UPMC Licence L3 de mathématiques 15-16
D. Bertrand *3M270 - Algèbre, 1re période, 2e session*

Examen du 7 Juin 2016

Durée: 2 heures

Les documents, calculatrices, portables ... ne sont pas autorisés.
Les 4 *énoncés sont indépendants.* **Les réponses devront être justifiées.**
Barême approximatif (sur 75 points) : I = 15 pts; II = 12 pts; III = 27 pts; IV = 21 pts.

I

On considère la permutation $\sigma = (61)(7154)(7213)(613)$ du groupe symétrique $\mathcal{S}_7$.

1°/ Donner la décomposition de σ en produit de cycles disjoints.

2°/ i) Calculer la signature et l'ordre de σ.
ii) Même question pour la permutation σ^{16}.

3°/ On considère la permutation $\sigma' = (1234)(567)$. Montrer qu'il existe un élément τ de $\mathcal{S}_7$ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$, trouver un tel élément τ et donner sa décomposition en produit de cycles disjoints.

II

Soient G un groupe d'ordre 33, agissant sur un ensemble fini X. Un point fixe est un élément x de X tel que $g.x = x$ pour tout $g \in G$.

1°/ On suppose que X a 19 éléments. Montrer qu'il existe au moins un point fixe.

2°/ On suppose que X a 17 éléments, et qu'il n'y a pas de point fixe. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune des orbites.

III

Soit G un groupe d'ordre 7×13^2. On note H un de ses 13-sous-groupes de Sylow, et K un de ses 7-sous-groupes de Sylow.

1°/ i) Calculer le nombre n_{13} de 13-Sylows de G.
ii) Montrer que G est un produit semi-direct $H \rtimes_\varphi K$, où φ désigne un homomorphisme de K dans $Aut(H)$.

2°/ On suppose ici que $H \simeq \mathbb{Z}/13^2\mathbb{Z}$ est cyclique.
i) Montrer que le produit semi-direct est direct, et que G est cyclique.
ii) Pour tout diviseur d de 7×13^2, calculer le nombre ν_d d'éléments de G d'ordre d.

TSVP

3°/ On suppose maintenant que $H \simeq (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$. On admettra que pour tout nombre premier p, l'ordre du groupe $Aut\big((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\big)$ vaut $(p^2 - 1)(p^2 - p)$.

i) Montrer que $Aut(H)$ admet un élément d'ordre 7.

ii) Montrer qu'il existe au moins un groupe non commutatif G d'ordre 7×13^2.

iii) Donner pour un tel groupe G le nombre n_7 de 7-Sylows de G.

iv) Pour tout diviseur d de 7×13^2, calculer le nombre ν_d d'éléments de G d'ordre d.

IV

Soit G un groupe d'ordre $5\,! = 8 \times 3 \times 5$. On suppose que G est un groupe simple, c-à-d. que $\{e\}$ et G sont les seuls sous-groupes distingués de G.

1°/ Soit $\varphi : G \to \Gamma$ un homomorphisme de G dans un autre groupe Γ. Montrer que φ est ou bien trivial ($\varphi(G) = \{e\}$), ou bien injectif.

2°/ i) Déterminer le nombre de 5-Sylows de G.

ii) Montrer qu'il existe un homomorphisme non trivial f de G dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_6$.

3°/ Soit $G' := f(G)$ l'image de G dans $\mathcal{S}_6$.

i) Montrer que $G' \simeq G$, et que G' est contenu dans le sous-groupe $\mathcal{A}_6$ de $\mathcal{S}_6$. (On pourra considérer la restriction à G' de l'homomorphisme de signature $\epsilon : \mathcal{S}_6 \to \{\pm 1\}$.)

ii) En faisant agir G' à gauche sur l'ensemble $\mathcal{A}_6/G'$, montrer que G' est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_6$.

4°/ En déduire qu'il n'existe en fait aucun groupe simple d'ordre $5\,!$.

Corrigé

I. $1^o/$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (163)(2547)$.

$2^o/$ i) Donc $\epsilon(\sigma) = (-1)^{3-1} \times (-1)^{4-1} = -1$, et $ord(\sigma) = ppcm(3,4) = 12$ - ii) $\epsilon(\sigma^{16}) = 1$, et $\sigma^{16} = \sigma^4$ est d'ordre $\frac{12}{4} = 3$.

$3^o/$ σ et σ' sont de même type $(3,4)$, donc sont conjugués par un élément τ de $\mathcal{S}_7$. Comme $\tau(163)(2547)\tau^{-1} = \tau(163)\tau^{-1}\tau(2547)\tau^{-1} = \big(\tau(1)\tau(6)\tau(3)\big)\big(\tau(2)\tau(5)\tau(4)\tau(7)\big)$, on peut choisir $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (152)(374)$.

II. $1^o/$ X est réunion disjointe d'orbites $G.x_i$ $(i = 1, ..., h)$, et le cardinal N_i de chaque orbite $G.x_i$ vaut $[G : Stab_G(x_i)]$, donc est un diviseur de $|G| = 3 \times 11$. Ainsi N_i vaut 1 (ce qui arrive si et slt si x_i est un point fixe), ou 3, ou 11 ou 33, et $\Sigma_{i=1,...,h} N_i = card(X)$. Pour $card(X) = 19$, les seules solutions de cette équation sont $19 = 11 + 3 + 3 + 1 + 1$, $19 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1$, et d'autres faisant intervenir plus de trois "1". Il y a donc dans tous les cas au moins un point fixe.

$2^o/$ Pour $card(X) = 17$ et $N_i \neq 1$ pour tout $i = 1, ..., h$, la seule solution de l'équation est $17 = 11 + 3 + 3$. Il y a donc une orbite à 11 éléments, deux orbites à 3 éléments, et en tout $h = 3$ orbites.

III. $1^o/$ i) $n_{13} \equiv 1$ (mod. 13) et n_{13} divise 7, donc $n_{13} = 1$. - ii) Par conséquent, H est un sous-groupe distingué de G. Par ailleurs, le sous-groupe K de G est d'ordre 7 premier à $|H| = 13^2$, donc $H \cap K = \{e\}$. Enfin, $|H|.|K| = |G|$. Donc G est le produit semi-direct interne $H \rtimes K$ de H par K, ou de façon équivalente, le produit semi-direct $H \rtimes_\varphi K$ pour l'action de K sur H par conjugaison, c-à-d. par l'homomorphisme $\varphi : K \to Aut(H) : k \mapsto \{\varphi(k) : h \mapsto \varphi(k)(h) := khk^{-1}\}$.

$2^o/$ i) Pour le groupe cyclique $H = \mathbb{Z}/13^2\mathbb{Z}$, $Aut(H) \simeq (\mathbb{Z}/13^2\mathbb{Z})^*$ est d'ordre $\phi(13^2) = 13.12$, qui est premier à 7. Tout homomorphisme φ de $K \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $Aut(H)$ est donc trivial, et le produit semi-direct $H \rtimes_\varphi K$ est direct. Ainsi, $G \simeq H \times K \simeq (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13^2\mathbb{Z})$ qui, par le lemme chinois, est isomorphe à $\mathbb{Z}/7.13^2\mathbb{Z}$, donc cyclique. - ii) Par conséquent, pour tout diviseur d de $|G|$, G a un unique sous-groupe d'ordre d, qui est cyclique, et le nombre ν_d d'éléments de G d'ordre d est égal à $\phi(d)$. Ainsi, $\nu_1 = 1, \nu_7 = 6, \nu_{13} = 12, \nu_{7.13} = 6 \times 12, \nu_{13^2} = 13 \times 12$, et $\nu_{7.13^2} = 6 \times 12 \times 13$.

$3^o/$ i) L'ordre de $Aut(H)$ est ici $(13^2 - 1)(13^2 - 13)$, qui est divisible par $13 + 1$, donc par 7. D'après le lemme de Cauchy, $Aut(H)$ admet donc un élément α d'ordre 7. - ii) L'application $\varphi : K \to Aut(H)$ qui associe à $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \simeq K$ l'élement α^x de $Aut(H)$ est bien définie, et c'est un homomorphisme non trivial de K dans $Aut(H)$. Le produit semi-direct correspondant $G := H \rtimes_\varphi K$ n'est donc pas direct, et G n'est pas commutatif. - iii) En particulier, $n_7 \neq 1$, sans quoi tous les p-Sylows de G seraient distingués, et G serait isomorphe à leur produit direct $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$, qui est abélien. Les conditions $n_7 \equiv 1$ (mod. 7) et $n_7 | 13^2$ entraînent alors que $n_7 = 13^2 = 169$. - iv) Comme les 7-Sylows sont d'ordre premier, ils ne se rencontrent deux à deux qu'en $\{e\}$, et G admet $\nu_7 = \phi(7) \times n_7 = 6.13^2$ éléments d'ordre 7. Les éléments d'ordre 13 étant contenus dans le 13-Sylow $H \simeq (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$, il y en a $\nu_{13} = 13^2 - 1$. Avec $\nu_1 = 1$, cela fait déjà $1 + 6 \times 13^2 + 13^2 - 1 = |G|$ éléments, donc $\nu_{7.13} = 0$ (et bien sûr, ν_{13^2}, resp. $\nu_{7.13^2} = 0$, sans quoi H, resp. G serait cyclique).

IV. 1^o/ $Ker(\varphi) \triangleleft G$, donc est égal à G ($\Leftrightarrow \varphi(G) = \{e_\Gamma\}$) ou à $\{e_G\}$ ($\Leftrightarrow \varphi$ est injectif).
2^o/ i) Comme G est simple, il ne peut pas avoir un seul 5-Sylow, et les relations $n_5 | 24, n_5 \equiv 1$ mod. 5 entraînent que l'ensemble X des 5-Sylows de G a $n_5 = 6$ éléments. - ii) Le groupe G agit par conjugaison sur X, d'où un homomorphisme f de G dans le groupe $\mathcal{S}_X \simeq \mathcal{S}_6$ des permutations de X. Comme G agit transitivement sur X, f ne peut être trivial.
3^o/ i) Comme f n'est pas trivial, il est injectif et $G' \simeq G$ est encore un groupe simple d'ordre $5\,!$. La restriction ϵ' de ϵ à G' est un homomorphisme de G' vers un groupe à 2 éléments. Comme $5\,! > 2$, ϵ' ne peut pas être injectif, donc il est trivial et $G' = Ker(\epsilon') < Ker(\epsilon) = \mathcal{A}_6$. - ii) L'action de G' sur l'ensemble $\mathcal{A}_6/G'$, qui a $6!/2.5! = 3$ éléments, est donnée par $(g', aG') \mapsto g'aG'$ et fournit un homomorphisme φ de G' dans $\mathcal{S}_3$. Comme $5! > 3!$, cet homomorphisme est trivial. Ainsi, pour tout $g' \in G', a \in \mathcal{A}_6$, on a $g'aG' = aG'$, d'où $a^{-1}g'a \in G'$ et $G' \triangleleft \mathcal{A}_6$.
4^o/ Le groupe $\mathcal{A}_6$ est simple. Il n'admet donc pas de sous-groupe distingué G' d'ordre $5! < 6!/2$ (et > 1), et l'hypothèse de l'énoncé n'est jamais satisfaite.