Introduction à la théorie des schémas
Devoir à la maison à rendre le 10 décembre 2014

Exercice 1 :
Soit k un corps, on note $K := k(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\Gamma := \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ le groupe abélien des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang, ordonné par l'ordre lexicographique : $(x_n) < (y_n)$ si et seulement s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = y_n$ pour tout $n < n_0$ et $x_{n_0} < y_{n_0}$. On note enfin $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de Γ.

a) Vérifier que la relation d'ordre sur Γ est une relation d'ordre totale compatible à la loi de groupe.

b) Montrer qu'il existe une unique valuation $v : K^* \to \Gamma$ telle que $v(T_n) = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v(k^*) = 0$.
On rappelle qu'une valuation est un morphisme de groupes $v : K^* \to \Gamma$ tel que $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ pour tout $x, y \in K^*$ (par convention, on pose $v(0) := \infty$, avec $\gamma < \infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma$).

c) On note $\mathcal{O}_v := \{x \in K : v(x) \geq 0\}$. Montrer que $\mathcal{O}_v$ est un anneau local dont on déterminera l'idéal maximal $\mathfrak{m}_v$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathfrak{I}_n := \{x \in K : v(x) \geq e_n\}$. Montrer que $\mathfrak{I}_n$ est un idéal de $\mathcal{O}_v$.

e) Montrer que l'idéal $\mathfrak{I}_n$ n'est pas saturé, puis que $\mathfrak{p}_n := \sqrt{\mathfrak{I}_n}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_v$.

f) Montrer que $\mathfrak{m}_v$ est la réunion croissante des $\mathfrak{p}_n$.

g) Quelle est la dimension de l'anneau $\mathcal{O}_v$?

h) On définit $\theta : \Gamma \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ par $\theta((u_n)) := \min\{n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0\}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_v$. Montrer que si $\theta(v(\mathfrak{p}))$ est majoré, alors $\mathfrak{p}$ est contenu dans l'un des $\mathfrak{p}_n$. Montrer aussi que si $\theta(v(\mathfrak{p}))$ n'est pas majoré, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_v$.

i) On définit X comme le sous-schéma ouvert $X := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v) \setminus \{\mathfrak{m}_v\}$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$. Montrer que X est un schéma non vide sans point fermé.

Exercice 2 :
Soit S un schéma. On rappelle qu'un $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{Q}$ est dit localement libre de rang r si tout point de S possède un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{Q}_{|U}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_U^r$.
On définit alors

$$G(k,n)(S) := \{(\mathcal{Q}, q)\,;\ \mathcal{Q} \text{ localement libre sur } S \text{ de rang } n-k \text{ et } q : \mathcal{O}_S^n \to \mathcal{Q} \text{ morphisme surjectif}\} \,/\, \sim,$$

où $\sim$ est la relation naturelle d'isomorphisme entre deux couples $(\mathcal{Q}, q)$ et $(\mathcal{Q}', q')$.

a) Expliciter la relation $\sim$.

b) Montrer que $G(k,n)$ définit naturellement un foncteur G : <u>Schémas</u> $\to$ <u>Ensembles</u>.

c) Montrer que pour tout schéma S, la restriction du foncteur G aux ouverts de S est un faisceau sur S.

d) Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal $n-k$. Pour $I = \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} \in \mathcal{I}$ (avec $i_p < i_{p+1}$) et pour un schéma S, on note $\iota_I : \mathcal{O}_S^{n-k} \to \mathcal{O}_S^n$ le morphisme envoyant la section $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ de $\mathcal{O}_S^{n-k}(S)$ (avec un 1 en j-ième position) sur la section $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ de $\mathcal{O}_S^n(S)$ (avec un 1 en i_j-ième position), pour tout $1 \leq j \leq n-k$. On définit enfin $G_I(S)$ comme les classes $(\mathcal{Q}, q)$ dans $G(S)$ telles que $q \circ \iota_I$ est surjectif.

   i) Montrer que pour tout $I \in \mathcal{I}$, G_I définit bien un sous-foncteur de G.

   ii) Soit S un schéma et $q \in G(S)$. Montrer que $U_I(q) := \{s \in S : (q \circ \iota_I)_s : \mathcal{O}_{S,s}^{n-k} \to \mathcal{Q}_s \text{ surjective }\}$ est un ouvert de S.

iii) Montrer qu'un point $s \in S$ est dans $U_I(q)$ si et seulement si l'application $\kappa(s)^{n-k} \to \mathcal{Q}_s/\mathfrak{m}_s\mathcal{Q}_s$ induite par $(q \circ \iota_I)_s$ est surjective.

iv) Soit $f : T \to S$, $t \in T$. On pose $s := f(t)$. Montrer que $s \in U_I(q)$ si et seulement si $t \in U_I(f^*q)$.

v) Montrer qu'un morphisme $f : T \to S$ se factorise par $U_I(q)$ si et seulement si $f^*(q) \in G_I(T)$.

e) Montrer que les sous-foncteurs G_I, $I \in \mathcal{I}$, recouvrent le foncteur G au sens suivant : pour tout schéma S, pour tout $q \in G(S)$, il existe un recouvrement ouvert $S = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} V_I$ tel que pour tout I, $q_{|V_I} \in G_I(V_I)$.

f) Montrons que G_I est représentable :

i) Soit S un schéma et $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux faisceaux localement libres de même rang fini. Montrer qu'un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un isomorphisme si et seulement si il est surjectif.

ii) Montrer que le foncteur G_I est isomorphe au foncteur $S \mapsto \prod_{j \notin I} \mathcal{O}_S^{n-k}(S)$.

iii) Montrer que le foncteur G_I est représentable par un schéma $\underline{G}_I$ isomorphe à $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{k(n-k)}$.

g) Montrons que G est représentable :

i) On note $q_I \in G_I(\underline{G}_I)$ l'objet universel. Montrer qu'il existe un recouvrement ouvert $\underline{G}_I = \bigcup_J U_{I,J}$ et des isomorphismes canoniques $\varphi_{I,J} : U_{I,J} \to U_{J,I}$ tels que $\varphi_{I,J} = \varphi_{J,I}^{-1}$.

ii) Montrer que pour tout triplet (I, J, K) d'éléments deux-à-deux distincts de $\mathcal{I}$, on a $\varphi_{I,J}(U_{I,K} \cap U_{I,J}) = U_{J,I} \cap U_{J,K}$ et $\varphi_{J,K} \circ \varphi_{I,J} = \varphi_{I,K}$.

iii) En déduire que G est représentable par un schéma quasi-compact noté $\underline{G}(k, n)$.

h) Montrer que le schéma $\underline{G}(k, n)$ est canoniquement muni d'un faisceau $\mathcal{G}_{k,n}$ localement libre de rang $n - k$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout schéma X, pour toute surjection $q : \mathcal{O}_X^n \to \mathcal{Q}$ avec $\mathcal{Q}$ localement libre de rang $n-k$, il existe un morphisme de schémas $f : X \to \underline{G}(k, n)$ tels que $\mathcal{Q}$ soit isomorphe à $f^*\mathcal{G}_{k,n}$.

i) Soit K un corps. Décrire explicitement $\underline{G}(k, n)(\mathrm{Spec}(K))$.

j) Soit S un schéma et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-modules localement libre de rang n. Montrer que le foncteur (défini sur la catégorie des S-schémas)

$$G(k, \mathcal{E})_S(T) := \{(\mathcal{Q}, q)\,;\ \mathcal{Q} \text{ localement libre de rang } n-k \text{ sur } T\,,\ q : \mathcal{E}_T \to \mathcal{Q} \text{ surjectif}\}/\sim$$

est représentable par un S-schéma $\underline{G}(k, \mathcal{E})_S$, et que ce schéma est canoniquement muni d'un $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{G}_{k,\mathcal{E}}$ localement libre de rang $n - k$ vérifiant une propriété universelle (que l'on explicitera) analogue à celle de la question h).

k) Quel est le lien entre $\underline{G}(k, n)$ et $\underline{G}(k, \mathcal{E})_S$?

l) Si $f : T \to S$ est un morphisme de schéma, comparer $\underline{G}(k, f^*\mathcal{E})_T$ et $\underline{G}(k, \mathcal{E})_S$, ainsi que $\mathcal{G}_{k,\mathcal{E}}$ et $\mathcal{G}_{k,f^*\mathcal{E}}$.

m) Avec les notations des questions précédentes, soit K un corps et $s : \mathrm{Spec}(K) \to S$ un morphisme de schéma. Décrire l'ensemble des S-morphismes de schémas $\mathrm{Spec}(K) \to \underline{G}(k, \mathcal{E})_S$.

n) Montrer que l'on a un isomorphisme canonique de schémas $\underline{G}(n, n+1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$.