Proceedings of the International Congress of Mathematicians
August 16–24, 1983, Warszawa

J.-L. WALDSPURGER

Correspondances de Shimura

On donne ici un aperçu sur les articles [11] et [13], consacrés à l'étude des correspondances entre formes automorphes sur $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ et formes automorphes sur PGL_2 (ou une de ses formes tordues). On signale aussi quelques applications extraites de [10] et [12].

Le sujet remonte à Shimura ([8]). Les idées utilisées dans les travaux précités sont largement inspirées de l'article [9] de Shintani.

La démonstration des résultats ci-dessous est très sinueuse. Dans un souci de clarté, on les présente sans se soucier de l'ordre dans lequel ils sont démontrés.

1

Soient F un corps de nombres, A son anneau des adèles, $A^\times$ son groupe des idèles. Si v est une place de F, on note F_v le complété de F en v.

1.1. Notons $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(A)$ le groupe métaplectique, revêtement de degré 2 de $\mathrm{SL}_2(A)$ (cf. par exemple [2]), $\{1, \zeta\}$ le noyau de la projection $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(A) \to \mathrm{SL}_2(A)$. Il existe une section unique $\mathrm{SL}_2(F) \to \widetilde{\mathrm{SL}}_2(A)$. Identifions $\mathrm{SL}_2(F)$ et son image. Pour toute place v de F, on définit de même $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F_v)$.

Remarque. Le groupe métaplectique n'est pas un groupe algébrique.

Pour toute place v archimédienne de F, on choisit un sous-groupe compact maximal de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F_v)$. On définit alors pour toute place v l'algèbre de Hecke $\tilde{\mathscr{H}}(F_v)$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F_v)$, puis l'algèbre globale $\tilde{\mathscr{H}}(A)$. Soit $\tilde{\mathscr{A}}_0$ l'espace des formes automorphes paraboliques sur $\mathrm{SL}_2(F)\backslash\widetilde{\mathrm{SL}}_2(A)$, impaires (i.e. pour $f \in \tilde{\mathscr{A}}_0$ et $\sigma \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(A)$, on a $f(\zeta\sigma) = -f(\sigma)$). C'est un $\tilde{\mathscr{H}}(A)$-module, qui se décompose en somme directe de sous-modules irréductibles. On note un tel sous-module $(\tilde{\pi}, \tilde{E})$: $\tilde{E}$ est le sous-espace de $\tilde{\mathscr{A}}_0$ et $\tilde{\pi}$ la

représentation de $\tilde{\mathscr{H}}(A)$ dans $\tilde{E}$. Si $(\tilde{\pi}, \tilde{E})$ est un tel sous-module, on peut définir pour toute place v de F une représentation admissible irréductible $\tilde{\pi}_v$ de $\tilde{\mathscr{H}}(F_v)$, de telle sorte que $\tilde{\pi} \simeq \bigotimes_v \tilde{\pi}_v$ (produit tensoriel restreint).

1.2. Soient M une algèbre de quaternions définie sur F, déployée ou non, $G = PM^\times$ (groupe adjoint du groupe des éléments inversibles de M). Pour toute place archimédienne v de F, on choisit un sous-groupe compact maximal de $G(F_v)$. On définit alors l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G, A)$, et l'espace $\mathscr{A}_0(G)$ des formes automorphes paraboliques sur $G(F)\backslash G(A)$, orthogonales aux caractères. Ces objets vérifient des propriétés analogues à celles décrites ci-dessus (1.1). On adopte des notations analogues.

1.3. Soient $\psi: A/F \to C^\times$ un caractère continu, $\psi \neq 1$, H l'espace des éléments de M de trace nulle. Il est muni de la forme quadratique $q(x) = -N(x)$, où N est la norme (réduite) de M/F. Le groupe G agit sur H par conjugaison et s'identifie à $\mathrm{SO}(H, q)$. On définit alors une représentation de Weil ω_ψ de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(A) \times G(A)$ dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(H(A))$ (cf. [14], ou [2]). On se restreint à un sous-espace $\mathscr{S}_\psi = \mathscr{S}_\psi(H(A))$, en imposant des conditions aux places archimédiennes ([11], p. 4). Il n'est pas invariant par ω_ψ, mais l'est par la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}(A) \otimes \mathscr{H}(G, A)$ déduite de ω_ψ.

Si $f \in \mathscr{S}_\psi$, on définit une série thêta $\theta_{\psi,f}$ sur $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(A) \times G(A)$ par

$$\theta_{\psi,f}(\sigma, g) = \sum_{x \in H(F)} \omega_\psi(\sigma, g) f(x).$$

C'est une fonction invariante à gauche par $\mathrm{SL}_2(F) \times G(F)$.

1.4. De la même façon, on définit des séries thêta sur $\mathrm{SL}_2(F)\backslash\widetilde{\mathrm{SL}}_2(A)$ associées à l'espace F muni de la forme quadratique $q(x) = x^2$. Ce sont des formes automorphes. On note $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$ l'espace des éléments de $\tilde{\mathscr{A}}_0$ orthogonaux (pour le produit de Petersson usuel) à toutes les séries thêta construites ainsi (en faisant varier ψ). C'est un $\tilde{\mathscr{H}}(A)$-module.

1.5. Notons $\tilde{A}_{00}$, resp. $A_0(G)$, l'ensemble des sous-modules irréductibles de $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$, resp. $\mathscr{A}_0(G)$. On note JL: $A_0(G) \to A_0(\mathrm{PGL}_2)$ la correspondance de Jacquet et Langlands ([4], § 15). On note de même ses analogues locales.

2

Revenons à la situation du 1.3.

2.1. Soit $(\pi, E) \in A_0(G)$. Pour $\varphi \in E$, $f \in \mathscr{S}_\psi$, $\sigma \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(A)$, posons

$$\theta_{\psi,f,\varphi}(\sigma) = \int_{G(F)\backslash G(A)} \theta_{\psi,f}(\sigma, g)\varphi(g)\,dg,$$

où dg est une mesure de Haar fixée. La fonction $\theta_{\psi,f,\varphi}$ appartient à $\tilde{\mathscr{A}}_0$. Notons $\Theta(E, \psi)$ l'espace des fonctions $\theta_{\psi,f,\varphi}$ quand f décrit $\mathscr{S}_\psi$, et φ décrit E.

PROPOSITION 1. *Si $\Theta(E,\psi)$ est non nul, c'est un sous-module irréductible de $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$.* (Cf. [11], p. 80; [13], prop. 20).

2.2. Soit $(\tilde{\pi}, \tilde{E}) \in \tilde{A}_{00}$. Pour $\tilde{\varphi} \in \tilde{E}$, $f \in \mathscr{S}_\psi$, $g \in G(A)$, posons

$$\theta_{\psi,f,\tilde{\varphi}}(g) = \int_{\mathrm{SL}_2(F)\backslash \mathrm{SL}_2(A)} \overline{\theta_{\psi,f}(\sigma, g)}\tilde{\varphi}(\sigma)\,d\sigma.$$

La fonction $\theta_{\psi,f,\tilde{\varphi}}$ appartient à $\mathscr{A}_0(G)$. Notons $\Theta(\tilde{E}, \psi, G)$ l'espace des fonctions $\theta_{\psi,f,\tilde{\varphi}}$ quand f décrit $\mathscr{S}_\psi$ et $\tilde{\varphi}$ décrit $\tilde{E}$.

PROPOSITION 2. *Si $\Theta(\tilde{E},\psi,G)$ est non nul, c'est un sous-module irréductible de $\mathscr{A}_0(G)$.* (Cf. [11], p. 98; [13], prop. 20).

3

Les applications $E \mapsto \Theta(E, \psi)$ et $\tilde{E} \mapsto \Theta(\tilde{E}, \psi, G)$ sont de nature locale. Décrivons la situation locale.

3.1. Soit v une place finie de F. On note ici G' le groupe adjoint du groupe de quaternions non déployé sur F_v, $A_v(G')$ (resp. $A_v(\mathrm{PGL}_2)$) l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles de G' (resp. et de dimension infinie de $\mathrm{PGL}_2(F_v)$). Notons $\tilde{A}_v$ l'ensemble des classes d'isomorphie de repésentations $\tilde{\pi}_v$ admissibles irréductibles de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F_v)$ telles que: (a) $\tilde{\pi}_v$ ne se factorise pas par $\mathrm{SL}_2(F_v)$, i.e. $\tilde{\pi}_v(\zeta) = -\mathrm{id}$, (b) $\tilde{\pi}_v$ n'est pas une représentation de Weil "élémentaire" (analogue p-adique des représentations de la série discrète holomorphe de poids $1/2$, ou antiholomorphe de poids $-1/2$, du cas réel). Soit $\psi_v\colon F_v \to C^\times$ un caractère continu, $\psi_v \neq 1$. On définit comme d'habitude la notion de modèle de Whittaker de $\tilde{\pi}_v \in \tilde{A}_v$, relativement à ψ_v. Un tel modèle est

unique s'il existe, mais n'existe pas toujours. Notons $\tilde{A}_v(\psi_v)$, resp. $\tilde{A}'_v(\psi_v)$, l'ensemble des $\tilde{\pi}_v \in \tilde{A}_v$ pour lesquelles ce modèle existe, resp. n'existe pas.

3.2. Par une construction locale analogue à celle du n° 2, on définit des applications

$$A_v(\mathrm{PGL}_2) \xrightarrow{\theta(\cdot,\psi_v)} \tilde{A}_v(\psi_v), \quad \tilde{A}_v(\psi_v) \xrightarrow{\theta(\cdot,\psi_v,\mathrm{PGL}_2)} A_v(\mathrm{PGL}_2).$$

Ce sont des bijections réciproques. De même, on définit des applications

$$A_v(G') \xrightarrow{\theta(\cdot,\psi_v)} \tilde{A}'_v(\psi_v), \qquad \tilde{A}'_v(\psi_v) \xrightarrow{\theta(\cdot,\psi_v,G')} A_v(G').$$

Ce sont des bijections réciproques (cf. [13], th. 1 et prop. 14, et l'article fondamental [7]).

3.3. Via les bijections ci-dessus, la correspondance de Jacquet et Langlands définit une injection

$$R(\cdot, \psi_v)\colon \tilde{A}'_v(\psi_v) \to \tilde{A}_v(\psi_v).$$

Notons $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence dans $\tilde{A}_v$ qui rend équivalentes $\tilde{\pi}_v \in \tilde{A}'_v(\psi_v)$ et son image $R(\tilde{\pi}_v, \psi_v)$. Elle est indépendante de ψ_v. Les classes d'équivalence sont de la forme $\{\tilde{\pi}_v\}$ avec $\tilde{\pi}_v \in \tilde{A}_v(\psi_v) - \mathrm{Im}\, R(\cdot, \psi_v)$, ou $\{\tilde{\pi}_v^1, \tilde{\pi}_v^2\}$, avec $\tilde{\pi}_v^1 \in \tilde{A}'_v(\psi_v)$ et $\tilde{\pi}_v^2 = R(\tilde{\pi}_v^1, \psi_v)$. On note dans ce cas $\tilde{\pi}_v^1 = \mathscr{R}\tilde{\pi}_v^2$, $\tilde{\pi}_v^2 = \mathscr{R}\tilde{\pi}_v^1$. Ces deux représentations ont des caractères centraux différents (le centre de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F_v)$ est l'image réciproque de celui de $\mathrm{SL}_2(F_v)$, il a 4 éléments).

3.4. On définit une application

$$\theta^0(\cdot, \psi_v)\colon \tilde{A}_v \to A_v(\mathrm{PGL}_2),$$

égale à $\theta(\cdot, \psi_v, \mathrm{PGL}_2)$ sur $\tilde{A}_v(\psi_v)$ et à $\mathrm{JL} \circ \theta(\cdot, \psi_v, G')$ sur $\tilde{A}'_v(\psi_v)$.

3.5. Des résultats analogues sont vrais en une place v archimédienne, en considérant des g-K-modules, au lieu de représentations des groupes.

4

Revenons à la situation globale.

4.1. Soient $(\pi, E) \in A_0(G)$, $L(\pi, s)$ la fonction L habituelle de π, $\varepsilon(\pi, s)$ son facteur ε. Si $\Theta(E, \psi) \neq \{0\}$, notons $\theta(E, \psi)$ la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}(A)$ dans cet espace. Notons $\theta(\pi, \psi)$ la représentation $\bigotimes_v \theta(\pi_v, \psi_v)$ de $\tilde{\mathscr{H}}(A)$ (cf. 3.2).

THÉORÈME 1. (1) *$\Theta(E,\psi) \neq \{0\}$ si et seulement si $L(\pi, 1/2) \neq 0$.*

(2) *Si $\Theta(E,\psi) \neq \{0\}$, $\theta(E,\psi)$ et $\theta(\pi,\psi)$ sont isomorphes.*

(3) *Il existe $(\tilde{\pi}, \tilde{E}) \in \tilde{A}_{00}$ tel que $\tilde{\pi}$ et $\theta(\pi,\psi)$ soient isomorphes, si et seulement si $\varepsilon(\pi, 1/2) = 1$.* (Cf. [11], th. 1; [13], prop. 22; [6], th. A1).

4.2. Soit $(\tilde{\pi}, \tilde{E}) \in \tilde{A}_{00}$. Si $\Theta(\tilde{E}, \psi, G) \neq \{0\}$, notons $\theta(\tilde{E}, \psi, G)$ la représentation de $\mathscr{H}(G, A)$ dans cet espace. Notons $\theta^0(\tilde{\pi}, \psi)$ la représentation $\bigotimes_v \theta^0(\tilde{\pi}_v, \psi_v)$ de $\mathscr{H}(\mathrm{PGL}_2, A)$ (cf. 3.4), et $L(\tilde{\pi}, \psi, s)$ sa fonction L (elle est "automorphe" en vertu du (3) ci-dessous).

THÉORÈME 2. (1) *$\Theta(\tilde{E},\psi,G) \neq \{0\}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) *$L(\tilde{\pi}, \psi, 1/2) \neq 0$,*

(ii) *pour toute place v de F où $M(F_v)$ est déployée, $\tilde{\pi}_v \in \tilde{A}_v(\psi_v)$,*

(iii) *pour toute place v de F où $M(F_v)$ n'est pas déployée, $\tilde{\pi}_v \in \tilde{A}'_v(\psi_v)$.*

(2) *Si $\Theta(\tilde{E}, \psi, G) \neq \{0\}$, les représentations $\theta(\tilde{E}, \psi, G)$ et $\bigotimes_v \theta(\tilde{\pi}_v, \psi_v, G(F_v))$ sont isomorphes, et $\mathrm{JL}(\theta(\tilde{E}, \psi, G)) = \theta^0(\tilde{\pi}, \psi)$.*

(3) *Il existe $(\pi, E) \in A_0(\mathrm{PGL}_2)$ tel que π et $\theta^0(\tilde{\pi}, \psi)$ soient isomorphes.* (Cf. [13], prop. 21. La démonstration de ces théorèmes utilise les résultats de Flicker [1]).

4.3. Les applications $E \mapsto \Theta(E, \psi)$ et $\tilde{E} \mapsto \Theta(\tilde{E}, \psi, G)$ sont des bijections réciproques entre les sous-ensembles de $A_0(G)$ et $\tilde{A}_{00}$ où elles ne s'annulent pas. On note que si $G \neq \mathrm{PGL}_2$, le diagramme suivant *n'est pas* commutatif

$$\begin{tikzcd} A_0(G) \arrow[d, "\mathrm{JL}"'] \arrow[dr, "\Theta(\cdot,\psi)"] & \\ A_0(\mathrm{PGL}_2) \arrow[r, "\Theta(\cdot,\psi)"'] & \tilde{A}_{00} \end{tikzcd}$$

(les applications Θ sont restreintes aux sous-ensembles ci-dessus...)

5

On donne ici des applications des résultats précédents à l'étude de $\tilde{A}_{00}$.

5.1. THÉORÈME 3 (*de multiplicité* 1). *Soient $(\tilde{\pi}_i, \tilde{E}_i) \in \tilde{A}_{00}$, pour $i = 1, 2$. Supposons $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ isomorphes. Alors $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2$.* ([11], p. 131).

5.2. Soient $(\tilde{\pi}_i, \tilde{E}_i) \in \tilde{A}_{00}$, pour $i = 1, 2$. On dit que $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ sont proches si $\tilde{\pi}_{1,v} \simeq \tilde{\pi}_{2,v}$ pour presque toute place v de F (cf. [3], § 6). Cela définit dans $\tilde{A}_{00}$ une relation d'équivalence, dont on peut décrire les classes. Pour $(\tilde{\pi}, \tilde{E}) \in \tilde{A}_{00}$, notons $\Sigma_{\tilde{\pi}}$ l'ensemble des places v de F telles que la classe d'équivalence de $\tilde{\pi}_v$ (pour la relation $\mathscr{R}$, cf. 3.3) a 2 éléments. C'est aussi l'ensemble des places v telles que $\theta^0(\tilde{\pi}_v, \psi_v)$ est dans l'image de l'application JL, où ψ_v est un caractère quelconque. L'ensemble $\Sigma_{\tilde{\pi}}$ est fini.

THÉORÈME 4. *Soit* $(\tilde{\pi}, \tilde{E}) \in \tilde{A}_{00}$.

(1) *Soit* $(\tilde{\pi}', \tilde{E}') \in \tilde{A}_{00}$. *Supposons* $\tilde{\pi}$ *et* $\tilde{\pi}'$ *proches. Alors il existe un sous-ensemble* $\Sigma \subset \Sigma_{\tilde{\pi}}$ *tel que*

(i) Σ *a un nombre pair d'éléments,*

(ii) *si* v *est une place de* F, *on a* $\tilde{\pi}'_v \simeq \tilde{\pi}_v$ *si* $v \notin \Sigma$, $\tilde{\pi}'_v \simeq \mathscr{R}\tilde{\pi}_v$ *si* $v \in \Sigma$.

(2) *Soit* $\Sigma \subset \Sigma_{\tilde{\pi}}$, *vérifiant* (i). *Il existe* $(\tilde{\pi}', \tilde{E}') \in \tilde{A}_{00}$ *vérifiant* (ii) ([13], cor. 2 à la prop. 19).

6

On donne ici des applications arithmétiques des résultats précédents. Le point central est le (1) du théorème 1, plus exactement sa démonstration qui utilise le calcul des coefficients de Fourier des fonctions $\theta_{\psi,f,\varphi}$.

6.1. THÉORÈME 5. *Soient* $(\pi, E) \in A_0(\mathrm{PGL}_2)$, Σ *un ensemble fini de places de* F. *Supposons* $\varepsilon(\pi, 1/2) = 1$. *Alors il existe un caractère quadratique* χ *de* $F^\times \backslash A^\times$ *tel que*

(i) $L(\pi \otimes \chi, 1/2) \neq 0$,

(ii) *pour toute place* $v \in \Sigma$, $\chi_v = 1$ ([13], th. 4).

6.2. Supposons désormais $F = \mathbf{Q}$. On peut calculer les coefficients de Fourier des formes modulaires holomorphes de poids demi-entier. Des valeurs de fonctions L interviennent dans les formules obtenues (cf. [12] et aussi [5] qui utilise d'autres méthodes).

6.3. Vignéras en a déduit le théorème de rationalité suivant. Notons ∞ la place réelle de $\mathbf{Q}$. Soit $(\pi, E) \in A_0(\mathrm{PGL}_2)$, tel que π_∞ soit de la série discrète de poids k (k pair $\geqslant 2$). Notons $\mathbf{Q}(\pi)$ le sous-corps de $\mathbf{C}$ engendré par les valeurs propres des opérateurs de Hecke T_p agissant dans E, pour presque tout p. C'est une extension finie de $\mathbf{Q}$ totalement réelle. Soit S_π la réunion de $\{\infty\}$ et de l'ensemble des places finies p de $\mathbf{Q}$ telles que

π_p soit ramifiée (i.e. n'admet pas de vecteur invariant par le sous-groupe compact maximal standard de $\mathrm{PGL}_2(Q_p)$). Si χ est un caractère quadratique de $Q^\times \backslash A^\times$, on note D_χ le discriminant de l'extension quadratique de Q associée à χ.

THÉORÈME 6. *Soient χ_1, χ_2 deux caractères quadratiques de $Q^\times \backslash A^\times$. Supposons*

(i) $\chi_{1,v} = \chi_{2,v}$ *pour toute place* $v \in S_\pi$,

(ii) $L(\pi \otimes \chi_2, 1/2) \neq 0$.

Alors il existe $q \in Q(\pi)$ *tel que*

$$L(\pi \otimes \chi_1, 1/2) D_{\chi_1}^{(k-1)/2} = q^2 L(\pi \otimes \chi_2, 1/2) D_{\chi_2}^{(k-1)/2}$$

([10], p. 333).

Bibliographie

[1] Flicker Y., Automorphic Forms on Covering Groups of GL(2), *Invent. Math.* **57** (1980), pp. 119–182.

[2] Gelbart S., *Weil's Representation and the Spectrum of the Metaplectic Group*, Springer Lecture Notes **530**, 1976.

[3] Gelbart S. and Piatetski-Shapiro I. I., *Some Remarks on Metaplectic Cusp Forms and the Correspondences of Shimura and Waldspurger*, preprint.

[4] Jacquet H. and Langlands R. P., *Automorphic Forms on* GL(2), Springer Lecture Notes **114**, 1970.

[5] Kohnen W. and Zagier D., Values of L-series of Modular Forms at the Center of the Critical Strip, *Invent. Math.* **64** (1981), pp. 175–198.

[6] Piatetski-Shapiro I. I., Notes d'un cours à Maryland, à paraitre au *Israel Jour. of Math.*

[7] Rallis S. and Schiffmann G., Représentations supercuspidales du groupe métaplectique, *J. Math. Kyoto Univ.* **17** (1977), pp. 567–603.

[8] Shimura G., Modular Forms of Half Integral Weight, in: *Modular Functions of One Variable I*, Springer Lecture Notes **320**, 1973.

[9] Shintani T., On Construction of Holomorphic Cusp Forms of Half Integral Weight, *Nagoya Math. J.* **58** (1975), pp. 83–126.

[10] Vignéras M. F., Valeur au centre de symétrie des fonctions L associées aux formes modulaires, in: *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1979–80*, Progress in Math. **12**, Birkhäuser, 1981.

[11] Waldspurger J.-L., Correspondance de Shimura, *J. Math. Pures Appl.* **59** (1980), pp. 1–133.

[12] Waldspurger J.-L., Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, *J. Math. Pures Appl.* **60** (1981), pp. 375–484.

[13] Waldspurger J.-L., *Correspondances de Shimura et quaternions*, preprint.

[14] Weil A., Sur certains groupes d'operateurs unitaires, *Acta Math.* **111** (1964), pp. 143–211.