Je suis vraiment très heureux de ce prix Abel décerné à mon ami Michel Talagrand et de cette occasion de parler de ceux de ses travaux que je préfère.

Deux mots d'abord sur sa carrière : il n'était pas normalien mais cela ne l'a pas empêché d'être classé premier à l'agrégation en 1974, et la même année il rentre au CNRS comme stagiaire de recherche. Il a soutenu très vite sa thèse d'état en 1977 sous la direction de « son maître » Gustave Choquet, au sein de l'Equipe d'Analyse que l'on appelait familièrement l'équipe Choquet ou le labo Choquet. Après diverses mutations ce « labo » est devenu l'équipe d'analyse fonctionnelle de l'IMJ-PRG sur le site de Jussieu.

Ensuite Michel a fait toute sa carrière au CNRS de stagiaire de Recherche à Directeur de Recherche de 1ère classe. Et cela à Paris 6 (Jussieu) i.e. Sorbonne Université.

***

Michel Talagrand a commencé dans un domaine de l'analyse fonctionnelle qu'on pourrait appeler « théorie de la mesure » ou peut-être « théorie combinatoire de la mesure ».

Dans cette direction son grand talent a été reconnu tout de suite (par Choquet en particulier) mais le domaine était semble-t-il trop étroit pour lui.

Alors autour de 1983, il a pris un grand tournant, il a réinvesti toute son énergie dans la théorie des probabilités et en un temps assez court ses résultats spectaculaires lui ont permis d'atteindre un niveau très supérieur de reconnaissance, en bref il est devenu une des « stars » du domaine. Ses contributions sur le sujet sont massives. Elles forment un ensemble impressionnant pas seulement parce que chacune de ses percées est profonde, mais aussi parce qu'il pousse son idée à fond, chaque papier est long et très complet. Le nombre total de pages publiées seulement dans Annals of Probability (la meilleure revue de proba) est sidérant : plus de 800 pages dans 37 papiers ! et aussi au total 300 articles indistinctement dans toutes les revues (qui sont pour la plupart d'excellentes revues non spécialisées en proba). Quand on sait qu'il est aussi l'auteur de 7 livres (pour lesquels par deux fois il a même refait quelques années plus tard une nouvelle version complètement refondue), on se rend compte qu'il a une puissance de travail absolument invraisemblable.

Ses livres sont disponibles en téléchargement sur son site web, que je ne peux que recommander chaudement aux amateurs. Sa page web est un peu excentrique ! Michel y propose des sommes d'argent pour prix de solution de certains problèmes qui lui ont résisté. S'il pense le problème plus difficile, le prix monte ! Il a déjà dû payer 5000 dollars pour la solution d'un de ses problèmes, le problème de Bernoulli ! Cette « pratique » qui risque d'être coûteuse n'est pas très répandue. Mais Paul Erdös et Walter Rudin le faisaient déjà bien avant Talagrand.

Son premier résultat sensationnel (Acta Math. 1987) est une caractérisation des processus gaussiens à trajectoires continues (ou à trajectoires bornées, les deux questions sont couplées). Par exemple le mouvement brownien est un exemple très particulier de processus gaussien à trajectoires continues. En un sens, l'origine du problème (i.e. celui de caractériser les processus à trajectoires continues) peut être retracée jusqu'à Kolmogorov, Norbert Wiener ou Paul Lévy, des pères fondateurs des probabilités actuelles.

Talagrand montre que les processus Gaussiens à trajectoires continues sont caractérisés par l'existence d'une certaine mesure dite « majorante ». La suffisance de la condition était connue par des travaux fameux de Richard Dudley et Xavier Fernique datant de la décade 1965-1974. Le problème c'était la nécessité.

Il s'agit plus précisément de *minorer*[1] l'espérance du supremum d'un processus gaussien sur un ensemble arbitraire en terme de cette mesure majorante qui est une façon de contrôler l'entropie métrique du processus pour la distance euclidienne, donnée par la variance du processus. Car dans ce point de vue le processus est vu comme une petite partie d'un espace euclidien, (ou un espace de Hilbert de dimension finie) dont on cherche à analyser « l'épaisseur ». L'ensemble des indices (« le temps ») peut être fini si les constantes de l'inégalité de minoration sont uniformes.

Fernique avait résolu le cas stationnaire, dans ce cas la distribution du processus est invariante par translation et alors la mesure de Haar joue le rôle de la mesure « majorante », mais dans le cas général l'absence totale de toute structure sur le processus ne donne aucune idée sur la mesure qu'il faut trouver et la solution semblait donc complètement hors de portée.

Je peux me vanter d'y avoir un peu contribué, comme Michel le raconte lui-même très gentiment, car c'est moi qui lui ai expliqué le problème au début des années 1980, à mon arrivée comme professeur à Jussieu dans la même équipe. J'y avais un peu renoncé à court d'idée et là il m'a estomaqué, il l'a résolu en un temps record. Notre amitié date de cette époque.

Ce théorème a eu un impact majeur, il fera date en probabilité. Mais ce n'était que le début d'un âge d'or pour lui :

Par la suite dans la période 85–95, on distingue deux directions dans ses travaux :

- Les processus Empiriques dans le cadre général introduit par Richard Dudley (solution du problème de Glivenko–Cantelli pour la loi forte des grands nombres, des progrès considérables sur les classes de Donsker pour le Central limit theorem i.e. le Théorème Limite Central).
- Concentration de la mesure (à la suite de Vitali Milman avec lequel il a beaucoup interagi lors de séjours à Ohio State University) et inégalités isopérimétriques sur les espaces produits, produisant des méthodes complètement nouvelles pour estimer la norme de la somme de vecteurs aléatoires (Pub. I.H.E.S. 1995, Invent. 1996). Cela a eu un impact important pour les « probabilités sur les espaces de Banach » (domaine

[1] En fait, il ne s'est pas contenté de cette minoration, par la suite via son « generic chaining » il a complètement transformé les majorations (i.e. les conditions suffisantes). Il a aussi un peu malicieusement reformulé la caractérisation du cas gaussien en éliminant les mesures majorantes.

qu'on appelle maintenant probabilité en grande dimension), sur lesquels Michel travaillait alors avec un autre Michel, Michel Ledoux, mais en fait aussi bien au delà.[2]

Pendant toute cette période plusieurs excursions très fructueuses sur la géométrie des espaces de Banach mais il ne s'attarde pas dans ce domaine.

En 1995, nouveau tournant décisif, il engage maintenant toute son énergie vers les verres de spin (Mean Field Spin Glasses). Bien que faisant partie des probabilités c'est une toute autre histoire ! Car ce sujet était rempli de résultats affirmés par les physiciens mais que l'on ne pouvait pas considérer comme rigoureusement prouvés. Talagrand a rapidement progressé dans ce nouveau territoire un peu dangereux (et un peu ingrat car il n'est pas clair que tous les physiciens accordaient tant d'importance à une « vraie » preuve) et là encore il a atteint un sommet : en 2006 il a réussi à démontrer rigoureusement une formule que les physiciens (Parisi bien sûr et aussi Guerra) avaient découverte, la « formule de Parisi ». La démontrer était vu par beaucoup (en tout cas par les mathématiciens...) comme l'un des problèmes ouverts les plus importants (et les plus difficiles) de cette direction de physique mathématique. Bien évidemment après cette performance sa notoriété déjà grande s'est encore étendue pour englober la communauté mondiale de physique mathématique.

Curieusement, après avoir annoncé à ses amis dubitatifs qu'il abandonnait la recherche, il s'est plongé ces dernières années dans la littérature de physique théorique, a beaucoup lu et a produit un livre étonnant: *What is a quantum field theory? a first introduction for mathematicians. Cambridge University Press, Cambridge, 2022, xv+741 pp.* Ce gros livre est un peu un compte rendu de sa propre auto-initiation à la théorie quantique des champs dans un souci pédagogique que l'on n'attendait pas à ce stade venant d'un tel résolveur de problèmes !

Gilles Pisier

[2] Ledoux et Talagrand ont publié (1991) un livre intitulé « Probability in Banach spaces » qui a eu un impact considérable sur le domaine comme le montre le nombre important de citations et la réédition.