Des passés utiles : mathématiques, mathématiciens et histoires des mathématiques

Aborder la relation des sciences à leur histoire à partir du cas des mathématiques, c'est se placer d'emblée sous une malédiction — celle associée, de manière quelque peu injuste, au nom de Jean Cavaillès :

« L'histoire mathématique semble, de toutes les histoires, la moins liée à ce dont elle est véhicule ; s'il y a lien, c'est *a parte post*, servant uniquement pour la curiosité, non pour l'intelligence du résultat : l'après explique l'avant. Le mathématicien n'a pas besoin de connaître le passé, parce que c'est sa vocation de le refuser : dans la mesure où il ne se plie pas à ce qui semble aller de soi par le fait qu'il est, dans la mesure où il rejette autorité de tradition, méconnaît un climat intellectuel, dans cette mesure seule il est mathématicien, c'est-à-dire révélateur de nécessités[1]. »

Plusieurs directions s'offrent pour poursuivre la discussion de cette citation célèbre. La contextualisation, d'abord. Une analyse de la pensée de Cavaillès, pour en mettre en évidence l'intention réelle et la portée, montre en effet qu'elles sont bien plus riches que l'interprétation banale de ces phrases ne le laisse entendre[2]. La réfutation, ensuite. Il serait assez facile de défendre l'idée que, de toutes les histoires des sciences, l'histoire mathématique est au contraire la plus liée à la discipline dont elle parle. L'argument le plus connu pour séparer les mathématiques des sciences s'appuie sur leur rapport différent à la nature, et sur le rôle particulier de médiateur que joue dans les sciences l'expérimentation. Mais le lien spécifique entre les mathématiques et leur histoire pourrait faire

[1] Jean Cavaillès, *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, Paris, Hermann, 1938, rééd. in *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1962, pp. 27-28 ; *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris, Hermann, 1994, pp. 225-226.

[2] Voir pour cela les interventions de Jacqueline Boniface et Hourya Sinaceur dans ce volume.

douter à lui seul que les mathématiques soient une science (et donc relèvent de notre thématique) : le passé, proche ou lointain, fournit *de facto* aux mathématiques une nature, un réel, une « matière à penser ». Si le mathématicien n'a peut-être pas « besoin de connaître le passé », au moins de l'isoler comme tel, il l'utilise en permanence.

Mais c'est encore une autre direction qui sera suivie ici : en rappelant les phrases de Cavaillès, hors de toute explication, de toute renégociation sérieuse de leur sens, je souhaite attirer l'attention sur ce qui en est le plus souvent repris et banalisé, sur ce qui y est récupéré et utilisé par la *doxa*. On prend alors de plein fouet des ambiguïtés courantes de la question de départ, et plus généralement, de beaucoup de discussions sur les sciences et leur histoire : le glissement subreptice de la science aux scientifiques, la confusion entre les deux acceptions du mot « histoire » (c'est-à-dire comme discipline constituée ou comme simple passé), et, dans la confrontation des mathématiciens aux mathématiques et à leurs histoires, l'absence complète des historiens. Je m'intéresserai d'abord au rapport des praticiens des mathématiques à l'histoire de leur domaine, tout en entendant par « histoire » une activité de recherche et d'écriture autonome — qu'elle soit faite par des mathématiciens ou par des spécialistes propres. Je ne demanderai donc pas tant si « les mathématiques peuvent se passer de leur histoire », mais si « les mathématiciens se passent d'histoire des mathématiques », de laquelle et avec quels effets.

Posée au niveau individuel, la question a bien sûr une réponse positive : il existe des mathématiciens, éminents ou non, qui ne semblent nullement s'intéresser à l'histoire de leur sujet. Mais il est tout aussi évident que les mathématiciens, collectivement, ne s'en passent pas. L'important travail sur les œuvres complètes, parfois des décennies après la mort de l'auteur, en est un témoignage élémentaire, mais frappant : au 19e siècle, ce sont des mathématiciens, Guillaume Libri, puis Edouard Lucas, qui ont d'abord porté le projet d'édition des œuvres de Pierre Fermat ; dans les années 1970, c'est André Weil qui a souhaité et encadré l'édition de celles de Ernst Kummer. Nombreux sont les mathématiciens qui ont écrit des textes à vocation historique sur les mathématiques et, de manière plus frappante encore, ont conçu l'histoire des mathématiques en soi comme généralement pertinente pour leurs collègues mathématiciens. Gino Loria, professeur de géométrie supérieure à l'université de Gênes au début du 20e siècle et auteur, entre autres, d'une *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX* publiée en 3 volumes entre 1929 et 1933, déclare dans la préface que son ouvrage est écrit « par un mathématicien pour les mathématiciens »[3] ; pour André Weil, « l'art de l'histoire mathématique peut être pratiqué le mieux par ceux d'entre nous qui sont ou ont été des mathématiciens actifs ou au moins qui sont en contact étroit avec des mathématiciens actifs[4] ». Une section d'histoire des mathématiques existe dans les Congrès internationaux de mathématiciens — occasion de l'intervention de Weil ci-dessus —, ainsi que dans les classifications des articles mathématiques utilisées par les revues bibliographiques, comme les *Mathematical Reviews*. Les histoires écrites par les mathématiciens ont été souvent critiquées par les historiens professionnels, en particulier pour leur anachronisme larvé ; mon propos ici est d'abord d'en souligner les principes de cohérence qui en confortent la continuité avec la recherche mathématique, ensuite, à rebours, de m'interroger sur les possibilités de continuité entre la recherche historique active et les mathématiques contemporaines.

I- Des mathématiciens comme historiens

« Quand un mathématicien professionnel veut cultiver l'histoire de sa science, il doit évidemment d'abord se soumettre aux règles qui s'appliquent à tout homme

[3] J'emprunte cet exemple à Umberto Bottazzini, « Italy », in *Writing the History of Mathematics : its historical development*, ed. Joseph Dauben & Christoph Scriba, Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 2002, pp. 61-95 (cit. p. 88). Toutes les traductions sont les miennes.

[4] « History of mathematics : why and how ? », in *Œuvres scientifiques. Collected Papers*, New York, Heidelberg, Berlin, Springer, 1979, vol. III, pp. 434-442 (cit. p. 440).

qui veut connaître la vérité historique…[Mais] les vérités mathématiques ont été appelées des vérités éternelles …dans des expressions très différentes on peut reconnaître les mêmes vérités… La personne éduquée en mathématiques qui cultive l'histoire des mathématiques a ainsi l'opportunité d'interpréter des textes qui sembleraient sinon incompréhensibles ou qui ont été mal compris, de trouver des connexions entre des assertions historiques qui sembleraient sinon concerner des choses différentes, de détecter la préparation d'une découverte qui semblerait sinon due à l'exceptionnel don de prophétie d'un homme unique et par-dessus tout de trouver et de comprendre la cohérence de la recherche et de la connaissance d'une période donnée et par là même leurs relations avec les points de vue des périodes antérieures ou ultérieures desquelles ou auxquelles une impulsion a ainsi été donnée[5]. »

C'est Hieronymus Georg Zeuthen qui s'exprime ainsi : spécialiste de géométrie énumérative, mais aussi auteur prolifique et respecté d'histoire des mathématiques antiques et médiévales, il a obtenu en 1903 le prix Binoux de l'Académie des sciences pour, dit le texte d'attribution du prix, ses « études magistrales sur l'histoire des sciences ». Sa réflexion sur l'histoire conduit immédiatement Zeuthen, on le voit, à la question de la vérité, ou plutôt des vérités. Il ne s'agit pas pour lui de définir cette notion, ou même de la problématiser, contrairement à de nombreux travaux, tant en mathématiques qu'en histoire, au début du 20e siècle. Au contraire, c'est l'évidence de ce qui constitue pour Zeuthen une vérité qui semble significative ici, ainsi que l'assymétrie du traitement de l'histoire et des mathématiques. La vérité historique apparaît sous forme de règles, contrôlant une pratique humaine. Les vérités des mathématiques sont l'horizon de cette pratique et son but. Posées comme éternelles, ces vérités traversent le temps, mais, selon ce point de vue,

[5] D'après Jesper Lützen et Walter Purkert, « Conflicting Tendencies in the Historiography of Mathematics : Zeuthen vs Cantor », in *The History of Modern Mathematics*, vol. III, ed. Eberhard Knobloch & David Rowe, Boston, Academic Press, 1994, pp. 1-42 (cit. p. 17).

elles n'en résultent pas. Ce qui est historique pour Zeuthen, textes, assertions, découvertes, ne peut que masquer en partie une vérité mathématique, au moins en ce qu'elle y apparaît sous différentes formes, ou sous des formes dispersées. Mais la partie intéressante de l'histoire des mathématiques, toujours pour Zeuthen, concerne ce qui se trouve en même temps échapper à l'historicité —ne vérité, qu'elle soit théorème ou concept, une vérité sous une forme dépouillée de ce que l'histoire lui a plaqué d'anecdotique, en tout cas de contingent.

Nous sommes donc confrontés à un paradoxe crucial : le travail historique repose ici sur une forte conviction, celle de prendre comme acquis le caractère a-historique de ce dont il s'agit en même temps de faire l'histoire. Deux conséquences importantes en découlent. D'une part, la dynamique de l'évolution des mathématiques se réduit de manière naturelle à une « marche de l'esprit humain » vers l'horizon où ces vérités se révèlent complètement, pour reprendre l'expression d'un des premiers historiens des mathématiques du monde moderne, Jean-Etienne Montucla — qui ajoutait : « de toutes les sciences, les mathématiques sont celles dont les pas, dans la recherche de la vérité, ont de tout temps été les plus assurés[6].» Le chemin à tracer est simplement constitué des étapes conduisant à la forme correcte, pure, reconnaissable, de la vérité étudiée, étapes où elle se présente encore imparfaitement établie ou dévoilée. D'autre part, les difficultés de la construction historiographique sont entièrement déplacées vers la question de l'identité, du même (« dans des expressions très différentes on peut reconnaître les mêmes vérités »), non seulement à une époque donnée, mais entre périodes. « Ce qui rend intéressant [l'étude du passé], dit aussi Weil, est précisément l'apparition précoce de concepts et de méthodes destinés à émerger seulement plus tard dans l'esprit conscient des mathématiciens : la tâche de l'historien est de les dégager et de tracer leur

[6] Jean-Etienne de Montucla, *Histoire des mathématiques*, Paris, Agasse, an VII, vol. I, Préface, p. viii.

influence ou manque d'influence sur les développements ultérieurs[7]. » Ce que l'historien doit faire est de reconnaître la forme future, aboutie, désinscrustée, de la vérité étudiée, l'écriture de son histoire revenant à dire l'écart, à chaque fois, entre la forme rencontrée dans les textes et cette forme finalisée ; en ce sens, cette histoire est moins anachronique que téléologique.

Bien entendu, c'est sur le repérage de certaines identités que se fonde toujours la possibilité d'écrire l'histoire d'une découverte mathématique : écrire l'histoire de l'algèbre suppose que soit identifié ce qu'est l'algèbre, ou à tout le moins ce qui pourrait relever de cette histoire particulière[8] ; écrire l'histoire du théorème fondamental de la théorie de Galois[9] suppose qu'une telle théorie soit délimitée, que son rapport à la personne de Galois soit déterminé, qu'un résultat spécifique soit repéré comme crucial dans son énonciation et sa caractérisation, etc. Mais la multiplication d'articles ou d'ouvrages consacrés récemment à ces préliminaires témoigne de leur complexité potentielle.

Or, ces questions restent tacites pour Zeuthen, car sa conviction du caractère éternel des vérités mathématiques leur fournit de fait une solution emblématique : reconstructions et identifications sont légitimées depuis l'intérieur des mathématiques elles-mêmes, plus précisément à partir d'un état des lieux mathématique contemporain de Zeuthen. Cette solution trivialise de

---

[7] A. Weil, op. cit. n.4.

8 À propos de l'insertion ou de la non insertion de textes particuliers dans une histoire de l'algèbre, et ses enjeux variés, voir par exemple Jens Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: a portrait of Old Babylonian algebra and its kin*, New York, Springer, 2002 ; Jim Ritter, « Reading Strasbourg 368 : A Thrice-Told Tale », in Karine Chemla, *History of Science, History of Text*, Dordrecht, Springer, 2004, pp. 177-200 ; Bernard Vitrac, « Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes ? », *Mirror of Heritage (Ayene-ye Miras)* 3-1, 28 (2005), 1-44.

9 Voir la thèse de Caroline Ehrhardt, *Evariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811-1910)*, décembre 2007, EHESS. Sur l'écriture de l'histoire d'un théorème, voir Christian Gilain, « Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral », *Archive for History of Exact Sciences* 42 (1991), pp. 91-136 ; Hourya Sinaceur, *Corps et modèles*, Paris, Vrin, 1991 ; Catherine Goldstein, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis, PUV, 1995 ; Frédéric Brechenmacher, « The 1874 Controversy between Camille Jordan and Leopold Kronecker », *Revue d'histoire des mathématiques* 13(2) (2007), pp. 187-257.

fait les repérages historiographiques tout juste évoqués — l'algèbre est essentiellement ce qu'est l'algèbre pour un mathématicien du début du 20e siècle. Mais elle renforce en revanche une forte continuité diachronique des mathématiques : passés et futurs, « points de vue des périodes antérieures ou ultérieures » se trouvent ainsi comme re-présentables dans la connaissance d'une période donnée. Elle assigne aussi la tâche de l'histoire à ceux qui travaillent à l'intérieur des mathématiques, c'est-à-dire aux mathématiciens.

Dans son livre *Die Lehre von der Kegelschnitten im Alterthum*, publié en 1886, Zeuthen se livre par exemple à une lecture minutieuse des œuvres d'Apollonius. Cette lecture est ponctuée de phrases caractéristiques du phénomène que je viens d'indiquer. Dans la 4e section, Zeuthen commente ainsi : « sans nous éloigner essentiellement de la manière d'Apollonius, nous pouvons décrire cet échange [entre diamètre donné d'une conique et l'ordonnée associée d'une part et leurs conjugués d'autre part] comme une réflexion du point de départ sans rotation…La conduite par Apollonius de ces opérations est pour nous d'intérêt … parce qu'elle fournit en général un bon exemple des opérations sur les surfaces dans l'Antiquité qui sont étroitement apparentées à nos opérations algébriques….» Ailleurs, Zeuthen suggère que « nous pouvons d'autant plus facilement détecter et mettre en évidence les plus importantes des méthodes adoptées qu'elles font partie de celles qui seront précisément formulées plus tard dans la géométrie analytique. » On pourrait multiplier ces citations qui témoignent de ce que les mathématiques contemporaines de Zeuthen lui sont un outil décisif pour analyser le texte antique.

Cette perspective produit des effets de lecture particuliers[10]. L'un d'eux a été discuté par Moritz Cantor, un historien des mathématiques contemporain de Zeuthen ; dans le *Bulletin des sciences mathématiques* de 1895, il commente : « [M. Zeuthen] s'est saisi du problème à trois ou quatre droites en maître de la

[10] D'autres effets sont mis en évidence dans C. Goldstein, op. cit. n. 9 et dans J. Ritter, op. cit. n. 8. Sur Zeuthen même, voir aussi Lützen et W. Purkert, op. cit. n. 5.

Géométrie synthétique moderne. Il a trouvé la conique en question en ne s'appuyant que sur des vérités contenues dans le livre III d'Apollonius. C'est tout ce qu'il y a de plus ingénieux comme étude géométrique, mais ce n'est pas de l'histoire. » Un an plus tard, Cantor précise sa critique : « [M. Zeuthen] lit avec une grande exactitude les œuvres des plus remarquables auteurs dans l'Antiquité grecque, Euclide, Archimède, Apollonius, et quand il les a lus, il réfléchit à ce qu'il aurait lui-même pensé là-dessus s'il avait confié au papier les mêmes théorèmes dans le même ordre. » Cantor ne reproche donc pas tant à Zeuthen l'anachronisme brutal qui consisterait à utiliser des concepts trop modernes dans son analyse d'Apollonius, il lui reproche de connecter des énoncés mathématiques entre eux d'une manière constante, par-delà les siècles, alors que la possibilité même de ces connexions lui paraît problèmatique. C'est la cohérence perçue comme atemporelle d'assertions mathématiques, reformulées pour apparaître elles-mêmes atemporelles, qui est ici mise en question.

Un autre effet de cette conception concerne le choix du sujet traité. La nature de ce qui peut être perçu comme une « vérité mathématique » retentit sur ce dont on décide de faire l'histoire. Il s'agit de ce qui est d'ordinaire objectivé dans la pratique professionnelle des mathématiques : une notion, un théorème, une méthode, une preuve[11]. Le mathématicien Leonard Eugene Dickson, en 1919, préface ainsi son immense *History of the Theory of Numbers* : « Il est inconcevable que quiconque puisse désirer cette vaste quantité de matériel arrangé autrement que par sujets. Encore une fois, les histoires conventionnelles prennent pour acquis que chaque fait a été découvert par une suite naturelle de

[11] Il faut souligner que cette focalisation ne va pas de soi. Ernest Coumet a montré l'intérêt pour l'histoire des mathématiques même d'examiner les pratiques combinatoires générales dans « Cryptographie et numération », *Annales. Économies, sociétés, civilisations, 5*, (1975), p. 1007-1027 ; Eric Brian a proposé une histoire de l'abstraction mathématique (« Le livre des sciences est-il écrit dans le langage des historiens ? », in Bernard Lepetit, *Les Formes de l'expérience*, Paris, Albin Michel, 1995, pp. 85-98) ; Gilles Châtelet a mené une enquête sur les gestes mathématiques dans *Les enjeux du mobile*, Paris, Seuil, 1993. On pourrait multiplier les exemples.

déductions à partir de faits antérieurs et consacrent un espace considérable à essayer de retracer cette suite. Mais les hommes expérimentés en recherche savent qu'au moins les germes de beaucoup de résultats importants sont découverts par une intuition soudaine et mystérieuse, peut-être le résultat d'un effort mental subconscient, même si de telles intuitions doivent être soumises plus tard aux processus de tri des facultés critiques. Ce qu'on veut en général est un énoncé complet et correct des faits, et pas l'explication personnelle de l'historien sur ces faits. Le plus complètement l'historien reste à l'arrière-plan, le moins conscient le lecteur est de la personnalité de l'historien, meilleure est l'histoire. Avant d'écrire une telle histoire, il doit avoir fait une recherche plus approfondie de tous les faits qu'il n'est nécessaire pour l'histoire conventionnelle[12]. »

Le point de vue de Dickson peut paraître opposé à celui de Zeuthen ou Weil : il voue en effet à l'échec toute tentative de reconstruction d'une genèse d'idées. Sauf son étendue chronologique, rien ne distingue son ouvrage des journaux de recensement bibliographique tels que le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* ou les *Mathematical Reviews* :on y trouve une suite de notices résumant les résultats contenus dans un article ou un livre mathématique, organisées thématiquement, par notion (nombre premier, somme de carrés,…) ou théorème (calcul du nombre de formes quadratiques de même déterminant, théorème de Fermat). L'auteur, fidèle au projet décrit plus haut, n'essaie presque jamais de « tracer l'influence ou absence d'influence » d'un texte, et renonce donc à toute apparence continuiste du récit. Pourtant, ces différences entre son projet et ceux de Zeuthen ou Weil mettent d'autant mieux en lumière ce qui les réunit : le choix de ce qu'est un « fait » mathématique (en l'occurrence, l'énoncé d'un théorème), la classification même de ces faits, témoignent du privilège accordé à un nombre restreint de formes d'organisation des mathématiques. Mettant à la suite des uns des autres des théorèmes portant sur la distribution des

[12] Dickson, *The History of the Theory of Numbers*, 1919-1923, volume 1, introduction.

nombres premiers par exemple, Dickson instaure implicitement entre les textes où il les a repérés une filiation : une filiation de « faits » (dans son sens) que leurs auteurs, les méthodes qu'ils utilisèrent, voire les énoncés qu'eux-mêmes mirent en avant, n'eurent pas nécessairement dans leur propre époque[13]. Une identité est créée par Dickson dans ces juxtapositions, le classement même du matériel produit du sens historique[14]. Qu'il s'agisse de « vérités », de «faits » ou d'« idées mathématiques », la focalisation sur des entités reconnaissables de l'intérieur de la pratique mathématique induit à la fois une interprétation interne des textes et une interprétation de leurs liens dans le temps et l'espace, c'est-à-dire une forme spécifique d'histoire.

De nombreuses controverses ont opposé ces mathématiciens-historiens à d'autres historiens des mathématiques — comme celle, déjà évoquée, entre Zeuthen et Cantor[15]. Les historiens-mathématiciens évoqués plus haut ne sont pourtant pas des historiens du dimanche. Les débats même auxquels ils ont participé les montrent au centre de l'histoire des mathématiques professionnelles de leurs temps. Leurs travaux ont forgé des interprétations textuelles dont les effets perdurent, quand bien même il ne s'agirait que de les disqualifier. Les liens qu'ils ont mis en place entre mathématiques et histoire des mathématiques ne sont pas anodins. Dickson a bénéficié de soutiens financiers importants de la

[13] Des exemples sont données dans C. Goldstein, op. cit. n. 9, et dans « La théorie des nombres dans les Notes aux comptes rendus de l'Académie des sciences (1870-1914) : un premier examen », *Rivista di Storia della scienza*, II, 2, 2, 1994, p. 137-160.
[14] Pour la manière dont une classification des mathématiques exprime les priorités du milieu qui la produit, voir l'étude de Reinhard Siegmund-Schultze sur le *Jahrbuch*, *Mathematische Berichterstattung in Hitlerdeutschland. Der Niedergang des* Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik, Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik 9, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1993.
[15] D'autres exemples significatifs incluent Sabetai Unguru,, « On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics », *Archive for the History of Exact Sciences* 15 (1975), pp. 67-114 ou Joseph Dauben, « Mathematics : An Historian's Perspective », in *Philosophy and the History of Science* **2** (1993), pp. 1–21, ou *a contrario*, Richard Askey, « How can mathematicians and mathematical historians help each other ? », in *History and philosophy of modern mathematics*, William Aspray & Philip Kitcher, eds., Minneapolis, University of Minnesota Press, 1988, pp. 201-219.

Carnegie Institution pour mener à bien, au moins partiellement, son *History* et cette entreprise semi-publique a eu un impact important dans la formation des mathématiciens américains du début du 20e siècle[16]. Les controverses s'explicitent souvent autour de la question de l'anachronisme, mais cette accusation opère en partie comme un critère de délimitation professionnelle : elle sert à revendiquer une autonomie du domaine de l'histoire, des objectifs et des modes de travail propres ; réciproquement, les mathématiciens-historiens dont nous avons parlé tentent de délimiter de l'intérieur des mathématiques la pertinence de toute étude sur ce sujet — les polémiques semblant parfois d'autant plus acides que la proximité institutionnelle entre les protagonistes est grande[17].

Mon propos n'est pas de prendre position dans ces débats, ni de critiquer, à partir de l'histoire sociale récente des sciences, les propriétés de ces histoires mathématiciennes. Les variantes en sont d'ailleurs nombreuses. Ce qui m'intéresse ici, c'est de noter comment les mathématiques y forment le socle *théorique* de l'histoire des mathématiques : elles désignent ce qui mérite d'être au cœur d'une histoire, fournissent un mode d'intervention pour localiser les étapes de cette histoire et leurs liens, fixent l'état de ce dont l'historicité n'est pas prise en compte. Les historiographies qui en résultent sont d'autant plus intéressantes qu'elles révèlent une pratique des mathématiques.

II—Un bref retour aux disciplines : de l'histoire en mathématiques

[16] Sur cet aspect, voir Della Fenster, « Leonard Dickson's History of the Theory of Numbers : an historical study with mathematical implications », *Revue d'histoire des mathématiques*, 5 (1999), p. 159–179.

[17] Une situation analogue pour les sciences de l'homme est analysée en profondeur par Loïc Blondiaux et Nathalie Richard, « A quoi sert l'histoire des sciences de l'homme ? », in Claude Blanckhaert et al., Paris, L'Harmattan, 1999, pp. 109-130.

Comment un texte du 19^e siècle ou même antérieur) devient-il la source d'un travail mathématique du 20^e ? [18] Weil a décrit dans ses *Souvenirs d'apprentissage* comment il a utilisé un passé assez lointain pour constuire son œuvre mathématique :

« Au cours de mes promenades, je faisais souvent une halte pour couvrir un cahier de calculs sur les équations diophantiennes. … La lecture de Riemann et de Klein m'avait convaincu qu'il fallait y mettre au premier plan la notion d'invariance birationnelle. A force de calculs, je m'aperçus que les méthodes de Fermat et de ses successeurs reposaient toutes sur une remarque presque évidente : c'est que si $P(X, Y)$ et $Q(X,Y)$ ont des polynômes homogènes algébriquement premiers entre eux, à coefficients entiers rationnels, et que x, y soient des entiers premiers entre eux, alors $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont « presque » premiers entre eux, c'est-à-dire que leur p.g.c.d. n'est susceptible que d'un nombre fini de variables ; si donc par exemple $P(x,y)Q(x,y)=z^n$, où n est la somme des degrés de P et Q, $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont « presque » des puissances n-ièmes exactes. Je cherchai à traduire cette remarque dans un langage birationnellement équivalent et n'y trouvai pas de difficulté. C'était déjà en germe la première partie de ma future thèse[19] ».

Plusieurs des articles de Weil commencent d'ailleurs par une relecture (ou une allusion à une relecture) d'un article vieux de plus d'un siècle. L'origine de ses célèbres conjectures — l'hypothèse de Riemann pour les variétés algébriques sur des corps finis — est ainsi rapportée à la lecture de deux mémoires du premier quart du 19^e siècle, écrits par Gauss, sur un sujet tout à fait différent : « en 1947, à Chicago, je m'ennuyais et me sentais déprimé, et ne sachant que faire, je commençai à lire les deux mémoires de Gauss sur sur les résidus quartiques, que je n'avais jamais lus auparavant. Les entiers de Gauss

[18] On trouvera plusieurs exemples intéressants dans Thierry Bouche, « Introducing the mini-DML project », 2004, http://minidml.mathdoc.fr/litterature/article-minidml.pdf

[19] André Weil, *Souvenirs d'apprentissage*, Bâle, Boston, Berlin, Birkhäuser, 1991, pp. 46-47.

apparaissent dans le second papier. Le premier s'occupe essentiellement du nombre de solutions des équations $ax^4 - by^4 = 1$ dans le corps fini modulo p, et du lien avec certaines sommes de Gauss ; la méthode est en fait exactement la même que celle qui est appliquée dans la dernière section des *Disquisitiones* aux sommes de Gauss d'ordre 3 et aux équations $ax^3 - by^3 = 1$. Je remarquai alors que des principes similaires pouvaient être appliquées à toutes les équations de la forme $ax^m + by^n + cz^r + \cdots = 0$ et que ceci impliquait la vérité de ce qu'on appelle l' « hypothèse de Riemann » … pour toutes les courbes $ax^m + by^n + cz^r + \cdots = 0$ sur les corps finis… Ceci à son tour me conduisit aux conjectures sur des variétés sur les corps finis[20]. »

On relève dans ces descriptions les traces des procédures d'identification déjà évoquées plus haut : la lecture de Riemann et Klein fournit un principe d'entrée dans les textes de Fermat et réciproquement la remarque qui résulte de l'étude de ces textes est « traduite » dans un « langage birationnellement équivalent », c'est-à-dire celui suggéré par la lecture de Klein. La métaphore de la traduction contribue à gommer l'écart entre le texte de Fermat et sa restructuration[21]. Le second extrait fonctionne de manière analogue, les identités étant soulignées plus explicitement encore : « la méthode est exactement la même », « des principes similaires »,…Ces identifications ont lieu entre méthodes, entre énoncés, entre objets — ces morceaux de la pratique mathématique qui sont activés explicitement dans la recherche, et susceptibles d'être réinvestis au service de mathématiques nouvelles. Ces procédures permettent de faire des mathématiques de Fermat (ou de Gauss) des mathématiques utilisables au 20e siècle — ce passé utilisable comme présent activable est aussi un passé refusé, comme le dit la citation de Cavaillès.

---

[20] André Weil, Ritt Lectures, 1972, « Two lectures on number theory, past and present », 1974, repr. in *Œuvres scientifiques*, vol. III, p. 298.

[21] Une mesure de cet écart est discutée dans Catherine Goldstein, « Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mise en oeuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil », *Cahier du Séminaire d'histoire et de philosophie des mathématiques*, 2e s. 3 (1993), pp. 25-49.

Vu les difficultés d'accès des textes anciens, un historien peut servir de médiateur, mais les phénomènes restent analogues. Par exemple, la géométrie algébrique contemporaine conjecture des relations entre certains invariants associés à des courbes algébriques définies sur le corps des nombres rationnels. Calculer ces invariants, en particulier pour tester ces conjectures, est donc important. Pour les courbes algébriques d'équation $y^2=P(x)$, où P est un polynôme de degré d, sans racine multiple et à coefficients rationnels, certains invariants, les périodes, sont données par les intégrales $2\int_a^b \left(\frac{x^{i-1}}{\sqrt{P(x)}} dx \right)$, où a et b sont des racines de P et où $1 \leq i \leq g = d(d-1)/2$. Ces intégrales sont impropres (le terme à intégrer devient infini près des bornes a et b, à peu près comme $\sqrt{1/x}$ au voisinage de 0) et les procédés standards d'intégration donnent des calculs très lents. Toutefois, il existe des algorithmes récurrents à convergence quadratique, donc bien plus satisfaisants, lorsque $g=1$ et $g=2$. La source de l'algorithme pertinent dans ce dernier cas, mis à jour à la fin des années 1980, a été attribuée à un article de Friedrich Richelot de 1836 ; il a été repéré grâce à une synthèse historique sur l'histoire des intégrales concernées.

En cette fin de 20e siècle, l'algorithme en question est immédiatement doté d'une interprétation géométrique — il correspond à des isogénies de surfaces abéliennes — ce qui n'était pas le cas dans l'article de Richelot.

Les auteurs présentant ces résultats récents[22] commentent : « L'absence d'interprétation géométrique et la complexité des calculs, jointes à de nombreuses erreurs typographiques, expliquent sans doute l'oubli dans lequel cet article est tombé depuis la fin du 19e siècle. » L'écart entre le résultat de 1836 et

[22] Jean-Benoit Bost et Jean-François Mestre, « Moyenne arithmético-géométrique et périodes des courbes de genre 1 et 2 », *Gazette des mathématiciens* 38 (1988), pp. 36-64. Le travail de Richelot est mentionné dans Christian Houzel, « Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes », in *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, éd. Jean Dieudonné, Paris, Hermann, 1978, pp. 1-113.

celui des années 80 est transformé directement en une explication sur un phénomène historique de transmission. Les liens tissés ici entre textes du passé et du présent, créés par le regard actif des mathématiciens, donnent sens non seulement au texte passé (et bien sûr au texte présent à qui le passé réinterprétable sert de motivation et de source), mais aussi à l'espace entre les deux. Ces opérations sont bien similaires à celles décrites plus haut, lorsque des mathématiciens réfléchissaient sur l'histoire des mathématiques : on y retrouve à la fois la traduction de notions ou de résultats dans des contextes mathématiques nouveaux et la possibilité même de cette traduction transformée en étape de l'histoire de cette notion ou de ce résultat. Les mathématiques contextualisent leur propre histoire : n'est-ce pas le paradigme de ce que Michel Serres désignait comme le « miracle perpétuel que constitue la communication historique des mathématiques[23] » ?

III- Des histoires à l'abandon ?

Les mathématiciens ne se passent donc pas d'histoire des mathématiques : ils en fabriquent et en utilisent. Les caractères spécifiques de ces histoires favorisent leur intégration au sein des mathématiques mêmes. Mais l'identification entre le passé et le présent, la reconnaissance dans des textes anciens de ce qui peut résonner avec une science actuelle, ont autant de valeur positive pour les mathématiciens rencontrés plus haut, pour qui elles illuminent de sens leur expérience d'exploration historique, que de valeur négative chez leurs opposants, pour qui ce sont les différences irréductibles avec le passé qui sont significatives et sources potentielles d'historicité profonde. Si les mathématiques se passent de leur histoire, alors que les mathématiciens ne s'en passent pas, c'est bien dans le sens où leurs praticiens court-circuitent le travail de ces identifications pour en faire la possibilité d'existence de vérités mathématiques.

---

[23] Michel Serres, *Hermès I : La communication*, Paris, Editions de Minuit, 1968.

Les pratiques à l'œuvre dans ces histoires mathématiciennes sont donc éclairantes pour les mathématiques mêmes. A ce titre, elles doivent aussi retenir l'intérêt des historiens[24],. Pourtant, elles ont été plus rarement l'objet d'études que celui de litiges sur les usages admissibles du passé. Qu'en est-il alors, à rebours, de l'histoire des historiens, dont c'est surtout la fonction critique qui a jusqu'à présent été évoquée ? Les décennies récentes ont été témoins de l'ouverture de nouveaux chantiers, parfois à partir deces litiges mêmes. «Il est assez clair que Mach ne doute pas de l'exactitude de la loi du levier d'Archimède ; il préfère affirmer que la déduction en est défectueuse. Ceci est un exemple classique de philosophie des sciences qui se focalise sur la validité d'un argument, indépendamment de l'histoire contextuelle », écrivent Giora Hon et Bernard Goldstein[25]. La situation est proche de celle qui avait opposé Zeuthen et Cantor : le premier, comme Ernst Mach, prenait pour acquis que certains aspects de la pratique mathématique restent inchangés au cours du temps, comme le lien entre assertions, les modes de justification, la définition des disciplines ; le second, comme Goldstein et Hon, réclamait une contextualisation de ces aspects, de ce qui constitue un résultat à une époque donnée, des transformations autorisées entre résultats. Mais leur constat conduit Goldstein et Hon ensuite à passer au crible ce que peut être un principe, et la notion même de symétrie, à l'époque d'Archimède. D'autres enquêtes historiques s'intéressent aux modes de justification en mathématiques, à l'idée de preuve, aux rôle des calculs, aux découpages disciplinaires ou à d'autres aspects archéologiques du savoir, comme l'abstraction, l'objectivité, l'analogie[26]. Elles mettent en évidence que ces aspects sont des composantes authentiques du travail mathématique, constitutives des résultats obtenus, des concepts étudiés, même si elles ne sont que rarement

[24] Je me permets de renvoyer sur ce point à *Un théorème de Fermat* …cité n. 9.
[25] *From Summetria to Symmetry : The Making of a Revolutionary Scientific Concept*, New York, Berlin, Springer, 2008, p. 44.
[26] Outre les références déjà données, voir Lorraine Daston et Peter Galison, *Objectivity*, New York, Time Zone, 2007 ; Marie–José Durand-Richard (éd.), *L'Analogie dans la démarche scientifique. Perspectives historiques*, Paris, L'Harmattan, 2008.

travaillées explicitement au cours de la recherche mathématique individuelle. Leur transformation au cours du temps contribue de ce fait à la transformation des composantes plus familières et plus explicites du savoir.

L'histoire de la théorie des nombres au 19e siècle était ainsi traditionnellement décrite comme une succession d'étapes ponctuelles, dues à l'action de quelques figures singulières, depuis les *Disquisitiones arithmeticae* de Carl Friedrich Gauss en 1801 jusqu'à la synthèse structurale fondée sur les corps de nombres algébriques proposée par David Hilbert en 1897. On y repérait l'apparition de méthodes analytiques avec Carl Jacobi et Gustav Lejeune-Dirichlet, la mise au jour, pour récupérer sur les nombres algébriques les propriétés satisfaisantes de primalité et de factorisation valables sur les entiers usuels, de la notion de nombre idéal par Kummer, puis d'idéal par Richard Dedekind, etc. Les démonstrations défectueuses, les propriétés manquantes y apparaissaient comme le principal moteur de l'innovation, l'avénement d'un point de vue structural l'aspect le plus important du développement du domaine. L'inspiration apportée par l'histoire sociale a suggéré une enquête plus systématique des publications dans les années 1830 à 1850, s'attachant aussi à repérer leurs liens multiples, sans les limiter *par avance* à celles identifiées comme déterminantes dans le récit usuel— c'est-à-dire en fait, *rétrospectivement*, en s'appuyant sur la seule mémoire vive des mathématiciens. Or, cette enquête[27] met en évidence plusieurs phénomènes nouveaux : par exemple, s'il n'existe pas à cette période une théorie des nombres organisée comme discipline de recherche autour d'un *programme commun* et de méthodes propres, les références croisées dans les articles et les correspondances témoignent d'une *pratique collective* attachée à l'observation d'objets variés (séries de Fourier, formes quadratiques, lois de réciprocité entre nombres premiers, nombres complexes et équations algébriques, fonctions elliptiques, …) et de leurs liens, exprimés par des

[27] Voir Catherine Goldstein, Norbert Schappacher et Joachim Schwermer (eds), *The Shaping of Arithmetic*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2007, en particulier le chapitre I.

formules. Ces objets ne relèvent pas tous *a priori* de la théorie des nombres, mais façonnent un domaine particulier à l'intérieur de l'analyse et de l'algèbre, les mathématiciens impliqués travaillant sur l'un ou l'autre de ces objets, tout en partageant une vision commune de l'unité de ce champ. « La méthode que j'emploie me paraît surtout mériter quelque attention par la liaison qu'elle établit entre l'analyse infinitésimale et l'arithmétique transcendante » , explique ainsi Dirichlet à Gauss à propos de l'introduction des séries qui portent maintenant son nom. On retrouve certes dans ce domaine les travaux traditionnellement associés à la genèse de la théorie des nombres moderne, ceux de Gauss, de Dirichlet, de Kummer, moins comme des étapes dans un processus linéaire que comme des propositions mélangées, parfois alternatives, face à un certain nombre de problèmes partagés ; mais on y trouve aussi d'autres recherches, celles d'Augustin Cauchy, de Christoph Gudermann ou de Richelot, que leurs prédilections orientent vers les aspects les moins arithmétiques du domaine (ce qui explique leur mise à l'écart de l'histoire traditionnelle de la théorie des nombres), mais qui partagent des manières de faire, des questionnements, des outils, qu'ils aident ainsi l'historien à détecter et à comprendre. Au centre de cette pratique commune se trouve l'obtention de formules comme[28]

$\sum \sin \frac{2\pi an}{q} - \sum \sin \frac{2\pi bn}{q} = \left(\frac{n}{q}\right)\sqrt{q}$ ou comme

$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt{\lambda}\sin am(\mu u,\lambda) \equiv \left(\sqrt{\kappa}\sin am(u,\kappa)\right)^n \bmod \mu.$

La première joue un rôle important dans le travail de Dirichlet sur la distribution des nombres premiers et offre un mélange caractéristique d'éléments vus alors comme analytiques, comme les fonctions circulaires, et arithmétiques, comme le symbole de Legendre. La seconde, interprétée maintenant (tout comme

[28] Les sommes finies parcourent les entiers a et b respectivement, strictement positifs plus petits que q, et carrés, pour a, ou non carrés, pour b, à un multiple de q près. L'expression $\left(\frac{n}{q}\right)$ désigne le symbole de Legendre, qui vaut 0 si q divise n, 1 si n est un carré non nul à un multiple de q près, -1 sinon.

l'algorithme sur les périodes mentionné plus haut) dans un cadre géométrique, paraît à l'époque particulièrement stimulante en ce qu'elle relie par une congruence arithmétique (c'est-à-dire une égalité à un multiple de μ près), qui dérive d'ailleurs ici d'une relation algébrique, des valeurs de fonctions complexes elliptiques (celles désignées par *sin am*).

L'examen de ces pratiques de travail permet à la fois une description nouvelle du développement de la théorie des nombres au 19e siècle et une nouvelle compréhension des travaux individuels : restituer pour le calcul de Richelot ce contexte spécifique permet de le situer dans un large courant où le travail sur et vers les formules est capital et va de pair avec le développement d'intuition affinée spécifique. Du même coup, l'association entre géométrie et intuition, qui paraît presque naturelle actuellement, ne va plus de soi, l'oubli au 20e siècle de résultats élaborés dans le cadre de cette pratique centrée sur les formules analytiques ne peut être attribué d'emblée à l'absence d'interprétation géométrique. Les dynamiques possibles de la transmission et de l'oubli s'avèrent plus riches, car elles peuvent opérer simultanément à différents niveaux ; la lecture d'une procédure de calcul dépend de l'environnement disciplinaire qui lui est attribué à un moment donné, car des modes de déchiffrement lui sont du même coup associés.

Restituer de telles pratiques collectives nécessite souvent de recourir à des techniques historiques qui permettent de réorganiser le savoir passé selon d'autres critères que le repérage précoce d'un concept ou d'un théorème. Peut-il y avoir une place dans la pratique et la mémoire des mathématiciens pour ce genre de résultats historiques, au-delà de leur fonction critique. La re-connaissance des mathématiques présentes dans celles du passé est souvent présentée dans les débats évoqués plus haut comme une preuve de connaissance mathématique ; l'historien peut la récuser comme connaissance historique, mais réciproquement, le type de savoir qu'il produit et exige risque d'être rejeté comme sans pertinence pour les mathématiques. Un élément, pourtant, insiste à l'optimisme. La réflexion sur la démonstration ou la notion de vérité a été longtemps un sujet abandonné à la philosophie, aux marges des mathématiques. Ce n’est plus le cas et les mathématiques ont absorbé une partie de cette interrogation comme portion intégrante d’elle-même. Il en est de même pour la mesure de la complexité de procédures de calculs. De nouveaux types d'énoncés — ceux qui permettent par exemple d'affirmer l'existence d'objets sans les construire —, ont acquis une légitimité au sein des mathématiques. La frontière entre ce qui est mathématique et ce qui ne l'est pas est donc fluctuante, et la richesse potentielle des mathématiques à intégrer, non seulement de nouveaux champs à mathématiser, mais aussi des problématiques issues de métaréflexions, n'est sans doute pas épuisée. On peut donc imaginer des mathématiciens qui ne se passent plus dans leurs recherches mêmes de l'histoire des historiens, c'est-à-dire des mathématiques qui ne se passent plus d'aucune parcelle de leur histoire.

Catherine Goldstein, cgolds@math.jussieu.fr
Institut de mathématiques de Jussieu
CNRS-UPMC