Comparaison d'intégrales orbitales pour des groupes p-adiques

JEAN-LOUP WALDSPURGER

Université Paris 7, CNRS
2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05
France

I. Les problèmes

(a) Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, à corps résiduel fini, et G un groupe réductif connexe défini sur F. Munissons $G(F)$ d'une mesure de Haar. Plus généralement, pour tout sous-groupe fermé unimodulaire $H \subset G(F)$, munissons H d'une mesure de Haar et $H\backslash G(F)$ de la mesure quotient. Notons $\mathcal{C}_c^\infty(G(F))$ l'espace des fonctions sur $G(F)$, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact. Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F))$ et $x \in G(F)$, posons

$$\phi^G(x,f) = \int_{Z_G(x)^\circ(F)\backslash G(F)} f(y^{-1}xy)dy$$

où $Z_G(x)^\circ$ est la composante neutre du commutant de x dans G. L'intégrale est absolument convergente ([Rao]). Fixons un ensemble de représentations $U^G \subset G(F)$ des classes de conjugaison unipotentes, pour la conjugaison par $G(F)$.

PROPOSITION (Shalika [Sha]). *Pour tout $u \in U^G$, il existe une fonction Γ_u^G sur $G(F)$, dont le germe au voisinage de 1 est uniquement déterminé, de sorte que pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F))$, il existe un voisinage V_f de 1 dans $G(F)$ tel que, pour tout $x \in V_f$, on ait l'égalité*

$$\phi^G(x,f) = \sum_{u \in U^G} \Gamma_u^G(x)\phi^G(u,f).$$

Ces fonctions Γ_u^G sont appelées *germes de Shalika*. Le premier problème (et le plus profond) est le :

PROBLÈME A. *Calculer les germes de Shalika Γ_u^G.*

(b) Notons $G(F)_{\mathrm{freg}}$ l'ensemble des éléments fortement réguliers de $G(F)$ (i.e. les $x \in G(F)$ dont le commutant est un tore) et $\bar{F}$ la clôture algébrique de F. Soit T un sous-tore maximal de G (défini sur F). Pour $x \in T(F) \cap G(F)_{\mathrm{freg}}$, l'ensemble $\{y^{-1}xy; y \in (T\backslash G)(F)\}$ est la classe de conjugaison stable de x, i.e. l'ensemble des $x' \in G(F)$ conjugués à x dans $G(\bar{F})$. Le groupe $G(F)$ agit naturellement sur

Proceedings of the International Congress
of Mathematicians, Zürich, Switzerland 1994
© Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland 1995

$(T\backslash G)(F)$. L'ensemble des orbites s'identifie naturellement à un sous-groupe de $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), T(\bar{F}))$. Notons $k(T/F)$ le groupe dual de ce sous-groupe. Chaque élément de $k(T/F)$ définit une fonction sur $(T\backslash G)(F)$. Munissons $(T\backslash G)(F)$ d'une mesure déduite d'une forme différentielle invariante sur $T\backslash G$. Pour $\kappa \in k(T/F)$, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F))$ et $x \in G(F)$, posons

$$\phi^{G,\kappa}(x,f) = \int_{(T\backslash G)(F)} \kappa(y) f(y^{-1}xy)dy.$$

Pour $\kappa = 1$, on écrit $\phi^{G,st}$ au lieu de $\phi^{G,1}$. On conjecture que les intégrales $\phi^{G,\kappa}$ sont égales à des intégrales $\phi^{H,st}$ sur des groupes H plus petits que G, ses "groupes endoscopiques".

Fixons une forme intérieure G^* de G, quasi-déployée sur F, et un isomorphisme "intérieur" $\psi: G \to G^*$. Notons ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_F$ le L-groupe de G ([B] I.2). Soit $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ une donnée endoscopique de G ([LS1] 1.2) : H est un groupe réductif connexe sur F, quasi-déployé, $\mathcal{H}$ est une extension scindée de W_F par $\hat{H}$, s est un élément semi-simple de $\hat{G}$, $\xi: \mathcal{H} \to {}^LG$ est un L-homomorphisme injectif tel que $\xi(\mathcal{H}) \subset Z_{L_G}(s)$, et $\xi(\hat{H}) = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$. Il y a une application naturelle

$$\left\{\begin{array}{c}\text{classes de conjugaison}\\ \text{semi-simples dans } H(\bar{F})\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{classes de conjugaison}\\ \text{semi-simples dans } G(\bar{F})\end{array}\right\}.$$

On dit qu'un élément de $H(F)$ est fortement G-régulier si l'image de sa classe est la classe d'un élément fortement régulier de $G(\bar{F})$. Notons $H(F)_{G-\mathrm{freg}}$ l'ensemble de ces éléments. Supposons pour simplifier $\mathcal{H} = {}^LH$ (cf. [LS1] 4.4 pour le cas général). Pour $y \in H(F)_{G-\mathrm{freg}}$ et $x \in G(F)_{\mathrm{freg}}$, on définit un facteur de transfert $\Delta(y,x)$ ([LS1] §3). Il n'est non nul que si les classes sur $\bar{F}$ de y et x se correspondent. Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F))$ et $y \in H(F)_{G-\mathrm{freg}}$, on pose

$$\phi^{G,H}(y,f) = \sum_x \Delta(y,x)\phi^G(x,f)$$

où l'on somme sur un système de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $G(F)_{\mathrm{freg}}$. Supposons qu'il existe x tel que $\Delta(y,x) \neq 0$. Fixons un tel x, posons $T = Z_G(x)$. On montre qu'il existe $\Delta_0 \in \mathbb{C}^\times$ et $\kappa \in k(T/F)$ tels que

$$\phi^{G,H}(y,f) = \Delta_0 \phi^{G,\kappa}(x,f).$$

PROBLÈME B. *Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F))$. Existe-t-il un "transfert" $f_H \in \mathcal{C}_c^\infty(H(F))$ tel que pour tout $y \in H(F)_{G-\mathrm{freg}}$, on ait l'égalité $\phi^{H,st}(y,f_H) = \phi^{G,H}(y,f)$?*

Pour $u \in U^G$ et $y \in H(F)_{G-\mathrm{freg}}$, posons

$$\Gamma_u^{G,H}(y) = \sum_x \Delta(y,x)\Gamma_u^G(x),$$

où la somme est comme ci-dessus. Quand $G = H$, on écrit $\Gamma_u^{G,st}$ au lieu de $\Gamma_u^{G,G}$.

PROBLÈME B'. *Soit $u \in U^G$. Le germe $\Gamma_u^{G,H}$ est-il combinaison linéaire de germes $\Gamma_v^{H,st}$ pour $v \in U^H$?*

Langlands et Shelstad on montré qu'une réponse affirmative à cette question pour tout couple (G, H) impliquait l'existence du transfert ([LS3) 2.3).

(c) Soient G et H comme ci-dessus, supposons toujours $\mathcal{H} = {}^L H$, supposons de plus G et H quasi-déployés, déployés sur une extension non ramifiée de F, et qu'il existe une telle extension E/F et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}^L H & \xrightarrow{\xi} & {}^L G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{H} \rtimes \mathrm{Gal}(E/F) & \xrightarrow{\xi_E} & \hat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(E/F) \end{array}$$

Soient K_G un sous-groupe compact maximal hyperspécial de $G(F)$ et $\mathbb{H}(G, K_G)$ l'algèbre des fonctions sur $G(F)$, à valeurs complexes, à support compact et biinvariantes par K_G. Notons $\hat{G}_{ss}$ l'ensemble des éléments semi-simple de $\hat{G}$, $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Gal}(E/F)$ l'élément de Frobenius et $(\hat{G}_{ss} \times \{\mathrm{Fr}\})/\hat{G}$ l'ensemble des classes de conjugaison par $\hat{G}$ dans le sous-ensemble $\hat{G}_{ss} \times \{\mathrm{Fr}\} \subset \hat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$. L'isomorphisme de Satake identifie $\mathbb{H}(G, K_G)$ aux fonctions "polynômes" sur $(\hat{G}_{ss} \times \{\mathrm{Fr}\})/\hat{G}$. Posons des définitions analogues pour le groupe H. Comme ξ_E définit une application

$$(\hat{H}_{ss} \times \{\mathrm{Fr}\})/\hat{H} \longrightarrow (\hat{G}_{ss} \times \{\mathrm{Fr}\})/\hat{G},$$

on en déduit une application $b\colon \mathbb{H}(G, K_G) \to \mathbb{H}(H, K_H)$.

PROBLÈME C ("lemme fondamental"). *Existe-t-il $c \neq 0$ tel que pour toute $f \in \mathbb{H}(G, K_G)$ et tout $y \in H(F)_{G-\mathrm{freg}}$, on ait l'égalité*

$$\phi^{H,st}(y, b(f)) = c\phi^{G,H}(y, f)$$

(cf. [L1] §3, [H3]) *?*

REMARQUES 1. La motivation des problèmes B et C est la stabilisation de la formule des traces de Arthur et Selberg ([L1]). Ce problème s'est posé pour la première fois pour SL(2) dans [Lab-L].

2. On peut généraliser le problème C au cas où l'on se donne un automorphisme θ de G, défini sur F, et un caractère ω de $G(F)$ et où l'on remplace les intégrales $\phi^G(x, f)$ par

$$\phi^G_{\theta,\omega}(x, f) = \int_{Z_{G,\theta}(x)^\circ(F)\backslash G(F)} \omega(y) f(y^{-1} x\theta(y)) dy$$

où $Z_{G,\theta}(x) = \{y \in G; y^{-1}x\theta(y) = x\}$. L'intégrale n'est définie que pour les x tels que $\omega|_{Z_{G,\theta}(x)(F)} = 1$. (Cf. [KS].)

II. Premiers résultats sur les problèmes A et B

(a) Le calcul des germes pour les unipotents réguliers (i.e. les $u \in U^G$ tels que $\dim Z_G(u) = \operatorname{rang} G$) et sous-réguliers (i.e. les $u \in U^G$ tels que $\dim Z_G(u) = \operatorname{rang} G + 2$) a été effectué pour $G = \mathrm{GL}(n)$ et $G = \mathrm{SL}(n)$ par Repka ([Re1, Re2, Re3]).

(b) Si T est un sous-tore maximal de G défini sur F, on dit que T est elliptique s'il n'est pas contenu dans un sous-groupe parabolique propre de G défini sur F.

PROPOSITION (Rogawski [Ro]). *Supposons les mesures convenablement normalisées, soit T un sous-tore maximal défini sur F. Alors le germe Γ_1^G, restreint à $T(F) \cap G(F)_{freg}$, est constant au voisinage de l'unité, égal à 1 si T est elliptique, à 0 si T n'est pas elliptique.*

Notons que, si T n'est pas elliptique, les intégrales orbitales $\phi^G(x, f)$, pour $x \in T(F)$, sont égales à des intégrales $\phi^M(x, f_P)$, où M est un sous-groupe de Levi contenant T d'un sous-groupe parabolique propre P de G défini sur F, et f_P une fonction sur $M(F)$ déduite de f. On peut donc se limiter dans nos problèmes au cas où T est elliptique.

(c) Si $G(F)$ est compact modulo son centre, le problème B' se résout positivement pour tout H ([LS2], corollaire 2.5).

III. La variété des étoiles

(a) Soient T un sous-tore maximal de G défini sur F, B un sous-groupe de Borel de G contenant T, non nécessairement défini sur F, Δ l'ensemble des racines simples de T associé à B, W le groupe de Weyl de T (sur $\bar{F}$). Notons $\mathbb{B}$ la variété des sous-groupes de Borel de G. La variété des étoiles S est l'ensemble des $(B(w))_{w \in W} \in \mathbb{B}^W$ tels que pour tous $w \in W$ et $\alpha \in \Delta$, il existe $y \in G(\bar{F})$ tel que $B(w) = y^{-1}By$, $B(s_\alpha w) \subset y^{-1}P_\alpha y$, où s_α est la symétrie associée à α et P_α le sous-groupe parabolique de G contenant B, de rang semi-simple 1, associé à α. Soit X° l'ensemble des $(x, (B(w))_{w \in W}) \in G \times S$ tels que $x \in B(w)$ pour tout $w \in W$ et x est fortement régulier. Soit X la clôture de X° dans $G \times S$. On a des applications

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G & & T \end{tikzcd}$$

définies ainsi : π est la projection sur le premier facteur; pour $\underline{x} = (x, (B(w))_{w \in W}) \in X$, soit $y \in G(\bar{F})$ tel que $B(1) = y^{-1}By$, alors $\varphi(\underline{x})$ est l'image de yxy^{-1} par la projection naturelle $B \to T$. On peut munir X d'une structure sur F de sorte que π et φ soient définies sur F. Soit $t \in T(F) \cap G(F)_{\mathrm{freg}}$. Alors $\varphi^{-1}(t)(F)$ s'identifie à $(T\backslash G)(F)$. Pour $\kappa \in k(T/F)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F))$, on peut interpréter $\phi^{G,\kappa}(t, f)$ comme une intégrale sur $\varphi^{-1}(t)(F)$. Soit $C \subset T$ une courbe définie sur F, passant par l'origine, de tangente à l'origine en position générale. Soient $Y^\circ = \{\underline{x} \in X^\circ; \varphi(\underline{x}) \in C\}$, Y la clôture de Y° dans X. On peut trouver une désingularisation $p: Y_C \to Y$ telle que l'on puisse appliquer la théorie d'Igusa ([I])

à l'application $\varphi \circ p: Y_C \to C$. On obtient un développement explicite de $\phi^{G,\kappa}(t,f)$, quand $t \in C(F)$ tend vers 1, en termes de parties principales d'intégrales sur les composantes définies sur F de $(\varphi \circ p)^{-1}(1)$. Les orbites unipotentes interviennent de la façon suivante : pour toute composante E de $(\varphi \circ p)^{-1}(1)$, il existe une (unique) orbite unipotente $\mathcal{O}$ de $G(\bar{F})$ telle que les clôtures de Zariski de $\pi \circ p(E)$ et de $\mathcal{O}$ soient égales.

Cette construction, due à Langlands ([L2]), permet le calcul des germes de Shalika quand on connait une description suffisamment maniable de la désingularisation Y_C.

(b) Le calcul a été mené à bien pour $G = \mathrm{SL}(3)$, $\mathrm{SU}(3)$ ([L2], [LS2]), $\mathrm{GSp}(4)$ ([H1]), $\mathrm{Sp}(4)$ ([H4]), G_2 et $\mathrm{SL}(4)$ ([J1,2]); pour G quelconque et une orbite unipotente sous-régulière ([H2]).

(c) L'utilisation de la variété des étoiles a permis à Shelstad de calculer les germes pour les orbites régulières ([S]). Supposons G quasi-déployé, soient $u \in U^G$ un élément régulier, $T \subset G$ un sous-tore maximal défini sur F, $x \in T(F) \cap G(F)_{\mathrm{freg}}$. On note $\Delta(x)$ la valeur absolue du déterminant de $1 - \mathrm{Ad}(x)$ agissant sur le quotient d'algèbres de Lie $(\mathrm{Lie}\, G)(F)/(\mathrm{Lie}\, T)(F)$. Shelstad définit trois éléments $\mathrm{inv}(x)$, $\mathrm{inv}_T(u)$ et $\mathrm{inv}(T)$ de $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), T(\bar{F}))$. On a alors l'égalité

$$\Gamma_u^G(x) = \begin{cases} \Delta(x)^{-1/2}, & \text{si } \mathrm{inv}(x) = \mathrm{inv}_T(u)/\mathrm{inv}(T), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

(il s'agit de l'égalité des germes de ces fonctions au voisinage de 1).

IV. Le cas de $\mathrm{GL}(n)$

Rappelons la définition suivante. Soient F'/F une extension finie, $\mathbb{F}'$ et $\mathbb{F}$ les corps résiduels des anneaux d'entiers de F' et F, $e(F'/F)$ l'indice de ramification, $v_{F'}$ la valuation normalisée de F' et ω_F une uniformisante de F. Soit $x \in F'^{\times}$. On dit que x est F'/F-cuspidal si $\mathrm{pgcd}(v_{F'}(x), e(F'/F)) = 1$ et si la réduction de $x^{e(F'/F)}\omega_F^{-v_{F'}(x)}$ engendre $\mathbb{F}'$ sur $\mathbb{F}$.

Soit T un sous-tore maximal elliptique de $G = \mathrm{GL}(n)$, défini sur F. Identifions $T(F)$ au groupe multiplicatif d'une extension E/F de degré n. Pour tout $u \in U^G$ et tout $x \in E^{\times}$ tel que x soit régulier et $v_E(x-1) > 0$, on définit $\Gamma_u^G(x)$ (cf. plus loin section VI(a)). Supposons E/F modérément ramifiée et $n > 1$. Soit $x \in E^{\times}$, régulier, tel que $v_E(x-1) > 0$. Il existe alors $z \in F^{\times}$, y et $x' \in E^{\times}$ tels que

(i) $x = z(1 + yx')$;

(ii) en posant $F' = F(y)$, y est F'/F-cuspidal;

(iii) $v_F(z-1) > 0$, $v_E(x'-1) > 0$.

Fixons de tels éléments. Soit $G' = Z_G(y)$. Alors $G'(F) \simeq \mathrm{GL}(n', F')$, où $n' = [E : F']$. Pour tous $u \in U^G$, $u' \in U^{G'}$, on définit $p(u,u') \in \mathbb{C}$ et l'on montre que

$$\Gamma_u^G(x) = \sum_{u' \in U^{G'}} p(u,u')\Gamma_{u'}^{G'}(x').$$

Les $p(u,u')$ s'explicitent en fonction des constantes de structure de l'algèbre de Hall des groupes linéaires sur un corps fini. La formule ci-dessus fournit un calcul, par récurrence sur n, des germes pour $\mathrm{GL}(n)$ ([W1,2]).

V. Résultats sur le lemme fondamental

(a) Le problème est résolu pour certains groupes de petit rang : SL(2) ([Lab-L]), U(3) ([BR], [K4]), GSp(4) ([We]).

(b) Pour $G = \mathrm{GL}(n)$, Drinfeld a calculé les intégrales orbitales de certaines fonctions $f \in \mathbb{H}(G, K_G)$ (il n'a pas publié ce calcul, cf. [Lau], theorem 4.6.1).

(c) Soient $G = \mathrm{GL}(n)$, d un diviseur de n, E l'extension non ramifiée de F de degré d, ω un caractère de $F^\times$ dont le noyau est le groupe des normes de $E^\times$. On plonge $H(F) = \mathrm{GL}(n/d, E)$ dans $G(F)$. Pour $x \in H(F)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F))$, on pose

$$\phi^{H,G}(x, f) = \int_{Z_G(x)(F)\backslash G(F)} \omega \circ \det(y) f(y^{-1}xy)dy\,.$$

On définit un transfert $b\colon \mathbb{H}(G, K_G) \to \mathbb{H}(H, K_H)$ et un facteur $\Delta^{H,G}\colon H(F)_{G-\mathrm{freg}} \to \mathbb{C}$. Soit p la caractéristique résiduelle de F, supposons $p > n$. On prouve que pour $x \in H(F)_{G-\mathrm{freg}}$ et $f \in \mathbb{H}(G, K_G)$, on a l'égalité

$$\Delta^{H,G}(x)\phi^{H,G}(x, f) = \phi^H(x, b(f)).$$

La preuve se fait par récurrence comme en section IV ([Ka], [W2]).

Le lemme fondamental pour $\mathrm{SL}(n)$ s'en déduit (pour $p > n$).

(d) Soient G quelconque vérifiant les hypothèses de section I(c), E une extension non ramifiée de F, Fr le Frobenius de E/F. Le groupe $G(F)$ agit sur lui-même par Fr-conjugaison, i.e. par l'application

$$\begin{array}{ccc} G(E) \times G(E) & \longrightarrow & G(E) \\ (y, x) & \mapsto & y^{-1}x(\mathrm{Fr}\, y). \end{array}$$

Pour $x \in G(E)$, on définit sa classe de Fr-conjugaison, sa classe de Fr-conjugaison stable $\mathrm{Cl}^{\mathrm{Fr},st}(x)$, son centralisateur "tordu":

$$Z_{G(E),\mathrm{Fr}}(x) = \{y \in G(E); y^{-1}x(\mathrm{Fr}\, y) = x\}.$$

On définit une "norme" N:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{classes de Fr-conjugaison}\\ \text{stable dans } G(E)\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{classes de conjugaison}\\ \text{stable dans } G(F)\end{array}\right\}$$

(cf. [K2]). On définit aussi un transfert

$$b\colon \mathbb{H}(G(E), K_{G(E)}) \longrightarrow \mathbb{H}(G(F), K_{G(F)}),$$

avec des notations évidentes. Soient $x \in G(E)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(E))$. Supposons que $N(\mathrm{Cl}^{\mathrm{Fr},st}(x))$ soit une classe fortement régulière. On pose alors

$$\phi_{\mathrm{Fr}}^{G(E),st}(x, f) = \sum_{x'} \int_{Z_{G(E),\mathrm{Fr}}(x')\backslash G(E)} f(y^{-1}x'(\mathrm{Fr}\, y))dy$$

où l'on somme sur un système de représentants des classes de Fr-conjugaison dans $\mathrm{Cl}^{\mathrm{Fr},st}(x)$.

On prouve que pour tout $y \in G(F)_{\mathrm{freg}}$ et toute $f \in \mathbb{H}(G(E), K_{G(E)})$, on a les égalités

(i) $\phi^{G(F),st}(y, b(f)) = \phi_{\mathrm{Fr}}^{G(E),st}(x, f)$,
si x est un élément de $G(E)$ tel que $N(\mathrm{Cl}^{\mathrm{Fr},st}(x))$ soit la classe de conjugaison stable de y (alors $\mathrm{Cl}^{\mathrm{Fr},st}(x)$ est uniquement déterminée);

(ii) $\phi^{G(F),st}(y, b(f)) = 0$,
si la classe de conjugaison stable de y n'est pas dans l'image de N ([C]; voir aussi [K1], [AC], [Lab]).

La preuve utilise des arguments globaux (formule des traces). Pour les utiliser, il est essentiel de connaître préalablement le résultat quand f est la fonction caractéristique de $K_{G(E)}$. Ce résultat est dû à Kottwitz ([K2]).

(e) Hales a généralisé la méthode précédente et montré que, dans le cadre de section I(c), le lemme fondamental résultait du même lemme pour la fonction caractéristique de K_G ([H5]).

VI. Résultats reliés

(a) Supposons G classique et quasi-déployé, soit g son algèbre de Lie, que l'on plonge dans une algèbre de matrices. On pose

$$g(F)_{tn} = \{X \in g(F);\ \lim_{n\to\infty} X^n = 0\}.$$

Soit $K \subset G(F)$ le fixateur d'un sommet de l'immeuble de G, on définit son algèbre de Lie $k \subset g(F)$ et l'on pose

$$K_{tu} = \{x \in K;\ \lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1\},$$

où p est la caractéristique résiduelle de F. Supposons donné un homéomorphisme $e\colon k \cap g(F)_{tn} \to K_{tu}$ vérifiant des propriétés proches de celles de l'exponentielle. Pour $u \in U^G$, on définit Γ_u^G sur tout $K_{tu} \cap G(F)_{\mathrm{freg}}$ de sorte que

$$\Gamma_u^G(e(\mu^2 X)) = |\mu|^{d(u)} \Gamma_u^G(e(X))$$

pour tout $X \in k \cap g(F)_{tn}$ tel que $e(X) \in G(F)_{\mathrm{freg}}$ et tout $\mu \in F^\times$ tel que $v_F(\mu) \geq 0$, où $d(u)$ est un certain entier explicite.

PROPOSITION. *Supposons p "assez grand", notons f la fonction caractéristique de K et soit $x \in K_{tu} \cap G(F)_{\mathrm{freg}}$. Alors on a l'égalité*

$$\phi^G(x, f) = \sum_{u \in U^G} \Gamma_u^G(x) \phi^G(u, f).$$

(cf. [W4]).

(b) Dans la situation de section I(c), pour $f \in \mathbb{H}(G, K_G)$ et $x \in G(F)_{\mathrm{freg}}$, on peut exprimer $\phi^G(x, f)$ en termes de la transformée de Satake de f. L'expression fait intervenir des "traces pondérées" de représentations sphériques de $G(F)$ ([W3] dans le cas de $\mathrm{GL}(n)$, [A1], §9 et [A2] dans le cas général). Dans certains cas, on peut aussi donner une expression de $\phi^G(u, f)$, pour $u \in U^G$ ([MA]).

(c) Les notions d'intégrales orbitales, de classe de conjugaison stable, de facteur de transfert etc. se descendent aux algèbres de Lie. Fixons sur $g(F)$ une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_g$ symétrique non dégénérée et invariante par l'action adjointe de $G(F)$ et fixons un caractère $\psi\colon F \to \mathbb{C}^\times$ continu et non trivial. Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(f(F))$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f} \in \mathcal{C}_c^\infty(g(F))$ par

$$\hat{f}(X) = \int_{g(F)} f(Z)\psi(\langle X, Z\rangle_g)dZ$$

pour tout $X \in g(F)$, où dZ est la mesure autoduale. Pour $X \in g(F)$, on définit une distribution $\hat{\phi}^G(X, \cdot)$ par $\hat{\phi}^G(X, f) = \phi^G(X, \hat{f})$ pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(g(F))$. Il existe une fonction $i^G\colon g(F)_{\mathrm{reg}} \times g(F)_{\mathrm{reg}} \to \mathbb{C}$, localement constante, telle que pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(g(F))$, on ait l'égalité

$$\hat{\phi}^G(X, f) = \int_{g(F)} i^G(X, Z)f(Z)\Delta(Z)^{-1}dZ$$

où Δ est l'analogue de la fonction définie en section III(c).

Les distributions $\hat{\phi}^G(X, \cdot)$ doivent être considérées comme des analogues pour l'algèbre de Lie $g(F)$ des caractères de représentations de $G(F)$. Cette interprétation conduit à la conjecture suivante. Dans la situation de section I(b), soit h l'algèbre de Lie de H. On déduit de $\langle\ ,\ \rangle_g$ une forme $\langle\ ,\ \rangle_h$ sur $h(F)$. On définit deux constantes explicites $\gamma_\psi(g)$ et $\gamma_\psi(h)$.

CONJECTURE ([W5]). *Soient $Y \in h(F)_{G-\mathrm{reg}}$ et $Z \in g(F)_{\mathrm{reg}}$. On a l'égalité*

$$\gamma_\psi(h) \sum_{Y', Z'} w(Z')^{-1}\Delta(Z', Z)i^H(Y', Z') = \gamma_\psi(g) \sum_X \Delta(Y, X)i^G(X, Z),$$

où on somme en Y', resp. Z', X, sur un ensemble de représentants des orbites pour l'action adjointe de $H(F)$, resp. $H(F), G(F)$, dans la classe de conjugaison stable de Y, resp. dans $h(F)_{G-\mathrm{reg}}$, dans $g(F)_{\mathrm{reg}}$ et où $w(Z')$ est le nombre d'orbites dans la classe de conjugaison stable de Z'.

Cette conjecture est vérifiée quand Y et Z "tendent vers l'infini". Quand Y et Z "tendent vers 0", elle résout le problème B'.

References

[A1] J. Arthur, *Towards a local trace formula*, in: Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins University Press 1989, 1–24.

[A2] ——, *A local trace formula*, Publ. Math. de l'IHES **73** (1991), 5–96.

[AC] ——, L. Clozel, Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula, Annals of Math. Studies **120**, Princeton University Press, Princeton 1989.

[BR] D. Blasius, J. Rogawski, *Fundamental lemmas for $U(3)$ and related groups*, in: The Zeta functions of Picard modular surfaces, CRM, Montréal, 1992, 395–420.

[B] A. Borel, *Automorphic L-functions*, in: Automorphic forms, representations and L-functions part 2, Proc. of symp. in pure math. **33**, AMS 1979, 27–61.

[C] L. Clozel, *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. J. **61** (1990), 255–302.

[H1] T. Hales, *Shalika germs on* GSp(4), in: Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque **171–172** (1989), 195–256.

[H2] ——, The subregular germ of orbital integrals, Memoirs of the AMS **476**, 1992.

[H3] ——, *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, Contemporary Math. **145** (1993), 109–134.

[H4] ——, *The twisted endoscopy of* GL(4) *and* GL(5)*: transfer of Shalika germs*, prépublication.

[H5] ——, *On the fundamental lemma for standard endoscopy: reduction to unit element*, prépublication.

[I] J. Igusa, Lectures on forms of higher degree, Tata Institute of Fund. Research, Bombay 1978.

[J1] D. Joyner, *On the transfer of Shalika germs for G_2*, prépublication.

[J2] ——, *Langlands-Igusa theory for p-adic* SL(4), prépublication.

[Ka] D. Kazhdan, *On liftings*, in: Lie group representations II, Springer LN **1041** (1984), 209–249.

[K1] R. Kottwitz, *Orbital integrals on* GL(3), Amer. J. Math. **102** (1980), 327–384.

[K2] ——, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49** (1982), 785–806.

[K3] ——, *Base change for unit elements of Hecke algebras*, Compositio Math. **60** (1986), 237–250.

[K4] ——, *Calculation of some orbital integral*, in: The Zeta functions of Picard modular surfaces, CRM, Montréal, 1992, 349–362.

[KS] ——, D. Shelstad, *Twisted endoscopy I: Definitions, norm mappings and transfer factors.*

[Lab] J.-P. Labesse, *Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable*, Duke Math. J. **61** (1990), 519–530.

[Lab-L] J.-P. Labesse, R. P. Langlands, *L-indistinguishability for* SL(2), Can. J. Math. **31** (1979), 762–785.

[L1] R. P. Langlands, *Les débuts d'une formule des traces stable*, Publ. Math. Univ. Paris 7 (1979).

[L2] ——, *Orbital integrals on forms of* SL(3) I, Amer. J. Math. **105** (1983), 465–506.

[LS1] ——, D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. **278** (1987), 219–271.

[LS2] ——, ——, *Orbital integrals on forms of* SL(3) II, Can. J. Math. **41** (1989), 480–507.

[LS3] ——, ——, *Descent for transfer factors*, in: Grothendieck Festschrift II, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1991, 485–563.

[Lau] G. Laumon, *Cohomology with compact supports of Drinfeld modular varieties, part I*, prépublication.

[MA] Magdy Assem, *Some results on unipotent orbital integrals*, Composition Math. **78** (1991), 37–78.

[Rao] R. Rao, *Orbital integrals in reductive groups*, Ann. of Math. **96** (1972), 505–510.

[Re1] J. Repka, *Shalika's germs for p-adic* GL(n)*: the leading term*, Pac. J. Math. **113** (1984), 165–172.

[Re2] ——, *Shalika's germs for p-adic* GL(n)*: the subregular term*, Pac. J. Math. **113** (1984), 173–182.

[Re3] ——, *Germs associated to regular unipotent classes in p-adic* SL(n), Can. Math. Bull. **28** (1985), 257–266.

[Ro] J. Rogawski, *An application of the building to orbital integrals*, Compositio Math. **42** (1981), 417–423.

[Sha] J. Shalika, *A theorem on p-adic semi-simple groups*, Ann. of Math. **95** (1972), 226–242.

[S] D. Shelstad, *A formula for regular unipotent germs*, in: Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque **171–172** (1989), 275–277.

[W1] J.-L. Waldspurger, *Sur les germes de Shalika pour les groupes linéaires*, Math. Ann. **284** (1989), 199–221.

[W2] ——, *Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires: un lemme fondamental*, Can. J. Math. **43** (1991), 852–896.

[W3] ——, *Intégrales orbitales sphériques pour* GL(n) *sur un corps p-adique*, in: Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque **171–172** (1989), 279–337.

[W4] ——, *Homogénéité de certaines distributions sur les groupes p-adiques*, prépublication.

[W5] ——, *Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie p-adiques*, prépublication.

[We] R. Weissauer, *A special case of the fundamental lemma*, prépublication.