Un arithméticien contre l'arithmétisation :
les principes de Charles Hermite

Charles Hermite (1822–1901) est unanimement considéré comme l'un des mathématiciens les plus importants du XIX^{e} siècle. Au centre de la vie mathématique française dans la deuxième moitié du siècle (il est membre de l'Académie des sciences dès 1856, maître de conférences à l'Ecole normale supérieure, puis professeur à l'Ecole polytechnique et à la Sorbonne dans les années 70), il a tissé un immense réseau international de correspondants et de visiteurs, vers l'Italie, les USA, l'Allemagne, la Russie, la Suède, la Bohème, etc. Il est aussi l'unique Français à figurer parmi « les grands théoriciens des nombres » du XIX^{e} siècle dont le nom saute à l'esprit d'André Weil[1] . Or, c'est le moment où la théorie des nombres déploie un large spectre de questions qui vont intéresser, voire provoquer, la recherche sur les fondements: extension de lois classiques à de nouveaux domaines (arithmétique des grandeurs), création de nouveaux objets (nombres idéaux, corps de nombres), modèles de rigueur démonstrative (les *Disquisitiones arithmeticae*).

Pourtant, Hermite n'est jamais sollicité dans les travaux historiques ou philosophiques sur les fondements : il n'a pas écrit ni ouvrage épistémologique ou logique, ni article théorique consacré à la démonstration ou à la définition mathématique ; il semble sceptique, voire hostile, face aux principales innovations qui serviront de sources aux efforts fondationnels de la fin du XIX^{e} siècle[2] et, selon ses contemporains, il ne s'intéressait même pas à la philosophie mathématique[3] . Mais la correspondance volumineuse d'Hermite et ses écrits les plus techniques abondent en remarques sur ses prédilections en mathématiques, son opinion sur

1. [Weil 1975], p. 1 : « The great number theorists of the last century are a small and select group of men. The names of Gauß, Jacobi, Dirichlet, Kummer, Hermite, Eisenstein, Kronecker, Dedekind, Minkowski, Hilbert spring to mind at once. To these one may add a few more, such as the universal Cauchy, H. Smith, H. Weber, Frobenius, Hurwitz.»

2. Est toujours cité, par exemple, l'extrait de la lettre de Hermite à Thomas Stieljtes, 20 mai 1893, [Hermite & Stieljtes], vol. 2, p. 318 : « Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées. » J'aurai l'occasion de revenir sur l'interprétation à donner de ce passage.

3. Son gendre et collègue Emile Picard écrit ainsi dans son introduction aux *Œuvres* d'Hermite : « Hermite, dans ses leçons, ne s'arrêtait pas à discuter les premiers principes de l'Analyse. Il pensait modestement que les études de Philosophie mathématique, si en honneur aujourd'hui, devaient être de grande importance, puisque tant d'esprits éminents s'y adonnent; mais, malgré toute sa bonne volonté, il ne pouvait arriver à s'y intéresser. » ([Hermite, OC], vol. 1, pp. xxxvi–xxxvii).

leur évolution, les avantages de tel point de vue ou de telle méthode ; leur redondance même témoigne que ces remarques ne sont pas accidentelles, et c'est tout l'avantage d'une interrogation sur les modes de justification que d'offrir un cadre pour ajuster ces propos avec la pratique mathématique d'Hermite. Outre son intérêt propre, l'examen des composantes de cette pratique qui font l'objet d'un tel commentaire, permet de recontextualiser certains épisodes classiques de l'histoire des fondements, et de restituer plus complètement le champ de manoeuvre où ils se sont déroulés.

1. Fondements.

Une première étape consiste à examiner l'utilisation du mot « fondement » dans les textes *publiés* d'Hermite[4]. Une recherche systématique de ce mot dans les quatre volumes des *Œuvres* fait apparaître 9 occurrences seulement, dont cinq dans le dernier volume. Trois d'entre elles apparaissent à propos de Riemann qu'Hermite évoque dans la préface du traité d'Appell et Goursat : l'une est simplement le titre de Riemann « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » ; Hermite évoque aussi la « conception singulièrement originale qui sert de fondement [aux recherches de Riemann], celles des surfaces [de Riemann] » , ainsi que l'idée qui « sert de fondement, joue le principal rôle dans cette recherche arithmétique sur les nombres premiers » (il s'agit ici de l'idée de prolonger la fonction ζ, définie par une série convergente apriori sur un domaine limité, analytiquement à tout le plan complexe[5]. Deux autres occurrences font référence à des ouvrages (de Lamé, de Poncelet) servant de fondement à d'autres travaux des mêmes auteurs[6]. Deux mentions concernent les « fondements de la théorie » des fonctions elliptiques, par Abel et Jacobi en particulier, c'est-à-dire désignent l'établissement des premiers résultats importants[7]. Enfin, deux occurences interviennent dans le contexte de la paramétrisation elliptique des solutions de l'équation du cinquième degré et concerne le fondement d'une méthode : « la première [méthode] a pour fondement la possibilité de ramener l'équation proposée à la réduite $x^5 - x - \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \frac{1+k^2}{k'\sqrt{k}}$ de l'équation modulaire relative à la transformation du cinquième degré » , ou encore « la proposition suivante qui sert de fondement à ma méthode » (il s'agit de

4. Nous rencontrerons aussi quelques utilisations dans les correspondances mais je n'ai pas fait de recherche systématique sur ce corpus. Les occurrences relevées ne contredisent pas la présente analyse.

5. Respectivement, [Hermite OC], vol. 4, p. 565 et p. 558.

6. [Hermite OC], vol. 4, p. 293 et p. 298.

7. [Hermite OC], vol. 1, p. 64 et vol. 2, p. 126.

construction d'invariants d'une forme)[8] .

Autrement dit, le mot « fondement » a un usage local, servant de synonyme banal à « principe » ou « rôle principal » , il désigne souvent un ensemble de résultats, ou le ressort d'une approche. En particulier, il ne se distingue pas de l'emploi des mots de la même famille, comme « fondamental » , « fonder » : on rencontre ainsi une « méthode fondée sur ce caractère de la fonction sim d'être un quotient de fonctions » quasi périodiques (Hermite OC], vol. 1, p. 23), des « théorèmes fondamentaux des fonctions elliptiques » (ibd., p. 35), « un genre de démonstrations fondée sur [certaines considérations] » (ibid., p. 34), etc.

Afin de pouvoir aller plus loin, je me propose de faire d'abord un détour par l'étude des déclarations d'Hermite sur tous les aspects des mathématiques associés d'ordinaire à la question des fondements. Ceci me permettra dans un deuxième temps de cerner les alternatives aux propositions fondationnelles classiques qui sont mises en évidence dans les commentaires d'Hermite ; je m'intéresserai à la fois à leur inscription dans la pratique mathématique, c'est à dire à leur cohérence locale avec des préférences et des orientations d'Hermite dans son travail de mathématicien, et à leurs articulations avec une vision plus large du monde, c'est à dire à leur cohérence locale avec des préférences et des orientations d'Hermite dans sa vie personnelle et sociale. Ouvrir à nouveau le dossier de l'histoire des fondements pour y intégrer cette expérience mathématique, contemporaine mais dissonnante, impose de reformuler nos questions principales : je reviendrai sur ce point dans la conclusion.

Quelques remarques préliminaires me semblent utiles : les phrases d'Hermite sur lesquelles je vais m'appuyer dans ce qui suit sont tout à fait dispersées. Elles proviennent a priori de plusieurs types de sources, articles de recherche, lettres privées, textes de circonstance comme les rapports ou les nécrologies, qu'il faudrait en principe distinguer soigneusement. En fait, dans ce cas spécifique, la séparation de ces types ne va pas de soi : Hermite publie souvent ses recherches sous forme de lettres et l'on constate vite qu'il répète les mêmes commentaires, parfois au mot près, à la même époque, à la fois dans ses correspondances, ses carnets, ses articles[9] . Une grande cohérence s'en dégage, mais elle risque de masquer que certains fragments sont d'interprétation délicate et méritent d'être parcourus à plusieurs reprises pour les contextualiser plus

8. [Hermite OC], vol. 2, p. 347 et p. 358.

9. En revanche, dans le cadre de cet article, je négligerai un aspect important, c'est la chronologie. La majeure partie des lettres disponibles datent des trente dernières années de la vie d'Hermite ; il est plus difficile de documenter les années, disons de 1845 à 1875. Comme nous le verrons, certains éléments semblent rester tout à fait stables depuis ses publications de jeunesse. Pourtant, sa conversion religieuse dans les années 50, la guerre franco-prussienne et la Commune de Paris, avec la proclamation de la république, à laquelle Hermite est très hostile, ont certainement un effet sur l'interprétation plus large de ces éléments : je ne pourrai ici le contrôler et devrai me contenter sur ce

finement : c'est ce que nous ferons à l'occasion, au risque de certaines redites.

2. Une opposition conservatrice

L'origine de la question des fondements est souvent ramenée à un petit nombre d'innovations apparaissant au cours du XIXe siècle : la géométrie non euclidienne, la théorie des ensembles, les fonctions tératologiques, la focalisation sur la rigueur. Les réactions d'Hermite face à ces innovations sont a priori systématiquement négatives.

A Angelo Genocchi, il écrit ainsi le 22 février 1878 :

> Vous êtes, Monsieur, d'une école mathématique qui est aussi la mienne ; tous deux, nous faisons de cette analyse de la bonne vieille roche, qui avant tout veut être simple et claire, en suivant les maîtres qui se nomment Euler, Lagrange, Gauss et Jacobi. A Dieu ne plaise que je veuille diminuer le mérite et le génie des maîtres plus nouveaux, et je ne refuse point mon admiration au génie de Riemann. Mais son influence sur la Science présente me semble moins heureuse que celle des grands inventeurs qui l'ont précédé. [...] Vous avez exprimé sur ces étranges conceptions de la géométrie non euclidienne, de l'espace à courbure constante ou non, etc. une opinion qui est fondamentalement la mienne[10] .

Ou encore, au même, la lettre du 7 février 1884 qui va exactement dans le même sens :

> Je revendique l'honneur d'être votre compagnon parmi les chevaliers de la Manche, qui combattent contre des moulins à vent, et je vous réitère l'expression du plaisir que j'ai eu à lire vos travaux, et vos appréciations que j'adopte pleinement sur la géométrie non euclidienne. Les quaternions dont M. Bischoffsheim a entretenu la Chambre, en me reprochant de n'en rien dire dans mes leçons, m'inspirent à peu près la même horreur que la géométrie chère à M. Hoüel ; nous ne sommes pas, Monsieur, à la hauteur du progrès moderne[11] .

On notera qu'Hermite associe, ici dans une même ironie, géométries non euclidiennes et modernisme, à un moment où l'Eglise et ses institutions menaient un vif combat contre ce dernier.

---

point de ce qui apparaît dans les documents du dernier tiers du siècle.

10. [Hermite & Genocchi], pp. 9–10. Giacomo Michelacci donne p. 10 une bibliographie détaillée des travaux de Genocchi sur (ou plutôt contre) les géométries non euclidiennes, ainsi que des études les concernant ; à sa suite, mentionnons [Conte & Giaccardi 1991], ainsi que les documents fournis dans [Siacci 1889].

11. [Hermite & Genocchi], pp. 122–123, citée également par l'éditeur p. xv. L'allusion à la Chambre concerne une campagne contre les mathématiciens de la Sorbonne, dont les cours furent présentés à la Chambre des députés en 1882 comme fermés aux innovations internationales et dans la presse radicale comme obsolètes (voir les informations de Dugac en commentaire de [Hermite & Mittag-Leffler], 1ère part., pp. 269–270). Les enjeux étaient aussi directement politiques que mathématiques : Charles-Ange Laisant, auteur d'une thèse sur les quaternions, était député radical, et donc opposé politiquement aux catholiques anti-républicains comme Hermite. Un peu plus haut dans sa lettre, celui-ci fustige d'ailleurs la république et « son niveau égalitaire » .

A peu près à la même époque, son accueil des travaux de Cantor est aussi peu encourageant[12] . Hermite les oppose, défavorablement, au long article de Kronecker sur l'arithmétique des domaines de rationalité, « de l'or en barre, qu'on préferera, n'en doutez pas, aux considérations philosophiques de Cantor » [13] , et commente un peu plus tard, alors que Mittag-Leffler cherche à obtenir des mathématiciens français une version satisfaisante de ces articles pour *Acta mathematica* :

> J'ai reçu mission [d'Appell] de vous faire savoir que le 5e mémoire [sur les variétés de points infinies et linéaires], consacré presqu'en entier à exposer un système de notations, lui semble ne contenir en réalité que bien peu de choses ; j'ajoute que nous jugeons absolument contraire à notre esprit mathématique d'exposer pour n'en rien faire un appareil compliqué de nouvelles notions et de nouvelles dénominations[14] .

Un premier niveau d'analyse de ces propos mettrait l'accent sur le refus de fabriquer de nouveaux concepts[15] : en exacte opposition à Cantor ou à Dedekind, Hermite dénie aux mathématiciens le droit d'inventer à leur gré les objets dont ils traitent. Dans une lettre à du Bois Reymond, souvent citée, il précise effectivement :

> Dans les mathématiques qui paraissent le fruit de la liberté intellectuelle la plus complète, nous sommes néanmoins plus serviteurs que maîtres[16] .

Cette expression, « plus serviteurs que maîtres » , revient à plusieurs reprises. A Genocchi, Hermite écrit dans le même sens :

> Je repousse comme de toute fausseté que les géomètres soient les créateurs de leur science [...] Les mathématiques, et tout spécialement l'Analyse abstraite, sont le produit, sont le résultat de l'observation, et non une création arbitraire de notre esprit. Les géomètres me semblent autant les serviteurs que les maîtres de leur science. Leur œuvre même donne naissance à une force qui les dirige et à laquelle à moins de ne plus avancer, ils ne peuvent se soustraire. C'est malgré les plus légitimes répugnances de l'intelligence qu'on a été engagé dans l'emploi des quantités négatives et imaginaires, des quantités imaginaires surtout, dont d'Alembert a dû dire: 'allez en avant et la foi vous viendra'.

---

12. Voir là dessus [Dugac 1976].

13. Lettre à Mittag-Leffler du 8 mars 1883, [Hermite & Mittag Leffler], 1ère part., p. 201. Sur ce mémoire de Kronecker, voir en particulier, [Edwards 1992], [Edwards 1995], [Neumann 2002] et [Boniface 2006].

14. Lettre du 13 avril 1883, [Hermite & Mittag Leffler], 1ère part., p. 210.

15. C'est dans cette direction que s'engagent la plupart des commentateurs, comme Brezinski ou Dugac.

16. Lettre à du Bois-Reymond, 24 mars 1882. Cette lettre est cité par exemple par Brezinski, p. 55, ainsi que par Dugac, dans la même orientation, voir aussi le commentaire de Dugac à [Hermite & Mittag-Leffler], 1ère part., n°75, p. 242. Je rappelle qu'Imre Toth situe aussi dans la question de la liberté l'enjeu des géométries non-euclidiennes, voir [Toth 2000]

> Les généralisations successives d'opérations qui ont leur naissance dans le mécanisme arithmétique, qui de l'addition nous conduisent aux fonctions, ne sont pas à mon avis, des créations de notre esprit, mais un fruit de l'activité intellectuelle, appliqué à des réalités qui existent en dehors et indépendamment de nous et de notre intelligence, comme le monde des sciences physiques et naturelles existe en dehors des physiciens et des naturalistes[17] .

La force à laquelle Hermite fait allusion, nous y reviendrons, est d'origine divine — les convictions catholiques d'Hermite à cette époque se dessinent ici en filigrane — mais elle est avant tout perçue comme extérieure au mathématicien lui-même, qui ne dispose pas pour Hermite de la « filiation divine » dans le pouvoir de créer que lui prêtait Dedekind. Tout en adoptant tout à fait cette analyse, je crois toutefois que le champ d'opposition d'Hermite doit être précisé, en rapprochant ces remarques des critiques de Genocchi. Ce ne sont pas tant les objets mathématiques ou la panoplie des résultats eux-mêmes qui sont en cause, mais plutôt le mode de conceptualisation de ces objets — les « conceptions » évoquées dans la lettre à Genocchi un peu plus haut —, la nature du rapport du mathématicien à ces objets, l'interprétation de ces résultats et ce que cette interprétation pourrait impliquer pour le développement des mathématiques. L'innovation symbolique — c'est-à-dire à la fois celle relative au symbolisme mathématique, aux notations, et celle relative à la symbolisation en tant que processus mental — est donc tout particulièrement visée par ces critiques. Genocchi conclut ainsi son article « Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes » :

> Par l'emploi d'espace à n dimensions dont nous ne pouvons avoir aucune idée, et aussi peut être par la considération des points et des lignes à distance infinie ou imaginaire […] on dépouille la géométrie de ce qui forme son meilleur avantage et son charme particulier, de la propriété de donner une représentation sensible aux résultats de l'analyse et l'on remplace cette qualité par le défaut contraire, puisque des résultats qui n'auraient rien de choquant sous leur forme analytique, n'offrent plus de prise à l'esprit ou paraissent absurdes[18] .

L'attaque de Cantor lui fait bien écho, car, après avoir ramené le travail de Cantor à la seule introduction d'un système de notations et critiqué sa proposition, Hermite poursuit par une critique consonante de la nomenclature de Chasles :

> L'entretien se prolongeant, nous [il s'agit toujours d'Appell et de lui même] nous sommes trouvés avoir les mêmes sentiments de regrets au sujet du langage géométrique de Mr Chasles, et des expressions qu'il a fait adopter comme celles ci : les points circulaires à l'infini, la droite de l'infini, etc. Il n'y a rien à l'infini qui nous échappe absolument, pourquoi donc tant tenir à donner d'un fait algébrique simple et clair par lui-même une image prétentieuse et fausse [19] ?

17. [Hermite & Genocchi], lettre du 19 février 1880, pp. 24–25
18. [Genocchi 1877], pp. 388–389, cité dans [Conte et Giacardi], p. 179.
19. Lettre du 13 avril 1883, [Hermite & à Mittag-Leffler], 1ère part., p. 210.

Les analogies frappantes et nouvelles que la théorie des ensembles ou la géométrie non euclidienne suggèrent à l'imagination mathématique sont ainsi la cible privilégiée des objections d'Hermite, comme de Genocchi ; les deux mathématiciens leur contestent une autonomie potentielle, comme domaines dotés de notions propres susceptibles de fonder de nouvelles représentations[20] ; les « faits » analytiques, les formules sous-jacentes, sont suffisants pour exprimer les résultats désirés, et pédagogiquement plus satisfaisants.

Cette nuance est très nette quand il s'agit pour Hermite de commenter certains travaux de Mittag-Leffler lui-même :

> Je ferai l'étude critique de votre récent mémoire dont Picard et Appell m'ont déjà dit le plus grand bien, leur seule réserve concernant les notions mêmes qui sont dues à Mr Cantor ; nous nous demandons tous si les définitions des nouvelles singularités n'auraient point quelque chose d'artificiel et de factice au lieu de résulter de la nature des choses, comme nous le voudrions[21] .

Il ajoute quelques mois plus tard, à propos du mémoire sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes :

> Deux choses sont à distinguer dans votre travail : les propositions, les résultats auxquels vous êtes parvenu, puis l'exposition que vous en avez faite, c'est à dire le fond et la forme. Pour le fond, je suis certainement l'écho de tous les analystes en reconnaissant qu'il constitue, avec les théorèmes célèbres de Weierstrass, le fondement même de la théorie des fonctions uniformes, et Picard avec qui je m'en suis entretenu partage entièrement mon opinion. Il n'est pas non plus d'un avis opposé au mien pour ce qui concerne la forme sous laquelle vous les présentez et les exposez. Tous deux nous sommes convenus que, en procédant par cette voie qui consiste à partir des notions abstraites entièrement nouvelles pour arriver par un enchaînement de déductions aux réalités de l'Analyse, vous avez obéi à la tendance allemande, à une nature d'esprit qui n'est point la nôtre. Ce qui est un besoin impérieux pour l'esprit français, c'est de procéder en sens inverse, en mettant tout le soin possible à montrer de quelle manière une nouvelle notion résulte des notions antérieures, et à faire assister le lecteur à l'origine, à la naissance des propositions plus générales, comme suite des cas particuliers connus, sans jamais quitter, si je puis dire, la réalité objective[22] .

En continuité avec ce qui a été remarqué plus haut, nous constatons que le fondement des objets du savoir doit se trouver dans une « réalité objective » , doit découler de « la nature des choses » . Penser que l'adoption de nouvelles notions est une pure affaire de forme de présentation, et non par exemple le garant d'un meilleur fondement, est en lui-même un aspect crucial de la position d'Hermite sur la question du langage

---

20. La théorie des ensembles reste d'ailleurs longtemps en France un appendice de la théorie des fonctions, voir [Gispert 1995].

21. Lettre du 12 août 1884, [Hermite & à Mittag-Leffler], 2ème part., p. 91.

22. Lettre du 6 octobre 1884, [Hermite & Mittag Leffler], 2ème part., p. 94. Je ne commenterai pas ici l'attribution à un esprit national, voir là-dessus [Goldstein 2005].

mathématique. Ce dernier reste aussi proche que possible du langage ordinaire, même si Hermite accorde comme nousle verrons un pouvoir heuristique aux calculs. Le fondement d'une théorie n'est pas à chercher dans un concept nouveau, des axiomes bien choisis, une formalisation prouvée des éoncés et des preuves, mais bien dans un résultat, une formule susceptible de livrer le principe organisateur permettant de déduire les principaux théorèmes de la théorie. Certes, il ne s'agit pas plus pour le mathématicien d'inventer une notion comme celle d'ensemble que pour le naturaliste d'inventer ex-nihilo un nouvel organe ou un nouvel organisme : mais en outre, leur travail (commun) consiste soit à détecter des organismes encore inconnus, à l'intérieur d'espèces connues, soit à mettre en évidence par induction des combinaisons caractéristiques de traits, de propriétés, d'organes (ou d'autres objets naturels), c'est-à-dire les résultats donnant la clé de leur fonctionnement général.

La réaction bien connue d'Hermite aux propriétés exotiques des fonctions récemment mises en lumière mérite alors être examinée de plus près. « Effroi » , « horreur[23] » et frustration sont toujours exprimés dans le même genre de situations analogues, en l'occurrence dans des cas très concrets d'erreur ou de désappointement[24] . Le 11 octobre 1881, Hermite se plaint ainsi à Mittag-Leffler, sur un mode humoristique :

> Quelle chose singulière n'est-ce pas que les développements sous forme de série simple, de $\frac{2kK}{\pi}\mathrm{sn}(\frac{2kx}{\pi})$ et $\frac{2kK}{\pi}\mathrm{cn}(\frac{2kx}{\pi})$, donnent de deux manières différentes l'extension à tout le plan, par rapport à q ou à ω, de la même quantité $\frac{2kK}{\pi}$! L'énorme erreur que j'ai commise me fait maintenant envisager avec terreur, comme des êtres dangereux et malfaisants, les fonctions qui ont une ligne de discontinuité[25] .

Ce dont il s'agit est le phénomène suivant, présenté dans [Hermite 1881], pp. 101–103. Les fonctions sn et cn sont les fonctions elliptiques, doublement périodiques, de Jacobi (dans la notation de Gudermann), associées au module k $(0 < k2 < 1)$ — la fonction sn, par exemple, est définie par inversion de l'intégrale $u = \int_0^{sn(u)} (1-t^2)^{1/2}(1-k^2t^2)^{1/2}dt$. Le nombre K est tel que $\mathrm{sn}(K) = 1$, c'est la "demi"-période réelle. En posant comme d'habitude $q = e^{i\pi\omega}$, où ω est le rapport des deux périodes, les expressions directes de $\mathrm{sn}(u)$ et de $\mathrm{cn}(u)$ comme fonctions de ω n'ont de sens que pour Im (ω)>0, mais leurs développements en

23. Peut-être n'est-il pas inutile, au vu de la révérence inspirée par le talent d'Hermite et de ses positions par ailleurs conservatrices, qui conspirent à créer d'Hermite une image austère, et ce faisant à favoriser une interprétation au pied de la lettre de ses écrits, de souligner que toutes ses lettres (en particulier celles concernant les fonctions « récalcitrantes ») manient couramment verve, humour et auto-dérision. La force apparente des mots utilisés doit donc être prise *cum grano salis*.

24. Dans ses commentaires sur [Hermite et Mittag Leffler], 1ère part., p. 133 et note 168, p. 253, Pierre Dugac rapproche d'ailleurs les deux passages mentionnés ci-après.

25. [Hermite & Mittag-Leffler], 1ère part., pp. 132–133.

séries de Fourier correspondent à des séries de q convergentes pour toute valeur de q sauf celles associées à $Im(\omega) = 0$; l'axe des abscisses apparaît ainsi pour ces fonctions, considérées en tant que fonctions de ω, comme une ligne de discontinuité. En posant respectivement $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = 0$ respectivement dans les développements de $\frac{2kK}{\pi}\mathrm{sn}(\frac{2kx}{\pi})$ et de $\frac{2kK}{\pi}\mathrm{cn}(\frac{2kx}{\pi})$, Hermite trouve deux expressions[26] de $\frac{2kK}{\pi}$ en fonction de q dont l'une change de signe, alors que l'autre est invariante lorsqu'on change q en $1/q$. « Que de choses difficiles et délicates se trouvent amenées dans l'étude d'une fonction par la présence d'une ligne de discontinuité ! » , conclut-il. La célèbre déclaration à Stieljtes apparaît dans un contexte de frustration analogue : ayant tiré du développement en série de Fourier de $e^a x/(e^a - 1)$ (pour $0 < x < 1$, a quelconque) les fonctions qui apparaissent comme coefficients dans le développement de cette même expression comme fonction de a, Hermite commente dans sa lettre du 20 mai 1983:

> Mais ces développements, si élégants, sont frappés de malédiction ; leurs dérivées d'ordre 2m+1 et 2m+2 sont des séries qui n'ont aucun sens. L'Analyse retire d'une main ce qu'elle donne de l'autre. Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées et je viens vous féliciter bien vivement de votre merveilleux développement en fraction continue de l'intégrale[27] .

Le point principal n'est nullement d'exclure du champ de travail les fonctions sans dérivées ou les séries ne définissant pas une fonction uniforme dans le plan — le « je me détourne » doit bien être compris ici très localement, comme indiquant un simple changement de sujet *dans la lettre*. Quelques mois plus tôt, Hermite avait d'ailleurs écrit à Mittag-Leffler : « Quelle merveilleuse chose que ces séries discontinues de M. Weierstrass, qui représentent dans des aires séparées des fonctions absolument diverses[28] ! » Il s'agit surtout de mettre l'accent sur les difficultés de la pratique mathématique, lorsqu'elle est confrontée à ces nouveaux phénomènes, alors même que sont maintenus autant que possible les outils analytiques familiers (séries en particulier). « Dans ces nouveaux domaines de l'Analyse où nous pénétrons, on marche vraiment sur des charbons ardents. » ([Hermite & Mittag-Leffler], 1ère part., p. 131.)

---

26. Il est remarquable qu'Hermite continue ici à percevoir les séries formelles en q comme les objets fondamentaux, existant sur tout le plan (sauf l'axe des abscisses), alors même qu'il mentionne, d'après Dedekind, que les valeurs de ces séries en deux points voisins situés de chaque côté de la ligne de coupure peuvent avoir une différence finie non nulle, et qu'il connaît le point de vue de Riemann. Sur le point de vue d'Hermite sur l'analyse, voir [Belhoste 1996].

27. [Hermite & Stieljtes], vol. 2, p. 318.

28. [Hermite & Mittag-Leffler], 24 décembre 1880, 1ère part., p. 87. Dans son article, Weierstrass donnait comme exemple $\Sigma(1/x^{\mu} + 1/x^{-\mu})$; il introduisait aussi la notion d'élément analytique autour d'un point et soulignait que les notions de fonctions analytiques uniformes et de séries ne coïncident pas dans le champ complexe.

Qu'en est-il alors de la question de la rigueur ? Le scénario de base est maintenant familier : la rigueur est associée au modernisme — Hermite évoque par exemple « l'extrême rigueur, aujourd'hui si en honneur », les « exigences toutes modernes en fait de rigueur » — et dans la foulée elle est disqualifiée, encore une fois en des termes hyperboliques : « La rigueur est trop souvent un épouvantail fait pour inspirer l'aversion et l'horreur, donc point trop de rigueur » , écrit Hermite à Genocchi[29] . Pourtant, une fois encore, l'évaluation devient beaucoup plus positive lorsque la rigueur peut apparaître comme naturelle, découlant d'un travail lui aussi naturel sur les choses mathématiques, c'est-à-dire guidé par cette force extérieure dont il a déjà été question :

> C'est, je crois, un caractère des mathématiques de notre époque, que ce besoin de rigueur qui se fait sentir dans toutes les parties de la science, et à cette occasion j'observe qu'il se produit au moment opportun. J'ose même dire qu'antérieurement la vérité complète aurait été moins utile que ces alliages d'erreur et de vérité qui, en dissimulant les difficultés, ont permis par cela même de les attaquer puis d'en triompher [...] une force supérieure à notre volonté libre la dirige et, à travers les écueils, la conduit au vrai[30] . »

Ce qui est rejeté en revanche est la rigueur a priori, qui serait posée comme contrainte originelle au début du travail ou plus encore de l'apprentissage. Hermite trouve donc « très intéressant » un contre-exemple de Schwarz montrant que la définition classique de l'aire d'une surface comme limite des polyèdres inscrits est inexacte, (lettre à Mittag-Leffler du 25 octobre 1882, 1ère part., p. 177), tout en critiquant les tentatives contemporaines pour introduire ces innovations dans l'enseignement :

> Bacon de Vérulam a dit que l'admiration est le principe du savoir. Sa pensée, qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science; et je m'en autoriserai pour exprimer le désir qu'on fasse, pour les étudiants, une part plus large aux choses simples et belles, qu'à l'extrême rigueur, aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante, sans profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt[31] . »

Lorsqu'il apprend que Genocchi désavoue la version de ses propres cours que Guiseppe Peano a éditée, Hermite approuve son opinion en des termes qui montrent bien le lien étroit entre les différentes prises de position que nous avons rencontrées :

> Il y est fait grandement place aux exigences toutes modernes en fait de rigueur. Or est-ce bien dans l'enseignement élémentaire qu'il convient de faire si large place à ces exigences ? Ce serait parfait certainement si la rigueur se conciliait avec une grande simplicité et surtout une extrême clarté, mais dites-le moi, mon

29. [Hermite & Genocchi], lettre du 31 octobre 1884, p. 150.

30. Lettre de juin 1882 à du Bois-Reymond, citée dans [Brezinki 1990], p. 55.

31. Lettre à Jahnke, directeur de l'*Archiv der Mathematik und Physik*, 25 novembre 1900. Repr. in [Hermite OC], vol. 4, p. 544.

> cher Ami, est-ce toujours le cas ? Je suis pour mon compte tellement effrayé de l'appareil compliqué de certaines démonstrations, du mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues (dans les *Annales de l'Ecole normale*) que jamais, de mon plein gré, je ne consentirai à les faire entrer dans mes leçons de la Sorbonne. Je juge que ce serait faire perdre leur temps à mes élèves et quelque soit l'honneur dû à la rigueur, en âme et conscience, j'irai de l'avant, et pour rien au monde je ne consacrerai de longues heures à établir que
>
> $$\frac{\partial^2 u}{dxdy} = \frac{\partial^2 u}{dxdy}$$
>
> et autres belles et grandes choses du même genre. Un mot encore là-dessus. Quelque chose de la marche historique doit subsister dans l'enseignement ; certaines conceptions qui ont servi de transition pour parvenir à d'autres plus profondes, sont d'une intelligence plus facile et doivent, je le crois, être conservées, comme offrant une succession plus naturelle dans les idées, pour conduire par un chemin plus aisé, quoique plus long, aux résultats acquis en dernier lieu. Quel si grand mal y aurait-il à prévenir qu'on remet à la fin du cours ces démonstrations rigoureuses, mais longues et fatigantes, visant certaines circonstances dans le mode d'existence des fonctions, dont on ne peut avoir l'idée qu'à la fin du cours et dont il serait aussi déraisonnable de parler dès le début ? [...Je pense que des notions incomplètes mais immédiatement claires et parfaitement intelligibles valent mieux pour les commençants que l'affreuse scholastique chère aux modernes. L'admiration a dit Bacon de Vérulam est le principe du savoir, or la rigueur est trop souvent un épouvantail fait pour inspirer l'aversion et l'horreur, donc point trop de rigueur[32] .

Il déclinait les mêmes thèmes quelques années plus tôt, cette fois pour contester les choix pédagogiques de Mittag-Leffler :

> Vous allez donc commencer vos leçons à l'université et y donner jusqu'aux fondements[33] de la science, en exposant les vues nouvelles de Mr Weierstrass sur la doctrine des irrationnelles. [...] Je crois mon cher ami, qu'il ne serait point sans péril d'exposer d'emblée à des commençants ces mathématiques nouvelles, si incontestablement meilleures et plus rigoureuses que les anciennes. Mon sentiment est qu'il faut d'abord préparer à ces nouvelles théories et suivre l'ancienne route, en montrant soit des erreurs, soit des insuffisances des démonstrations laissées longtemps inaperçues, en annonçant que d'autres méthodes les feront disparaître. Et la raison est que quelque chose du développement historique de la science doit se retrouver dans l'enseignement ; je m'explique. C'est un fait d'expérience absolument certain, que l'erreur a été bien souvent plus utile que des vérités parfaites, pour la marche de l'esprit et le progrès de la science. N'a—t-on pas été bien heureux jusqu'ici d'avoir cru à tort que toute fonction continue admet nécessairement une dérivée, que totue équation différentielle admet une solution, et plus anciennement que toute fonction est développable par la formule de MacLaurin? J'en tire, peut être en me trompant, la conclusion que l'appareil si complexe de la rigueur moderne, et le caractère abstrait qu'elle revêt, peut n'être pas aboslument profitable pour les commençants, ou du moins qu'il est utie de reléguer à la fin, en la réservant pour le couronnement de l'édifice, cette rigueur, qui n'est point toujours suffisamment instructive[34] .

32. Lettre du 31 octobre 1884, [Hermite & Genocchi], p. 150.

33. On trouve ici un exemple d'un usage plus attendu du mot « fondements » dans la correspondance, mais on remarquera qu'il s'applique ici à quelqu'un d'autre, et que le point de vue décrit est rapidement disqualifié.

34. [Hermite & Mittag-Leffler], 1$^{\text{ère}}$ part., pp. 130–131, lettre du 27 septembre 1881. Cf. aussi la lettre du 21 octobre 1881, ibid., p. 135.

Ce qui est condamné n'est donc pas la rigueur, qui est susceptible de faire surgir des propriétés cachées ou des phénomènes inconnus, mais l'a-priorisme au sens philosophique (identifié ici à l'abstraction), les fondements posés comme commencements. Dans la foulée, Hermite désapprouve particulièrement, comme on pouvait s'y attendre, les versions fortes du programme d'arithmétisation, c'est-à-dire l'exigence exprimée par Kronecker de refaire toutes les mathématiques à partir de la seule notion d'entier naturel[35] . Il les présente de manière caractéristique comme des « vues nouvelles » , en opposition avec des « recherches » — l'expression, que nous venons de rencontrer à propos de Weierstrass, souligne que c'est bien le mode de conceptualisation qui est en cause :

> Je viens vous dire que je savais déjà, par une lettre de Mr du Bois-Reymond, que Mr Kronecker veut faire table rase dans l'Analyse en chassant la notion des quantités incommensurables comme la croyance mystique d'une époque à tout jamais oubliée dans la science. J'ai été, je puis bien le dire, bien placé pour apprécier la puissance d'invention, la portée d'esprit de Mr Kronecker, et mon admiration pour ses découvertes dans les plus hautes régions de l'arithmétique ne le cède à aucune autre. Ayant reçu de l'éminent géomètre une lettre dans laquelle il me fait part de ses nouvelles vues, je lui ai répondu en lui rappelant d'anciens souvenirs, et des efforts faits en commun il y a bien des années sur les modules singuliers de la théorie des fonctions elliptiques ; pour éviter de prendre le taureau par les cornes, je lui ai dit que je mettais encore plus de prix à ces belles et profondes recherches, qu'à ses nouvelles vues dont je ne conteste pas d'ailleurs l'intérêt, et j'espère que ma réserve n'a pas été prise par lui en mauvaise part[36] .

3. Du travail mathématique selon Hermite

Ces réactions multiples, mais bien coordonnées, permettent de restituer en creux les justifications d'Hermite en tant qu'opposant contre les manifestations primitives et déjà variées du modernisme mathématique — et de la réflexion sur les fondements qui s'y coordonne. Je voudrais maintenant essayer de reconstituer l'autre versant de chacune de ces oppositions, c'est-à-dire les propositions alternatives d'Hermite pour le travail mathématique, et de les montrer en action.

Mots clés

Les extraits déjà cités témoignent d'un usage fréquent de certains notions-clés qui les fait apparaître comme des signaux efficaces pour repérer ce qu'Hermite évalue positivement. La panoplie est restreinte : il s'agit surtout du couple « clarté » et « simplicité » , avec leurs dérivés et variantes (éclaircir, clair, pour le premier par exemple), et, avec un décalage d'emploi, de « fécond » ou « fertile » . Nous avons déjà rencontré, par

35. Le *locus classicus* sur l'arithmétisation des mathématiques est sa présentation par Félix Klein, [Klein 1895]. Sur le mouvement dans son ensemble, voir [Jahnke & Otte 1981], [Boniface 2002] et [Petri et Schappacher 2006].

36. lettre à Mittag-Leffler, 24 mai 1885, 2$^{\text{ème}}$ part., p. 104.

exemple, « …cette analyse de la bonne vieille roche, qui avant tout veut être simple et claire » , « un fait algébrique simple et clair par lui-même » , « ce serait parfait certainement si la rigueur se conciliait avec une grande simplicité et surtout une extrême clarté » . Mais les occurrences sont bien plus nombreuses : « J'aime extrêmement les choses simples et claires » , « j'ai la plus haute estime pour le talent [de Mr Schwarz] et ses travaux, où la simplicité, la clarté, le fini de la forme s'ajoutent au mérite du fond » , écrit Hermite à Mittag-Leffler[37] , ou encore, cette fois dans un article de recherche, [Hermite 1854], p. 315 : « C'est dans les méthodes simples et faciles qui se présentent dans cette étude qu'est l'avenir de la science algébrique… » . On trouve dans le tome I des Oeuvres non seulement des « méthodes simples » (p. 154), mais aussi des « faits analytiques très simples » (p. 221), un « procédé si ingénieux et si simple » (p. 257), un « calcul bien simple » (p. 98), une « observation bien simple » (p. 179), etc. Il donne encore « une image claire et sensible » (p. 231), nous invite « à suivre de la manière la plus facile et la plus claire comment les racines de la forme-type changent de nature » (p. 335). Hermite loue les résultats de Jacobi « qui ont ouvert des voies fécondes » ([Hermite OC], vol. 2, p. 81), ou Liouville pour « la grande fécondite [de ses] methodes » ([Hermite OC], vol. 2, p. 81). La contrainte de fécondité joue pourtant un rôle un peu différent des deux autres mots : elle n'est pas toujours explicitée par le mot-clé correspondant et c'est surtout son articulation à d'autres critères, soit pour les conforter, soit pour les corriger, qui la rend efficiente. Hermite commente ainsi:

> Vos résultats sont excellents et à l'encontre de tant d'autres qui avec un grand appareil de formules n'obtiennent presque rien, vous tirez des considérations extrêmement simples et faciles des choses entièrement neuves et du plus grand intérêt[38] .

ou conseille, à Sylvester cette fois :

> Ce qui est aussi important que de découvrir des résultats extrêmement intéressants, c'est d'engager vos élèves et vos collaborateurs de Baltimore dans cette voie féconde, où la théorie des nombres se joint à l'Analyse, à la suite de Gauss et de Jacobi, de Dirichlet et d'Eisenstein[39] .

La citation suivante montre bien la connotation naturaliste de la fécondité selon Hermite, fécondité qui fournit « sans effort » le matériau pour le travail mathématique, en particulier de nouveaux genres d'êtres à observer et à classer :

---

37. [Hermite & Mittag-Leffler], 2$^{\text{ème}}$ part., p. 151 and 2$^{\text{ème}}$ part. p. 148 respectivement.

38. Lettre 166 [Hermite & Stieljtes], pp. 331–332, vol. 1, c. début 1889.

39. [Parshall 1998], p. 221.

> Les fonctions de fonctions que l'on obtiendra par des combinaisons algebriques de ces premières transcendantes seront encore evidemment des fonctions transcendantes, et l'on voit ainsi comment on peut, quoique sans utilité, en multiplier indéfiniment le nombre. C'est en quittant le champ de l'Algèbre et, en quelque sorte, dès l'abord du Calcul integral, qu'on est amené naturellement et sans effort à l'origine veritablement féconde d'une infinité de fonctions nouvelles, distinctes essentiellement les unes des autres, offrant pour chacune d'elles un ordre de notions analytiques propres, en même temps que des caractères communs qui les réunissent en grandes catégories, et dont l'étude approfondie est l'un des objets les plus interessants de la Science actuelle[40] .

L'idée de fécondité peut alors sauver des travaux à première vue peu susceptibles de plaire à Hermite, comme la définition rigoureuse que Weierstrass donne des fonctions à partir d'éléments analytiques et qui a été évoquée plus haut, en ce que cette définition permet de construire des fonctions complexes possédant des propriétés inattendues ; elle peut aussi révéler le caractère authentiquement naturel d'une approche, alors qu'une autre, d'apparence immédiate plus simple, ne sera en fait qu'un artifice :

> L'équation à laquelle nous mène ainsi la notion des formes-types n'a pas la simplicité apparente de la réduite de l'équation du cinquième degré qua obtenue Jerrard, mais elle met en évidence les fonctions des coefficients dont dépend essentiellement la nature des racines, et tandis que l'ingénieuse découverte du géomètre anglais est restée jusqu'ici stérile, nous allons pouvoir immédiatement tirer d'importantes conséquences de notre transformée[41] .

La banalité de ces qualités (simplicité, clarté, fécondité[42]) n'est donc qu'apparente : plus exactement, ils jouent, tout comme dans l'entourage de Felix Klein le mot *Anschauung*, le rôle d'une bannière, ralliant des mathématiciens, des types d'explication, des méthodes. Employés ensemble ou non, assez rarement en association avec d'autres termes (« simple et général » , un peu plus souvent « précis »), ces mots viennent s'opposer de manière récurrente au couple « rigoureux » et « compliqué » [43] . Ainsi dans une lettre à

40. [Hermite OC], vol. 2, p. 126.

41. [Hermite 1854], p. 322.

42. Notons toutefois qu'elles apparaissent à cette époque à d'autres occasions comme des caractéristiques nationales — cf. par exemple le discours de Paul Painlevé à la mort de Poincaré en 1912 : « Et que cet homme fût un des leurs, qu'il fût né en pleine terre lorraine, qu'il parlât leur langue, qu'il déployât, dans son oeuvre si complexe et si difficile, cette clarté, cette concision, cette imagination logique, lucide et simplificatrice qui sont les qualités maîtresses de notre race, c'était pour eux une raison de fierté et de réconfort » , — ainsi que dans des écrits touchant à la religion. Il est à cet égard significatif qu'on les retrouve aussi chez Pierre Duhem, dans une description du travail en physique très proche de celle d'Hermite pour les mathématiques, où la fécondité de la théorie et la clarté des lois servent de garantie au caractère naturel de la classification théorique, voir *La théorie physique, son objet, sa structure*, p. 25. Il serait donc intéressant d'en examiner plus largement les occurrences culturelles, mais ceci sera l'objet d'un autre article.

43. Parfois aussi, en complément autant qu'en opposition, au mot « profond » : c'est celui-ci, significativement, qui est utilisé pour les travaux de Weierstrass.

Genocchi du 19 février 1880 :

> [Monsieur Schering] met en œuvre tout un appareil analytique bien complexe, tandis que votre méthode a au plus haut degré le caractère de simplicité et d'élégance de tout ce qui sort de votre plume[44] ,

ou dans les commentaires sur la rédaction de Peano évoqués plus haut. Clarté et simplicité fonctionnent souvent comme des critères de sélection efficaces pour une approche. Par exemple :

> Cette remarquable simplicité d'expression que prennent par la substitution canonique une multitude de covariants de la forme f, …, justifie, ce me semble l'idée nouvelle des formes canoniques que j'introduis ici[45] .

ou encore dans une lettre à Liouville publiée en 1862, [Hermite 1862], p. 110:

> En parvenant par une autre voie a ces théoremes de M. Kronecker, c'est à l'ordre d'idées qui vous appartient que je pense les avoir rattachés de la manière la plus directe, et, si je ne me trompe, dans le sens même de vos previsions, car la notion arithmétique de classe se trouve remplacée par l'idée beaucoup plus simple et plus élémentaire des formes réduites.

Cette dernière citation est d'autant plus intéressante que la notion de classe[46] serait au contraire privilégiée dans une perspective structuraliste, comme celle héritée de Dedekind, en ce qu'elle ne requiert pas de choix privilégié d'éléments.

Ces critères positifs (simplicité, clarté, fécondité) permettent de repérer les alternatives auxquelles Hermite est favorable, contre le réductionisme et la fondation conceptuelle.

L'unité des mathématiques

Au réductionisme, qu'il se fasse sur des bases ensembliste ou arithmétique, Hermite oppose une conviction profonde de l'unité des mathématiques, garantie sans doute a priori, mais de l'extérieur, et obtenue a posteriori à l'échelle humaine du mathématicien, soit par plongement des différents résultats dans un nouveau domaine ou par les ponts jetés entre les différents résultats et les différentes approches. Ainsi,

---

44. [Hermite & Genocchi], pp. 24–25.
45. [Hermite 1854], p. 309.
46. Il s'agit ici dans la lignée de Lagrange et de Gauss de classes d'équivalence de formes algébriques à changement de variables linéaire, invrsible, à coefficients entiers, près. Les formes réduites en sont des représentants privilégiés, repérées par exemple par des conditions simples sur les coefficients. Une théorie de réduction optimale, comme elle existe avant Hermite pour les formes quadratiques binaires définies, devrait fournir une forme réduite unique par classe, mais ce n'est pas toujours le cas.

Enfin je crois, et l'arithmétique me donnera peut-être un motif à l'appui de mon sentiment, je crois à l'action des forces qui en s'associant à notre libre arbitre, font concourir à ce but déterminé d'avance, et aboutir au même point, des travaux qui se poursuivent à travers des siècles, dans l'ignorance de ce but. Je ne puis assez admirer que Fermat, puis ses successeurs, Euler, Legendre, Gauss, aient été engagés dans ces recherches sur la décomposition des nombres en carrés ; puis dans la théorie des formes quadratiques, qui ne devait être, comme il résulte des beaux travaux de M. Kronecker, qu'une anticipation de la théorie des fonctions elliptiques[47] .

Ce point de vue n'est pas exprimé seulement dans des déclarations aussi générales sur l'évolution des mathématiques, mais il intervient aussi dans l'appréciation de résultats techniques et dans les évaluations qu'Hermite fait du travail d'autrui.

Par exemple, il écrit à Genocchi en juin 1883:

Si l'on désigne par $f(n)$ le nombre des décompositions d'un entier $n \equiv 5 \text{ Mod } 8$, en cinq carrés impairs dont les racines sont supposées positives, on a

$$f(5) + f(13) + \ldots + f(n) = \sum_a E[\frac{\sqrt{n - 4aa'} + 1}{2}].$$

Dans cette formule $E(x)$ représente l'entier contenu dans x, et la somme s'étend à tous les nombres impairs a et a' tels que l'on ait:

$$n - 4aa' > 0.$$

[...] N'est ce pas une chose bien singulière que ce caractère arithmétique propre aux formules de la théorie des fonctions elliptiques, et n'est-on pas en droit d'en conclure que l'Analyse et la théorie des nombres ne sont au fond qu'une seule et même doctrine?[48] .

Et il préconise la remise d'une légion d'honneur à Kronecker en insistant précisément sur cet aspect :

La pensée qui a principalement inspiré Dirichlet se montre dans son mémoire célèbre qui est intitulé sur l'application de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. C'était une révélation qu'il y eut ainsi un lien étroit entre deux régions si éloignées dans le domaine de la science, les nombres entiers d'une part, et de l'autre les variables continues de l'analyse; on pourrait entrevoir dans la découverte de Dirichlet le témoignagne d'une unité porfonde et qui n'avait jamais été soupçonnée entre les branches les plus diverses des mathématiques. Mr Kronecker a poursuivi avec d'éclatants succès les recherches entreprises dans cette voie, et ses travaux ont multiplié les rapports de l'analyse avec l'arithmétique au point que la théorie des formes quadratiques de Gauss et la théorie des fonctions elliptiques forment maintenant un même corps de doctrine[49] .

47. Lettre à Genocchi 19 février 1880, [Hermite & Genocchi], pp. 24–25.

48. [Hermite & Genocchi], p. 98.

49. Lettre pour demander la légion d'honneur pour Kronecker, 19 mai 1882. Dossier Hermite, Archives de l'Académie des sciences, Paris.

Cette estimation, en phase avec la hiérarchisation des travaux de Kronecker que nous avons rencontrée plus haut et qui apparaît encore plus paradoxale une décennie plus tard, au vu de l'évolution de Kronecker lui-même, est encore mise en avant par Hermite lorsqu'il rend hommage au mathématicien berlinois après sa mort, devant l'Académie :

> M. Kronecker a mis en complète évidence que la théorie des formes quadratiques, de déterminant négatif, a été une anticipation de la théorie des fonctions elliptiques, de telle sorte que les notions de classes et de genres, celle des déterminants réguliers et de l'exposant d'irrégularité, auraient pu s'obtenir par l'étude analytique et l'examen des propriétés de la transcendante. Cette correspondance que rien ne pouvait faire prévoir, entre deux ordres si distincts, si éloignés de connaissances mathématiques est une surprise pour l'esprit ; elle appelle l'attention sur la marche de la science, qui nous est en partie cachée, et sur une secrète coordination de nos travaux qui seconde nos efforts et concourt à son développement[50] .

De tels ponts sont mis en valeur à tous les niveaux, entre disciplines mathématiques, mais aussi entre théories ou objets : Hermite note par exemple, en commentant la correspondance fournie par Eisenstein entre classe de formes cubiques et certaines formes quadratiques ([Hermite 1850]) « le rapport digne de remarque entre deux théories qui n'offrent au premeir abord aucun poitn de contact »

La manière dont se renforcent mutuellement conception générale de l'unité mathématique et injonction précise pour la pratique est bien mise en lumière dans ces suggestions à Genocchi:

> A l'imitation de ce qu'Euler a fait avec tant de succès pour la décomposition des nombres en carrés, ne serait-il pas possible de trouver des identités analytiques, équivalentes à [vos propositions arithmétiques] ? De cette manière elles ne représenteraient plus dans le domaine mathématique des provinces isolées et comme des atolls dans l'océan Pacifique; elles acquerraient ce me semble un nouveau degré d'intérêt ens e rattachant à l'Analyse générale qui titrerait grand profit de l'annexion. Je suis extrêmemement frappé de cette mystérieuse concordance d'un si grand nombre de belles découvertes arithmétiques qui se succèdent en s'enchaînant de Fermat à Euler, Lagrange et Gauss, avec la théorie des fonctions elliptiques, dont nous voyons maintenant qu'elles n'ont été qu'une anticipation. Au risque de vous sembler bien mystique, je ne puis m'empêcher de reconnaître comme l'action d'une force agissant en dehors et au-dessus des géomètres, qui coordonne leurs efforts et les dirige vers un but qu'ils ne soupçonnent point, lorsqu'à deux siècles d'intervalle et en poursuivant des objets si différents, je les vois se rencontrer dans les mêmes résultats[51] .

Exactement de la même façon, la « voie féconde » où il engage comme nous l'avons vu Sylvester à Baltimore est celle de l'union de la théorie des nombres et de l'analyse, car, « à [son] sentiment, la théorie des formes

50. [Hermite 1892].

51. [Hermite & Genocchi], lettre du 28 mars 1883, p. 91. La lettre se poursuit directement sur le thème de la servitude du mathématicien, déjà rencontré: « [Ces faits] enseignent à mon avis que dans cet ordre de travaux qui seblent ne relever absolument que du libre arbitre, nous sommes cependant serviteurs autant que maîtres, et que pour notre grand avantage, notre liberté que je n'entends pas restreindre est subordonnée. »

quadratiques de Gauss n'est à beaucoup d'égards qu'une anticipation de la théorie des fonctions elliptiques et par le fait il est prouvé que c'est à cette théorie que sont dus tous les résultats depuis Gauss et Dirichlet. » ([Parshall 1998], p. 221.)

Un indice supplémentaire témoigne de ce que cette conception unitaire ne doit pas être confondue avec une optique fondationnelle réductioniste : c'est la valeur positive accordée par Hermite à la multiplicité des points de vue et en particulier à celle des preuves « pour éclairer » .

> Les méthodes en Arithmétique son loin de se présenter aussi variées et aussi nombreuses qu'en Analyse, et je ne puis m'empêcher de croire qu'il sera utile de donner pour parvenir aux mêmes conclusions, deux procédés très différents, surtout lorsque le vôtre s'applique à des questions que, par le mien, je ne puis aborder,[52] .

Alors même que l'absence de liens clairs entre deux lieux des mathématiques est analysée comme le manque d'un principe unifiant, Hermite propose d'engager la recherche vers des réécritures variées de preuves — confirmant qu'un principe est pour lui avant tout le ressort d'une démonstration ou d'une construction, et donc compris a posteriori :

> La méthode de M. Dirichlet pour la détermination du nombre des classes de formes quadratiques de même déterminant et celles qu'on a tirées récemment de la considération des fonctions elliptiques dans le cas des déterminants négatifs, conduisent pour la même question à des solutions tellement différentes qu'il semble aussi difficile de trouver un lien quelconque entre leurs résultats qu'entre les principes sur lesquels elles se fendent. Ce que laisse désirer à cet égard la théorie des formes quadratiques paraît tenir à l'absence de quelque principe essentiel auquel pn serait sans doute amené, soit en découvrant une démonstration purement arithmétique des propositions de M. Kronecker, soit en tirant de la théorie des fonctions elliptiques les expressions mêmes de Dirichlet. En accordant la préférence à ce dernier point vue, j'ai dû faire de la méthode de cet illustre maitre une étude …[53] .

La préférence exprimée ici dans les années 1860 est elle aussi caractéristique des modalités de l'unité pour Hermite. Sa conception disciplinaire, qu'il partage d'ailleurs avec de nombreux mathématiciens[54] distingue entre arithmétique, algèbre et analyse, perçues comme un champ potentiellement unifié, des autres domaines, comme la géométrie et la mécanique, qui sont rejetées à la lisière des applications, voire des sciences physiques. L'analyse[55] apparaît souvent comme le pourvoyeur de notions qui révélent leur sens à

52. Lettre à Stieljtes, [Hermite & Stieljtes], vol. 1, p. 41. Il s'agit du calcul d'expressions du type $E(\frac{n}{1}) - E(\frac{n}{3}) + E(\frac{n}{5}) - \ldots$, où $E(x)$ est comme auparavant la partie entière de x, qui représentent aussi la somme des nombres de solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = k$, pour k entre 1 et n.

53. [Hermite OC], vol. 2, p. 255.

54. Sur cet aspect chez Gauss et le premier Kronecker, voir [Boniface 2006].

55. Ici encore se manifeste une des difficultés d'interprétation évoquées au début : plusieurs travaux d'Hermite soulig-

d'autres domaines. Le thème de l'« anticipation » par l'arithmétique de la théorie des fonctions elliptiques témoigne d'une vision conceptuelle unifiée de ces domaines, mais aussi d'une approche génétique des mathématiques ; il constitue lui aussi un leitmotiv des correspondances et des articles. Outre les nombreux exemples déjà mentionnés, on peut citer encore ce qu'il écrit début 1881 à Kronecker:

> En outre de votre article sur la loi de réciprocité, publié par M. Darboux qui est un vrai bijou, j'ai pu obtenir [de mes traducteurs] celui du 19 juillet sur la quatrième démonstration de Gauss, où vous rendez un éclatant hommage au génie de Cauchy [...] J'y vois une confirmation de ce que je crois vous avoir dit un jour, que l'arithémtique n'est en grande partie qu'une anticipation de la thérie des fonctions elliptiques. D'où vous tiriez comme moi la conclusion qu'en dehors et au dessus des efforts individuels et abandonnés au libre arbitre qui chaque jour apportent à la science ses matérieuax, il est une force qui les associe et les coordonne qui leur imprime à notre insu une direction en nous faisant à travers les sicèles les coopérateurs les uns des autres[56] .

Dans son hommage au jubilé d'Hermite, Henri Poincaré met lui-même en avant les trois niveaux opératoires de cette conception — celui des disciplines, celui des techniques et celui des normes scientifiques :

> Vous n'avez cessé de cultiver les parties les plus élevées de la science mathématique, celle où règne le nombre pur: l'analyse, l'algèbre et l'arithmétique. [...] La théorie des nombres cessait d'être un dédale grâce à l'introduction des variables continues sur un terrain qui semblait réservé exclusivement à la discontinuité[57] . L'analyse sortant de son domaine vous amenait ainsi un précieux renfort. On peut dire en effet que le prix de vos découvertes est encore rehaussé par le soin que vous avez toujours eu de mettre en évidence l'appui mutuel que se prêtent les uns aux autres toutes ces sciences en apparence si diverses[58] .

Les mathématiques comme science d'observation

A la création conceptuelle ou à la recherche d'axiomes ou de symboles, Hermite oppose une vision des mathématiques comme science naturelle. Il se retrouve ici à l'unisson de ses correspondants de prédilection. Stieljtes lui écrit ainsi, le 3 mai 1894:

---

nent le rôle de l'algèbre, parfois aux dépens apparents de l'analyse — par exemple sa version du théorème de Sturm permet d'éliminer tout recours au théorème des valeurs intermédiaires, conçu à l'époque comme un outil d'analyse réelle. On pourrait donc être tenté de l'associer à un programme *réductionniste* d'algébrisation des mathématiques. En fait, et c'est le point important, il n'y a aucune exclusion chez Hermite : c'est la « nature des choses » qu'il s'agit d'exprimer, certes le plus élémentairement possible, mais les « éléments » en question peuvent provenir de différents domaines.

56. Lettre inédite à Kronecker 29 janvier 1881. Copie conservée dans le dossier Hermite des Archives de l'Académie des sciences.

57. Poincaré fait en particulier allusion ici à l'idée d'associer à certains objets arithmétiques ou algébriques (par exemple les n racines d'une équation algébrique de degré n à coefficients entiers) une famille de formes quadratiques définies (à n variables) à coefficients réels variables. Sur les détails de ce programme, voir [Goldstein 2006].

58. [Hermite 1893], pp. 6–7.

> A l'égard des fractions P'/P, $P"/P$, je vous avouerai que je n'ai point la prétention d'éclaircir un sujet aussi difficile par la réflexion et par l'imagination seules. Je procéderai comme les naturalistes, en appelant au secours l'observation[59] ,

ce qui lui vaut dix jours plus tard l'approbation d'Hermite :

> Je me sens tout joyeux de vous savoir en si bonne disposition que vous vous transformez en naturaliste pour observer les phénomènes du monde arithmétique. Votre doctrine est la mienne, je crois que les nombres et les fonctions de l'Analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et que nous les rencontrons ou les découvrons, et les étudions, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes, etc.[60] .

La recherche mathématique doit donc détecter les parentés entre objets, mettre en évidence les traits caractéristiques de chaque classe ou type, afin de produire une classification des phénomènes mathématiques, conçus comme objets naturels. Chacun d'eux est dotée d'une individualisation poussée, mais aussi de filiations et d'affinités:

> Avez–vous remarqué que votre fonction $f(x)$ a une compagne, à savoir $F(x) = \Gamma(x-1)–\Gamma(x-2) + \Gamma(x-3) + \dots$ qui est une fonction uniforme dans le plan ayant tous les nombres entiers pour pôles[61] ?

indique ainsi Hermite à Mittag-Leffler en 1883. A quoi ressemblent les objectifs à atteindre, pour une situation particulière, est bien mis en évidence dans l'introduction de son article de 1854, déjà rencontré :

> C'est dans les méthodes simples et faciles qui se présentent dans cette étude qu'est l'avenir de la science algébrique, car elle seule peut donner les éléments qui distinguent et caractérisent les divers modes d'existence des racines des équations générales de tous les degrés[62] .

Un des premiers résultats importants d'Hermite est l'obtention d'une borne supérieure, ne dépendant que du nombre de variables et du déterminant de la forme, pour la plus petite valeur sur les entiers d'une forme quadratique à coefficients réels. Ce résultat[63] , lui donne accès à de nombreuses applications (approximation simultanée de réels par des rationnels, décomposition d'un nombre premier en un nombre fixé d'entiers algébriques d'un type fixé, expression d'un entier comme somme de carrés, etc.), en associant à chaque situation une famille de formes quadratiques convenables. Par exemple, à l'équation quadratique $x^2 + bx +$

59. [Hermite & Stieljtes], vol. 2, p. 397.
60. [Hermite & Stieljtes], vol. 2, p. 398.
61. [Hermite & Mittag-Leffler], 1ère part., p. 198
62. [Hermite 1854].
63. Il est aussi lié à la théorie de la réduction. Par exemple, une forme binaire quadratique définie de déterminant D a une valeur entière qui est égale au coefficient dominant de la forme réduite, lui-même inférieur à $\sqrt{\frac{D}{3}}$.

$c = 0$, avec b et c des entiers, qu'on suppose dotées de deux racines réelles α et β, on peut associer la famille de formes quadratiques définies $f_d(x, x') = (x - \alpha x')^2 + d(x - \beta x')^2$, pour toutes les valeurs réelles positives d. Hermite commente ce cadre de travail plus explicitement :

> Peut-être parviendra-t-on à déduire de là [de la réduction des formes dont les coefficients dépendent des racines d'équations algébriques à coefficients entiers] un système complet de caractères pour chaque espèce de ce genre de quantités, analogue par exemple à ceux que donne la théorie des fractions continues pour les racines des équations du second degré. On ne peut du moins faire concourir trop d'éléments pour jeter quelque lumière sur cette variété infinie des irrationnelles algébriques, dont les symboles d'extraction des racines ne nous représente que la plus faible partie. Ici, comme dans la théorie des transcendantes, il a été facile de trouver, à une longue suite de notions analytiques de plus en plus complexes, une origine commune, une définition unique et complète, où n'entrent que les premiers éléments du calcul, mais quelle tâche immense pour la théorie des nombres et le calcul intégral de pénétrer au milieu d'une telle mutliplicité d'êtres de raison en les classant par groupes irréductibles entre eux, de les constituer tous individuellement, par des définitions caractéristiques et élémentaires[64] .

Dans la perspective d'atteindre ces objectifs principaux, qui sont ceux de classification, la détermination d'un noyau unique, même élémentaire au double sens du terme, occupe donc un rôle subordonné. Le calcul d'exemples, à la fois en amont de l'observation, pour lui donner matière à s'exercer, et en aval, afin de la préciser et de l'appliquer, est une composante cruciale de la pratique mathématique. Ici, les illustrations abondent :

> Je réclame à cor et à cri une fonction échappant à votre condition et dans laquelle df/dx et df/dy soient toujours continues et finies à l'intérieur d['un domaine] D. Ma requête a pour origine et pour cause ma tendance à faire résulter les notions analytiques de l'observation des faits de l'analyse, croyant que l'observation est la source féconde de l'invention dans le monde des réalités subjectives, tout comme dans le domaine des réalités sensibles. Je m'arrête, mon cher ami, je vous ferais bondir si j'osais vous avouer que je n'admets acucune solution de continuité, aucune coupure entre les Mathématiques et la Physique, et que les nombres entiers me semblent exister en dehors de nous et en s'imposant avec la même nécessité, la même fatalité que le sodium,le potassium, etc.[65]

Et de même, quelques années plus tard:

> La présence du facteur $1/p$ est favorable à l'approximation ; mais avant d'aller plus loin, il me paraîtrait nécessaire d'expérimenter cette formule, en faisant des applications numériques[66] .

Ou encore, à Mittag-Leffler, cette fois:

---

64. [Hermite, OC], vol.1, p. 131.
65. [Hermite & Stieljtes], lettre 166, n. d. (début 1889), vol. 1, pp. 331–332. On notera encore une fois l'articulation entre la valeur de « fécondité » , la nécessité des faits mathématiques naturels, et l'observation analytique.
66. [Hermite & Stieljtes], lettre à Stieljtes 28 février 1894, vol. 2, p. 377.

> Le mémoire de Mr Sternberg, sur un cas particulier de l'équation de Lamé, m'a paru bon et intéressant, j'exprimerai cependant le désir que l'auteur le complète en appliquant sa méthode dans les cas particuliers les plus simples, afin de donner sous forme explicite les types d'équations dont la solution s'obtient par les fonctions de seconde espèce…[67] .

Cette insistance sur les calculs ne correspond nullement à un facilité personnelle[68] — comme cela semble avoir été le cas pour Gauss par exemple –, mais plutôt à une conviction profonde sur le mode de fonctionnement de la recherche mathématique. « Il serait nécessaire d'entreprendre des calculs numériques auxquels je ne suis aucunement propre, écrit Hermite quelques années avant sa mort[69] , afin que cette note ait un peu d'intérêt. Mon but a été d'obtenir un mode praticable de calcul en partant de l'expression $\Gamma'(s) = \int_0^\infty \log x \; e^{-x} dx$, qui ne semble pas s'y prêter au premier abord. » Il émet d'ailleurs des plaintes répétées sur l'absence d'assistants pouvant l'aider dans ces tâches : « Je suis maintenant à porter envie et jalousie aux professeurs des universités allemandes qui donnent à leurs élèves, heureux et reconnaissants de les recevoir de leurs mains savantes, des calculs algébriques, dont ils tirent, en se faisant naturalistes, des observations utiles qui peuvent les conduire au but[70] . »

Ces calculs sont vécus sur un mode de nécessité qui n'est pas sans rappeler le ton de ceux qui prônent pour leur part une approche fondationnelle, et mettent en avant l'exigence de rigueur. Son programme sur les nombres algébriques provoque ainsi plusieurs commentaires à Stieljtes en ce sens[71] :

> La réduction n'est point un procédé facile ni commode et il n'a rien moins fallu que le talent et l'opiniâtreté de M. Charve pour en faire application dans quelques cas particuliers, et cependant il serait si utile et même absolument indispensable de pouvoir faire de nombreuses applications, pour s'éclairer et se diriger, j'ajouterai pour s'inspirer puisqu'il s'agit d'Arithmétique.

Et quelques années plus tard :

> J'ai vu dernièrement votre élève M. Bourget dont j'ai été enchanté et qui m'a annoncé son intention de faire une thèse arithmétique, continuation de celle de M. Charve sur une question qui, autrefois, m'a extrêmement occupé. il s'agit de la réduction contniuelle d'une forme quadratique ternaire définie avec un paramètre variable et le but serait d'obtenir un algorithme régulier facilement applicable, autant que le permet la nature des choses

67. [Hermite & Mittag-Leffler], 7 juillet 1887, 2ème part., p. 134.
68. En particulier en ce qui concerne les calculs numériques. Les articles d'Hermite renferment d'ailleurs de nombreuses erreurs dont certaines ont été indiquées par les éditeurs de ses œuvres.
69. [Hermite & Mittag-Leffler], 29 mars 1895, 3ème part., p. 28.
70. [Hermite & Stieljtes], 18 juin 1894, vol. 2, p. 417.
71. [Hermite & Stieljtes], vol. 1, p. 12, vol. 2, p. 285 et p. 390, resp.

> pour la recherche des minima successifs du produit $(x + ay + a^2z)(x + by + b^2z)(x + cz + c^2z)$, où a, b, c sont les racines d'une équation du troisième degré à coefficients entiers, dont une seule est suposée réelle. Ce n'est pas sans bien des réserves que j'ai engagé M. Bourget dans cette voie ardue ; je me figure cependant que l'étude attentive des formes ambigues, la recherche patiente des cas critiques où une variation infiniment petite du paramètre fait passer d'une forme réduite à une autre qui ne l'est plus, peuvent conduire à quelques heureuses conséquences.

Ou encore, cette explication d'un échec partiel qui montre comment l'effectivité est requise non tant en elle-même, que parce qu'elle seule semble pouvoir permettre de relancer l'investigation :

> Je m'étais figuré devoir pénétrer dans le monde des irrationnelles définies par des équations à coefficients entiers $F(x) = 0$ en étudiant les circonstances de la réduction continuelle de la forme $\sum \alpha_i \ \mathrm{mod}^2(x+x_i y+x_i^2 z+\ldots)$[72] , x_i désignant les racines de cette équation, par exemple dans le cas des équations abéliennes, mais vous pouvez voir dans la thèse de M. Charve, professeur à la Faculté des sciences de Marseille, à quel immense labeur, pour le troisième degré seulement, on se trouve conduit. Je n'ai fait qu'un premier pas, en reconnaissant qu'un nombre fini d'opérations suffit ; il aurait été indispensable de pouvoir les effectuer. Les recherches d'Arithmétique exigent absolument des exemples où l'observation puisse s'exercer; autrement on reste dans le vide, ce qui m'est arrivé pour mon malheur.

C'est même au coeur des calculs que se manifeste encore la force extérieure qui canalise la découverte, et les procédures mêmes doivent porter témoignage du caractère naturel des mathématiques authentiques:

> De là se tirent les relations nouvelles entre les nombres de Bernoulli, d'indices pairs et d'indices impairs, et il suffit de faire $\xi = i$ en supposant n impair dans la première égalité et n pair dans les deux autres. Mais je suis tout surpris de l'arrivée de l'indéterminée xi, et une fois de plus je remarque qu'en analyse nous sommes moins maîtres que serviteurs[73] , et qu'il faut bien nous laisser mener, conduire et obéir à une puissance qui s'impose et nous domine[74] .

Et donc :

> Je me suis lancé hier dans un calcul tête baissée et en oubliant absolument que les polynomes G, H, K devaient être du premier, du second et du troisième degré. En déplorant mon inadvertance j'ai été cependant enchanté de retrouver dans mon algorithme ce caractère de nécessité qui est pour moi son principal titre à l'existence[75] .

Comme nous l'avons constaté à maintes reprises, les justifications d'Hermite concernent autant le mouvement même de sa recherche, ses procédures, que les notions mises en jeu. L'arbitraire est exclu autant que possible de tous les aspects de la pratique mathématique, cette exclusion étant garantie par une perspective qui est naturaliste dans ses moindres détails et par la position particulière de l'analyse à

72. Ici, mod désigne le module d'un nombre complexe.
73. « Une fois de plus » en effet, car nous l'avons rencontré plus haut.
74. [Hermite & Stieljtes], 25 octobre 1894, vol. 2, p. 437.
75. [Hermite & Stieljtes], 28 mars 1890, vol. 1, p. 31.

la fois comme domaine unifiant et comme technique d'investigation. L'extrait suivant, daté du 2 mars 1876[76] , articule nettement le rôle de chaque élément en explicitant les enjeux pour Hermite de présenter les mathématiques comme une science d'observation :

> Je crois qu'on doit dire des mathématiques, qu'elles sont une science d'observation. Je repousse comme de toute fausseté que les géomètres soient les créateurs de leur science, et rien ne me semble plus contraire à la vérité et à la réalité des choses, que ce que dit M. Poinsot, dans les termes suivants : "Le calcul est un instrument qui ne produit rien par lui-même et qui ne rend en quelque sorte que les idées qu'on lui confie. Si nous n'avons que des notions imparfaites, ou si l'esprit ne considère la question que d'un point de vue borné, ni l'Analyse, ni le calcul ne lui apporteront plus de lumière, et ne donneront à nos résultats plus de justesse et d'étendue, etc. " [La note écrite par Hermite contre cette vue] donnerait en même temps les raisons dont je crois pouvoir appuyer la proposition précédemment énoncée que les mathématiques, et tout spécialement l'Analyse abstraite, sont le produit, sont le résultat de l'observation, et non une création arbitraire de notre esprit. Le sentiment exprimé dans ce passage de votre dernière lettre où vous me dites : "plus je réfléchis sur toutes ces choses, plus je reconnais que les mathématiques forment une science expérimentale, aussi bien que touts les autres sciences", et dans cet autre passage: "Il me semble que la tâche principale, actuellement, de même que pour l'histoire naturelle descriptive, consiste à amasser le plus possible de matériaux, et à découvrir des principes en classant et décrivant ces matériaux, ce sentiment, dis-je, est aussi le mien, et sous une forme simple et précise vous avez résumé à l'égard des mathématiques l'intime et profonde conviction de toute ma vie de géomètre. Je crois donc que l'Analyse la plus abstraite est en grande partie une science d'observation, j'assimile absolument le complexe des notions connues et à connaître dans ce domaine de l'analyse, à celles des sciences naturelles, les notions de l'analyse ayant leur individualité propre, leur figure si je puis dire, et leurs corrélations multipliées, au même degré que les animaux et les plantes.

Hermite et la question des fondements

Lors du congrès international de Zürich, en 1897, Poincaré exprima ses positions sur les rapports entre l'analyse et la physique, en des termes qui témoignent aussi de son opposition au programme d'arithmétisation.

> Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier. C'est le monde extérieur qui nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu'il nous a forcés à inventer. Sans lui, il n'y aurait pas d'analyse infinitésimale ; toute la science mathématique seréduirait à l'arithémtique ou à la théorie des substitutions.
> Au contraire, nous avons consacré àl'étude du continu presque tout notre temps et toutes nos forces. Qui le regrettera ? Qui croira que ce temps et ces forces ont été perdus ?
> L'analyse nous déroule des perspectives infinies que l'arithmétique ne soupçonne pas ; elle nous montre d'un coup d'œil un ensemble grandiose, dont l'ordonnance est simple et symétrique ; au contraire, dans la théorie des nombres, où règne l'imprévu, la vue est pour ainsi dire arrêtée à chaque pas.

76. Lettre d'Hermite à un correspondant non identifié, conservée au département des manuscrits de la Staatsbibliothek de Berlin. D'autres indications m'ont permis d'identifier le destinataire comme le mathématicien Leo Königsberger.

> Sans doute, on vous dira qu'en dehors du nombre entier, il n'y a pas de rigueur, et par conséquent pas de vérité mathématique ; que partout il se cache, et qu'il faut s'efforcer de rendre trasnparents les voiles qui le dissimulent, dût-on pour cela se résigner à d'indéterminables redites. Ne soyons pas si puristes et soyons reconnaissants au *continu* qui, si tout sort du nombre entier, était seul capable d'en faire tant sortir.
> Ai-je besoin, d'ailleurs, de rappeler que M. Hermite a tiré un parti surprenant de l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres ? Ainsi, le domaine propre du nombre entier est envahi lui-même, et cette invasion a rétabli l'ordre là où régnait le désordre. Voici ce que nous devons au *continu* et par conséquent à la nature physique. [77] .

Il est évident d'opposer ces positions à celles de Kronecker[78] , mais aussi à celles que Hilbert expose dans l'introduction de son rapport sur la théorie des nombres cette même année 1897, promettant une arithmétisation de l'ensemble des mathématiques : "Es kommt endlich hinzu, daß, wenn ich nicht irre, überhaupt die moderne Entwickelung der reinen Mathematik vornehmlich *unter dem Zeichen der Zahl* geschieht." Mais il est aussi intéressant de rapprocher cette déclaration de celles d'Hermite. Celui-ci les approuve d'ailleurs pleinement[79] et son isolement, souvent souligné[80] , est plutôt à chercher dans l'extrême cohérence de ces positions, et dans leur ancrage religieux, qu'à propos des aspects plus directement disciplinaires.

La systématicité n'est pas obtenue pour Hermite par une réduction à des axiomes ou un objet abstrait ad hoc de situations concrètes : elle arrive au terme d'une unfication des terrains mathématiques, tirant sa représentation et son efficience d'une interprétation organiciste du développement des mathématiques. Elle est mise en oeuvre par la recherche, dans une situation donnée, d'une construction analytique, souvent issue d'une observation de formules, qui permet de redéployer les résultats attendus ou d'en produire de nouveaux. Ceci vaut tout autant pour l'interprétation qu'Hermite donne des travaux d'autrui qu'il approuve, y compris aux limites du programme d'arithmétisation : ainsi, il analyse le travail de Kummer sur les facteurs idéaux comme la détection d'éléments et de propriétés analytiques, non comme la création ex-nihilo de nouveaux types d'objets. La panoplie intellectuelle d'Hermite cherche à adapter les méthodes des sciences naturelles,

77. [Poincaré 1897], pp. 26–27.

78. Détacher la concession "le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier", pour faire de Poincaré un membre de ce programme est un contresens évident qu'on trouve malheureusement chez plusieurs auteurs.

79. "Je suis entièrement d'accord avec l'incomparable géomètre [Poincaré] et partage absolument les vues, et les idées de son écrit sur les rapports de l'Analyse et de la physique mathématique, communiqué au congrès de Zurich", [Hermite & Mittag-Leffler], 1 septembre 1898,3$^{\text{ème}}$ part., p. 54.

80. Par exemple par Poincaré lui-même dans la « Logique de l'infini », *Scientia* (1912), pp. 10-11.

la proximité de ses démarches avec ces méthodes constituant sa justification de prédilection pour leur validité et leur valeur.

Or, Cantor lui aussi est inspiré par l'exemple des sciences naturelles[81] Hermite propose des réponses originales à des questions qui ont profondément intéressé certains des mathématiciens mêmes auxquels il s'oppose, et se sont inscrits por formuler leur propre réponse dans le mouvement fondationnel. L'étude des fondements s'est centrée surtout sur un petit nombre d'auteurs et sur les seules polémiques qui ont surgi entre eux : par exemple la constitution d'un langage universel, le choix d'un domaine modèle, les définitions acceptables, la légitimation de nouveaux objets introduits pour lisser le fonctionnement d'opérations connues. Cette focalisation sur les objets a pour conséquence de restreindre les lieux de débats à leurs manifestations les plus explicites, et du même coup leur signification. Le risque est d'induire une vision dynamique pauvre (par exemple inspirée d'une compétition de programmes comme celle de Lakatos) parce que cherchée a priori dans un champ tronqué d'avance. Prendre en compte Hermite qui n'a pas été au coeur de polémiques explicites sur les fondements, précisément à cause de ses positions radicales, mais qui était en revanche au cœur d'un réseau de réflexions mathématiques dont il constituait un pôle significatif, est nécessaire pour restituer les champs de travail réels à la fin du XIX^{e} siècle.

Bibliographie

Archibald, Thomas. Hermite and German Mathematics in France, in K. Parshall and A. Rice (eds.), *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community 1800-1945*, AMS and LMS, 2002, pp. 123–137.

Belhoste, Bruno. Autour d'un mémoire inédit : la contribution d'Hermite au développement de la théorie des fonctions elliptiques, *Revue d' Histoire des Mathématiques* 2 (1) (1996), pp. 1–66.

Boniface, Jacqueline. *Le mouvement d'arithémtisation de l'analyse*, Paris: Ellipses, 2002.

———. The Concept of Number according to Gauss and Kronecker, in C. Goldstein, N. Schappacher and J. Schwermer (eds.), *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Heidelberg: Springer, 2006 (à paraître).

Brezinski, Claude. *Charles Hermite père de l'analyse mathématique moderne*. Cahiers d'histoire Et de philosophie des sciences. Nouvelle Série. 32 Paris: Société francaise d'histoire des sciences et des techniques

81. Voir [Ferreiros 2004], qui indique que Cantor voulait « a foundation for an organic theory of Nature » et par là-même une réfutation du matérialisme. Je reviendrai sur la théorie naturaliste d'Hermite ultérieurement.

et Belin, 1990.

Conte, Alberto, Giacardi, Livia (eds.). *Angelo Genocchi ei suoi interlocutori scientifici. Contributi d'all'epistolario.* Torino: Deputazione subalpina di storia patria e Universit? degli studi di Torino, 1991.

Dugac, Pierre. Des correspondances mathématiques des XIXe et XXe siècles, Revue de synthèse (3) 97 (1976), 81–82, pp. 149–170.

Edwards, Harold M. Edwards, Harold M. Kronecker's Arithmetical Theory of Algebraic Quantities, *Jahresberichte der Deutsche Mathematiker Vereinigung* 94 (1992), pp. 130–139.

——— Kronecker on the Foundations of Mathematics. In J. Hintikka (ed.), *From Dedekind to Gödel. Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Synthese Library, Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science 251. Dordrecht, Kluwer, pp. 45–52, 1995.

Ferreiros, Jose. The Motives Behind Cantor's Set Theory. Physicla, Biological and Philosophical Questions, *Science in Context* 17 (2) (2004), pp. 49–83.

Genocchi, Angelo. Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes. Mem. di Torino (3) XXIX., Darboux Bulletin (2) II (1877), pp. 207–209.

Gispert, Hélène. La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue... et tous les autres, *Revue d'histoire des mathématiques* 1, 1995, pp. 39-81.

Goldstein, Catherine, Du Rhin et des nombres : quelques réflexions sur l'usage de la notion de " transfert culturel " en histoire des mathématiques, in P. Hert et M. Paul-Cavallier (éds.), *Sciences et frontières*, 2005, sous presse.

———. The Second Reading of the *Disquisitiones arithmeticae* in France: Chalres Hermite's programme, in C. Goldstein, N. Schappacher and J. Schwermer (eds.), *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Heidelberg: Springer, 2006 (à paraître).

Hermite, Charles. Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 41 (1850).Repr. in [Hermite OC], vol. 1, pp. 164–192.

——— Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (1854). Repr. in [Hermite OC], vol. 1, pp. 296–349.

———. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1881), pp. 145–153. Repr. in [Hermite OC], vol. 4, pp. 92–103.

———. Notice sur M. Kronecker, *CRAS* CXIV (1892), pp. 19–21. Repr. in [Hermite OC], vol. 4, pp. 340-342.

———. *Œuvres*, ed. E. Picard. 4 vols. Paris : Gauthier-Villars, 1905–1917.

[Hermite & Stieljtes]. *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, éd. B. Baillaud et H. Bourget. 2 vols. Paris: Gauthier-Villars, 1905

[Hermite & Du Bois-Reymond]. Briefe von Ch. Hermite zu P. du Bois-Reymond aus den Jahren 1875–1888, ed. E. Lampe, *Archiv der Mathematik und Physik* 24(3) (1916), pp. 193–220 and 289–310.

[Hermite & Mittag-Leffler]. Lettres à Gösta Mittag-Leffler, [éd. P. Dugac], *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* (1ère part.: 1874–1883): 5(1984), pp. 49–285; (2nde part.1884–1891): 6 (1985), pp. 69-217; (3ème part. 1891–1900): 10 (1989), pp. 1–82.

[Hermite & Genocchi]. *Le Lettere di Charles Hermite a Angelo Genocchi (1868–1887)*, ed. G. Michelacci, *Quaderni matematci* II s., 546. Trieste: Dipartimento di scienze matematiche, 2003.

Jahnke, Hans Niels and Otte, Michael. Origins of the Program of "Arithmetization of Mathematics". In: H. Mehrtens, H. Bos, I. Schneider (eds.): *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1981, pp. 21-49.

Klein, Felix. Über die Arithmetisierung der Mathematik, *Nachrichten der Köngilichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 1895. Repr. in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol. 2, pp. 232–240.

Neumann, Olaf. Was sollen und was sind Divisoren?, *Mathematische Semesterberichte* 48 (2002), pp. 139–192.

Parshall, Karen Hunger. *James Joseph Sylvester. Life and work in letters*, Oxford : Clarendon Press, 1998.

Petri, Birgit et Schappacher, Norbert. On arithmetization, in in C. Goldstein, N. Schappacher and J. Schwermer (eds.), *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Heidelberg: Springer, 2006 (à paraître).

Poincaré, Henri. Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique, *Acta Mathematica* 21 (1897), pp. 331-341. Nbreuses repr.

Siacci, Francesco. Cenni necrologici di Angelo Genocchi, *Memorie della Reale Accademia delle Sciencze di Torino* 2^{e}s., 39 (1889), pp. 463–495.

Toth, Imre. *Palimpseste. Propos avant un triangle*, Paris: PUF, 2000.

Weil, André. Introduction à *Collected Papers. Ernst Eduard Kummer*, New York, etc.: Springer, 1975.