UPMC Licence L3 de mathématiques 15-16
D. Bertrand *3M270 - Algèbre*

Examen du 5 Janvier 2016

Durée: 2 heures

Les documents, calculatrices, portables ... ne sont pas autorisés.
Les 4 énoncés sont indépendants. **Les réponses devront être justifiées.**
Barême approximatif (sur 75 points) : I = 18 pts; II = 18 pts; III = 15 pts; IV = 24 pts.

I

1°/ Pour tout entier x, on note $\bar{x}$ la classe de x modulo 9 . Calculer l'ordre de $\bar{2}$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$.

2°/ Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ sont isomorphes.

3°/ Déterminer les facteurs invariants du groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, où $N = 5 \times 7 \times 9$.

4°/ Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 12 du groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$.

II

Soient n un entier impair, et G un groupe d'ordre $2n$. On se propose de montrer que G admet un sous-groupe d'indice 2.

1^0/ Soient m un entier ≥ 2, p un nombre premier $\leq m$, σ un élément d'ordre p du groupe symétrique $\mathcal{S}_m$ et $\sigma = c_1...c_k$ la décomposition de σ en produit de cycles de supports disjoints. On suppose que σ n'a aucun point fixe. Montrer que les cycles $c_1, ..., c_k$ sont tous de longueur p, et que $m = pk$.

2^0/ On fait agir $G = \{x_1, ..., x_{2n}\}$ sur lui-même par multiplication à gauche ($g.x := gx$), et on note ϕ l'homomorphisme correspondant de G dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_{2n}$. Montrer qu'il existe un élément g de G tel que que $\phi(g)$ soit le produit de n transpositions de supports disjoints, et calculer la signature de $\phi(g)$.

3^0/ Conclure.

III

Soit G un groupe d'ordre $992 = 32 \times 31 = 2^5\, p$, où $p = 31$. On note n_p le nombre de ses p-sous-groupes de Sylow, et on suppose que $n_p > 1$.

1°/ Calculer n_p.

2°/ Calculer le nombre d'éléments d'ordre p de G.

3°/ En déduire que G admet un unique 2-sous-groupe de Sylow.

4°/ Montrer qu'aucun groupe d'ordre 992 n'est simple.

TSVP

IV

Pour tout nombre premier p et tout groupe fini G, on note $n_p(G)$ le nombre des p-sous-groupes de Sylow de G.

1°/ Soit N un groupe d'ordre 33.
a) Calculer $n_{11}(N)$ et $n_3(N)$.
b) Montrer que N est cyclique.

2°/ Soit N un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G. Montrer que N est distingué dans G.

On considère désormais un groupe fini G d'ordre 66.

3°/ a) Montrer que G contient un unique 11-sous-groupe de Sylow, qu'on notera K.
b) Soit H un 3-sous-groupe de Sylow de G. Montrer que KH est un sous-groupe de G, qu'il est cyclique, et qu'il est distingué dans G.

4°/ Montrer que H est distingué dans G.

5°/ a) On suppose ici que $n_2(G) = 1$. Montrer que G est un groupe cyclique.
b) Donner un exemple d'un groupe G d'ordre 66 non cyclique.

6°/ a) Montrer qu'il existe 4 homomorphismes de groupes $\phi_i : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to Aut(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})$, $(i = 1, ..., 4)$.
b) Pour $i = 1, ..., 4$, on note G_i le produit semi-direct $(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}) \rtimes_{\phi_i} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Calculer le nombre ν_i d'éléments d'ordre 2 du groupe G_i.
c) Montrer que tout groupe d'ordre 66 est isomorphe à l'un des groupes G_i, et qu'ils sont deux à deux non isomorphes.