Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 495 à 497.

GROUPES DE FONCTIONS CONTINUES EN ANALYSE HARMONIQUE

by Nicholas VAROPOULOS

Soit G un groupe abélien compact et soit $E \subset G$ un sous-ensemble fermé de E, on dit alors que E est un ensemble de type $H_\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$ (un Helson-α) si pour toute $f \in C(E)$ de norme uniforme inférieure à 1 ($\|f\|_\infty < 1$) il existe $\varphi \in A(G)$ telle que

$$\|\varphi\|_A \leqslant \alpha^{-1} \qquad \varphi|_E = f \quad .$$

On dit que E est un ensemble de Kronecker si pour toute $f \in C(E)$ de module 1 et tout $\epsilon > 0$ il existe $\chi \in \hat{G}$ tel que

$$\sup_e |\chi(e) - f(e)| \leqslant \epsilon \ .$$

On note $Gp(E)$ le sous-groupe de G engendré par E.

Remarquons qu'un ensemble de Kronecker est de type H_1. Les théorèmes que nous démontrerons sur les ensembles de Helson sont les suivants.

THEOREME 1. — *Soit G un groupe abélien compact ; soit E un ensemble métrisable de type H_α de G et soit aussi $E_1 \subset G$ un compact de G disjoint de E. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $f \in A(G)$ telle que*

(i) $\|f\|_A \leqslant C_\alpha \epsilon^{-1}$ (C_α une constante ne dépendant que de α)

(ii) $f(e) \equiv 1 \ \ \forall e \in E$

(iii) $|f(e_1)| \leqslant \epsilon \ \ \forall e_1 \in E_1$.

THEOREME 2. — *Soit G un groupe abélien compact et soit E un ensemble métrisable de type H_α de G, soit aussi $E_1 \subset G$ un ensemble tel que :*

$$E_1 \cap Gp(E) = \emptyset$$

alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $f \in A(G)$ telle que

(i) $\|f\|_A \leqslant \alpha^{-2}$

(ii) $|f(e) - 1| \leqslant \epsilon \ \ \forall e \in E$

(iii) $|f(e_1)| \leqslant \epsilon \ \ \forall e_1 \in E_1$.

Les théorèmes 1 et 2 ne sont démontrés dans toute leur généralité qu'à la fin.

Le travail essentiel consiste à démontrer le cas particulier du théorème 1 et 2 dans le cas où $\alpha = 1$ (ou même dans le cas où E est un ensemble de Kronecker).

C'est le théorème 2 qui est fondamental et qui nécessite pour sa démonstration des techniques de groupes de fonctions continues. A partir du théorème 2 on déduit le théorème 1 assez facilement.

Comme corollaire du théorème 2 on obtient le théorème suivant :

THEOREME 3. — *Soit G un groupe abélien compact et soit E_1, E_2 deux ensembles métrisables de type H_α, alors l'ensemble $E_1 \cup E_2$ est un ensemble de type H_β où β ne dépend que de α.*

On peut démontrer que le théorème 2 est le meilleur possible dans un certain sens. En effet, on a le théorème suivant :

THEOREME 4. — *Il existe G un groupe abélien compact métrisable et K, E deux sous-ensembles fermés de G tels que K est ensemble de Kronecker et*

$$E \cap Gp(K) = \emptyset$$

et que, pour toute fonction $f \in A(G)$ satisfaisant

$$f(e) = 0 \quad \forall e \in E \quad , \quad f(k) = 1 \quad \forall k \in K ,$$

on a $\|f\|_A \geqslant C > 1$ où C est une constante numérique.

A partir du théorème 4 on peut déduire des résultats sur les algèbres $\widetilde{A}(E)$; plus exactement pour tout sous-ensemble fermé $E \subset G$, on note

$$I(E) = \{f \in A(G) \mid f^{-1}(0) \supset E\} \subset A(G) ,$$

$$A(E) = A(G)/I(E) ;$$

munie de la norme quotient $A(E)$ est une algèbre de Banach. Notons aussi $\widetilde{A}(E)$ l'algèbre de Banach

$$\widetilde{A}(E) = \{f \in C(E) \mid \exists \{f_n \in A(E)\}_{n=1}^{\infty} \ t.q. \ \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \sup_n \|f_n\|_A < +\infty$$

munie de la norme canonique. A partir des théorèmes 2 et 4 on a alors le théorème suivant.

THEOREME 5. — *Soit G un groupe infini abélien compact ; il existe alors $E \subset G$, sous-ensemble fermé, tel que l'algèbre $A(E)$ n'est pas une sous-algèbre fermée de $\widetilde{A}(E)$.*

Le théorème 5 a des applications au problème de la synthèse harmonique. Plus exactement, on dit que $E \subset G$, sous-ensemble fermé, est un ensemble de synthèse harmonique si pour toute pseudomesure $S \in PM(E)$ (i.e. $\hat{S} \in \ell^\infty(\hat{G})$; $\operatorname{supp} S = Sp\,\hat{S} \subset E$) il existe un filtre de mesures $\{\mu_\alpha \in M(E)\}_{\alpha\in A}$ tel que

$$\mu_\alpha \xrightarrow[\alpha\in A]{} S \quad \text{pour la topologie} \quad \sigma(PM ; A) \quad .$$

On dit que E est un ensemble de synthèse bornée si pour toute pseudomesure $S \in PM(E)$ il existe un filtre de mesures $\{\mu_\alpha \in M(E)\}_{\alpha\in A}$ tel que

$$\begin{cases} \mu_\alpha \to S & \text{pour la topologie} \quad \sigma(PM ; A) \\ \sup_\alpha \|\hat{\mu}_\alpha\|_\infty < +\infty & . \end{cases}$$

A partir du théorème 5 on obtient le théorème suivant.

THEOREME 6. — *Soit G un groupe infini abélien compact, il existe alors $E \subset G$, sous-ensemble fermé, qui est de synthèse harmonique sans être de synthèse bornée.*

Les techniques des groupes de fonctions continues qu'on utilise pour démontrer le théorème 2 consistent essentiellement en deux étapes. La première étape consiste à démontrer l'analogue du théorème de Bochner pour le groupe multiplicatif

$$S(K) = \{f \in \mathrm{C}(K) \quad ; \quad |f(k)| = 1 \quad \forall k \in K\}$$

où K est un compact totalement discontinu. La seconde étape établit un homomorphisme entre $S(E)$ et $S(E_1)$ où E et E_1 satisfont les hypothèses du thèorème 2.

Des démonstrations différentes des théorèmes 1 et 2 (ne faisant pas intervenir des techniques des groupes des fonctions continues) peuvent être obtenues dans le cadre des groupes classiques $G = \mathrm{T}^n$.

BIBLIOGRAPHIE

VAROPOULOS N. — Groups of continuous functions in harmonic analysis, *Acta Math.*, 125, 1970, p. 109-154.

VAROPOULOS N. — *C. R. Acad. Sci.*, 271, 1970, p. 251-253.

DRURY S. W. — *C. R. Acad. Sci.*, 271, 1970, p. 162-163.

Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique
91 - Orsay - France