si $\delta \in \wedge^{d_+(M(j))} \mathbf{D}_p(M(j))$, on note $Per_{p,M(j)_p}(\omega)(\delta)$ l'image de $\omega \otimes \delta$ par cet isomorphisme. Ainsi, $Per_{p,M(j)_p}(\omega)$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_+(M(j))} \mathbf{D}_p(M(j)), \mathbb{Q}_p)$.

L'élément $Per_{\infty,\mathcal{M}(j)}(\omega)^{-1} \otimes Per_{p,M(j)_p}(\omega)(\delta)$ de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{Q}_p$ ne dépend pas de $\omega \in (det_{\mathbb{Q}} M_{dR}(j))^* \otimes det_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M(j))$. Un choix possible pour δ est un élément

[7] On pose $\mathbf{D}_p(M) = \mathbf{D}_p(M_p)$

de $det_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{M}^+)$, qui dépend du choix d'une conjugaison complexe, ce qui n'est pas toujours naturel dans le cadre p-adique. Cela explique la dissymétrie entre les définitions complexe et p-adique.[8]

2.2.2. Au motif M est associée une fonction L: on note $\mathbf{L}^{\infty}_{\{\infty,p\}}(M,s) = \prod_{l\neq p} L_l(M,s)$ la fonction incomplète en p. Les conjectures de Beilinson prédisent que, avec les notations précédentes,

$$\frac{\mathbf{L}^{\infty}_{\{\infty,p\}}(M,j)}{Per_{\infty,\mathcal{M}(j)}(\omega)} \in \mathbb{Q}.$$

2.2.3. CONJECTURE. *Il existe un unique générateur* $\mathbf{L}^{p}_{\{\infty,p\},h}(\mathcal{M})$ *du* Λ*-module* $\mathbb{I}_{arith,\{\infty,p\},h}(\mathcal{M}_p)$ *tel que pour tout entier* $j \gg 0$, *on a l'égalité d'éléments de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_+(M(j))}\mathbf{D}_p(M_p),\mathbb{Q}_p)$

$$\begin{aligned}&\wedge^{d_+(M(j))}\left((1-p^j\varphi)^{-1}(1-p^{-j-1}\varphi^{-1})\right)\chi^{-j}\mathbf{L}^{p}_{\{\infty,p\},h}(\mathcal{M})\\ =&(h+j-1)!^{d_+(M(j))}2^{-d_+(M(j))}\frac{\mathbf{L}^{\infty}_{\{\infty,p\}}(M(j),0)}{Per_{\infty,\mathcal{M}(j)}(\omega)}Per_{p,M(j)_p}(\omega)\end{aligned} \tag{9}$$

pour $\omega \in (det_{\mathbb{Q}}M_{dR}(j))^* \otimes det_{\mathbb{Q}}H^1_f(\mathbb{Q},M(j))$.

Cette conjecture, d'ailleurs totalement inabordable car elle présuppose déjà les conjectures de Beilinson, comporte en fait une partie d'interpolation (existence, pour h assez grand, d'un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_+(M(j))}\mathbf{D}_p(M_p),\mathcal{H}(G_\infty))$ vérifiant les équations (9)) et une partie "conjecture principale" (lien entre le module arithmétique et la fonction d'interpolation analytique). D'autre part, des conjectures sur l'ordre du zéro de $\mathbf{L}^{p}_{\{\infty,p\},h}(\mathcal{M})$ et sur le terme dominant en χ^j pour tout j peuvent être formulées ([Pb]). Ces conjectures que l'on peut aussi voir comme un analogue p-adique des conjectures à la Bloch-Kato sont essentiellement démontrées pour le module des fonctions L p-adiques de M_p.

References

[BGS84] D. Bernardi, C. Goldstein et N. Stephens, *Notes p-adiques sur les courbes elliptiques*, J. Reine Angew. Math. **351** (1984), 129–170.

[BP93] D. Bernardi et B. Perrin-Riou, *Variante p-adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (le cas supersingulier)*, C.R. Acad. Sci. Paris, **317**, série I (1993), 227–232.

[BK90] S. Bloch et K. Kato, *L functions and Tamagawa numbers of motives*, dans The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Prog. in Math. **86**, Birkhäuser, Boston, 1990, 333–400.

[C] P. Colmez, *Fonctions zêta p-adiques en s = 0*, prépublication DMI, ENS (1994), LMENS 94–11.

[Bu] *Périodes p-adiques*, (tenu à Bures en 1988), Astérisque **223** (1994), (J.-M. Fontaine, éd.).

[FP91] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato*, C.R. Acad. Sci. Paris, **313**, série I (1991), *I – Cohomologie galoisienne*, 189-196, *II – Structures motiviques f-closes*, 349–356; *III – Le cas général*, 421–428.

[8] voir [C] pour une discussion à ce propos.

[FP94] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, dans Motives, (U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre, éds), Proc. Symp. Pure Math. **5** (1994), 599–706.

[Mc] McCornell, *On the Iwasawa theory of CM elliptic curves at supersingular primes*, prépublication (1993).

[P92] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques: le cas local*, C.R. Acad. Sci. Paris, **315**, série I (1992), 629–632.

[P93] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques d'une courbe elliptique et points rationnels*, Ann. Inst. Fourier, **43**, (1993), 945–995.

[P94] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local*, Invent. Math. **115** (1994), 81–149.

[Pa] B. Perrin-Riou, *La fonction de Kubota-Leopoldt*, dans Arithmetic Geometry (N. Childress et J. Jones, eds), Contemp. Math. **174** (1994), 65–93.

[Pb] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229** (1995).

[RS] K. Rubin et A. Silverberg, *Families of elliptic curves with constant mod p representations*, prépublication (1994).