UPMC Master M1 de mathématiques 12-13
D. Bertrand *MM001- Algèbre géométrique*

Examen du 20 Décembre 2012
Durée: 3 heures

L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.
Les 3 énoncés sont indépendants. La caractéristique du corps K est nulle.

I (7 pts)

Soit Γ la quadrique de l'espace projectif $\mathbb{P}_3(K)$ définie par la forme quadratique en quatre variables

$$q(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 + 2XZ + 2YT - T^2.$$

1^0/ i) Déterminer la matrice B de la forme bilinéaire b associée à q.

ii) Montrer que Γ n'a pas de point singulier.

iii) Donner une équation du plan tangent $T_{P_0}(\Gamma)$ à Γ au point $P_0 = (-1 : 1 : \frac{3}{2} : 1) \in \Gamma$.

2^0/ Soient O le point de coordonnées homogènes $(0 : 0 : 0 : 1)$ (qui n'appartient pas à Γ), et $\mathbf{H} = O^\perp$ l'(hyper-)plan polaire du point O par rapport à Γ. On pose $C = \mathbf{H} \cap \Gamma$.

i) Donner une équation de $\mathbf{H}$, et montrer que C est une conique lisse du plan $\mathbf{H}$.

ii) (La réponse à cette question ne nécessite aucun calcul.) Montrer que si P est un point de C, la droite (OP) est tangente à Γ. Inversement, montrer que si $\mathbf{D}$ est une droite passant par O, et tangente à Γ, le point de contact P de $\mathbf{D}$ avec Γ est situé sur C.

3^0/ On reprend les notations du 2^o/, et on considère l'ouvert affine $\mathcal{H} \simeq K^3$ complémentaire du plan $T = 0$. On utilisera sur $\mathcal{H}$ les coordonnées affines $(x = \frac{X}{T}, y = \frac{Y}{T}, z = \frac{Z}{T})$.

i) Donner les équations en coordonnées affines (x, y, z) de la quadrique affine $\Gamma \cap \mathcal{H}$, du plan affine $\mathbf{H} \cap \mathcal{H}$ et de la conique affine $C \cap \mathcal{H}$.

ii) Soient λ, μ deux éléments de K, et $D_{\lambda,\mu}$ la droite de $\mathcal{H}$ définie par les équations $x = \lambda y, z = \mu y$. Trouver, sans faire appel aux résultats du 2^o/, un polynôme $\Delta(\lambda, \mu)$ tel que $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ si et seulement si la droite $D_{\lambda,\mu}$ est tangente à $\Gamma \cap \mathcal{H}$.

iii) Retrouver ce polynôme au moyen des résultats du 2^o/.

II (5 points)

Soient V, resp. W, un espace vectoriel de dimension finie n, resp. m, sur K, et $g \in \mathcal{L}(V, V)$, resp. $h \in \mathcal{L}(W, W)$, un endomorphisme de V, resp. W. On désigne par $g \otimes h$ l'unique endomorphisme de $V \otimes W$ tel que

$$\forall v \in V, w \in W, \text{ on a } : (g \otimes h)(v \otimes w) = g(v) \otimes h(w).$$

1^0/ Soient v un vecteur propre de g, de valeur propre λ, et w un vecteur propre de h, de vecteur propre μ. Montrer que $v \otimes w$ est un vecteur propre de $g \otimes h$ et donner la valeur propre correspondante

$\mathbf{2}^0$/ On suppose que g et h sont diagonalisables, et on note $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ et $\{\mu_1, ..., \mu_m\}$ leurs valeurs propres respectives, répétées en tenant compte de leurs multiplicités. Montrer que $g \otimes h$ est diagonalisable, et écrire la liste de ses valeurs propres (répétées avec la même convention).

$\mathbf{3}^0$/ Soient $A \in Mat_{n,n}(K)$, resp. $B \in Mat_{m,m}(K)$, deux matrices carrées d'ordre n, resp. m, et $A \otimes B \in Mat_{nm,nm}(K)$ leur produit de Kronecker. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $det(A \otimes B) = (detA)^m (detB)^n$.

III (9 pts)

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine sur K, et $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Sur les côtés du triangle ABC, on place trois points A', B' et C' de façon que

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{CB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}.$$

Soient M le point d'intersection des droites (AA') et (BB'), et N le point d'intersection des droites (AA') et (CC').

$\mathbf{1}^0$/ On désigne par $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, les coordonnées barycentriques relativement au repère $\mathcal{R}$.

i) Calculer les coordonnées barycentriques des points A', B', C'.

ii) Donner une équation de la droite (AA') en coordonnées barycentriques.

iii) Même question pour les droites (BB') et (CC').

$\mathbf{2}^0$/ i) Calculer les coordonnées barycentriques du point $N = (CC') \cap (AA')$.

ii) Même question pour le point $M = (AA') \cap (BB')$.

iii) Montrer que M est le milieu du segment AN.

(*Les questions qui suivent sont indépendantes des précédentes*).

On note L le point d'intersection des droites (BB') et (CC').

$\mathbf{3}^0$/ i) Trouver une transformation affine s de $\mathcal{E}$ telle que $s(A) = A, s(B) = C, s(C) = B$.

ii) Montrer qu'il existe une transformation affine f de $\mathcal{E}$ telle que $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A$.

iii) Déterminer l'image de N, de M et de L par f. En déduire que $\frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NL}} = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MN}}$.

$\mathbf{4}^0$/ i) Justifier la relation : $\frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}} \times \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{MA}} \times \frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{LN}} = 1$. (On pourra considérer la sécante (BB') au triangle ANC.)

ii) Déduire de $3^o/(iii)$ et $4^o/(i)$ que M est le milieu du segment AN.

Corrigé

I.1^0/ i) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. - ii) Comme $det(B) \neq 0$, b est non dégénérée, et Γ est lisse. - iii) $T_{P_0}(\Gamma)$ admet pour équation : "$Xq'_X(P_0) + ... + Tq'_T(P_0)$" $= X + 4Y - 2Z = 0$.

2^0/ i) Le plan polaire **H** de O est l'ensemble des points $Q = [X : Y : Z : T] \in \mathbb{P}_3(K)$ tels que $b(O, Q) = 0$, donc est défini par l'équation : $Y - T = 0$. Sur **H**, on a $Y = T$, donc $C = \mathbf{H} \cap \Gamma$ s'identifie à l'ensemble des points $[X : Z : T] \in \mathbb{P}_2(K)$ tels que $q_C(X, Z, T) := X^2 + 2XZ + 2T^2 = (X + Z)^2 - Z^2 + 2T^2 = 0$. Le rang de cette forme quadratique en 3 variables vaut 3, donc C est une conique lisse. - ii) Puisque Γ est lisse, on peut parler, pour tout point P de Γ, du plan tangent $T_P(\Gamma)$ à Γ en P, et on a : $T_P(\Gamma) = \{Q \in \mathbb{P}_3(K), b(P, Q) = 0\}$. Supposons alors que $P \in C$. Puisque $P \in \mathbf{H}$, on a $b(O, P) = 0 = b(P, O)$, donc $O \in T_P(\Gamma)$, et la droite (PO), contenue dans $T_P(\Gamma)$, est tangente à Γ. Inversement, toute droite **D** issue de $O \notin \Gamma$ et tangente à Γ rencontre Γ en un seul point P (compté deux fois), et $\mathbf{D} = (OP) \subset T_P(\Gamma)$. Alors, $O \in T_P(\Gamma)$, donc $b(P, O) = 0 = b(O, P)$, et P appartient au plan polaire **H** de O, donc à $\mathbf{H} \cap \Gamma = C$.

3^0/ i) La partie de Γ (resp. la partie H de **H**) située dans $\mathcal{H} = K^3$ admet pour équation la déshomogénéïsée $\tilde{q}(x, y, z)$ de $q(X, Y, Z, T)$ (resp. de $Y - T$) par rapport à T, soit : $\tilde{q}(x, y, z) := x^2 + y^2 + 2xz + 2y - 1 = 0$ (resp. $y - 1 = 0$). De même, $C \cap \mathcal{H}$ est la conique du plan affine $H : \{y = 1\} \simeq \{(x, z) \in K^2\}$ de K^3, d'équation $\tilde{q}_C(x, z) := x^2 + 2xz + 2 = 0$. - ii) La droite $D_{\lambda,\mu}$, qui passe par $O = (0, 0, 0) \in \mathcal{H}$, n'est pas contenue dans Γ, et est donc tangente à $\Gamma \cap \mathcal{H}$ si et slt si $\mathcal{H} \cap \Gamma \cap D_{\lambda,\mu}$ est réduit à un point, compté deux fois. Cette intersection est formée des points $(x = \lambda y, y, z = \mu y)$ tels que $\tilde{q}(\lambda y, y, \mu y) = 0$, et est donc en bijection avec l'ensemble des racines y du trinôme $(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 1)y^2 + 2y - 1 = 0$. Celui-ci a une racine double si et slt si son discriminant (réduit) s'annule, c-à-d. si et slt si $\Delta(\lambda, \mu) := \lambda^2 + 2\lambda\mu + 2 = 0$. - iii) D'après 2^o/, appliqué sur l'ouvert $\mathcal{H}$, $D_{\lambda,\mu}$ est tangente à $\Gamma \cap \mathcal{H}$ si et slt si $\mathcal{H} \cap \Gamma \cap D_{\lambda,\mu}$ est un point P de la partie affine H du plan polaire de O, c-à-d. si et slt si son ordonnée y vaut 1. Alors $P \in D_{\lambda,\mu}$ est le point de coordonnées affines $(x = \lambda, y = 1, z = \mu)$, qui appartient à C si et slt si $\tilde{q}_C(\lambda, \mu) = 0$. Enfin, on a bien : $\tilde{q}_C(\lambda, \mu) \equiv \lambda^2 + 2\lambda\mu + 2 \equiv \Delta(\lambda, \mu)$.

II.1^0/ Comme v et w sont non nuls, $v \otimes w \neq 0$. Par ailleurs, $(g \otimes h)(v \otimes w) = g(v) \otimes h(w) = (\lambda v) \otimes (\mu w) = \lambda\mu(v \otimes w)$, donc $v \otimes w$ est un vecteur propre de $g \otimes h$, de valeur propre $\lambda\mu$.

2^0/ Soient $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ une base de V formée de vecteurs propres de g, de valeurs propres respectives $\{\lambda_i, i = 1, ..., n\}$, et $\{\epsilon_j, j = 1, ..., m\}$ une base de W formée de vecteurs propres de h, de valeurs propres respectives $\{\mu_j, j = 1, ..., m\}$. Alors, la famille $\mathcal{B} = \{e_i \otimes \epsilon_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ est formée de vecteurs propres de $g \otimes h$, de valeurs propres respectives $\{\lambda_i\mu_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $V \otimes W$, $g \otimes h$ est bien diagonalisable, et ses valeurs propres sont les mn scalaires $\lambda_i\mu_j$, répétés en tenant compte de leurs multiplicités.

$\mathbf{3}^0$/ D'après 2^o/, la matrice $A \otimes B$ représente un endomorphisme de $V \otimes W$ diagonalisable, de valeurs propres les mn scalaires $\lambda_i\mu_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Le déterminant d'une matrice diagonalisable étant le produit de ses valeurs propres, répétées selon leurs multiplicités, on a $det(A \otimes B) = \Pi_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}\lambda_i\mu_j = (\Pi_{1\leq i\leq n}\lambda_i)\mu_1^n...(\Pi_{1\leq i\leq n}\lambda_i)\mu_m^n = \big((\Pi_{1\leq i\leq n}\lambda_i)\big)^m\big(\Pi_{1\leq j\leq m}\mu_j)\big)^n = (detA)^m(detB)^n$.
Remarque : si g et h sont trigonalisables, on démontre de façon similaire que $g \otimes h$ est trigonalisable, et que ses coefficients diagonaux se déduisent de ceux de A et B comme supra. La formule pour $det(A \otimes B)$ vaut donc encore si A et B sont trigonalisables, donc en particulier pour toutes les matrices A, B si $K = \mathbb{C}$. Le "principe des identités remarquables" entraîne alors qu'elle est valable sur tout corps (commutatif) K.

III.1^0/ i) $A' = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C$, $B' = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}A$, $C' = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. - ii) La droite (AA') admet pour équation barycentrique $det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1/3 & \lambda_2 \\ 0 & 2/3 & \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$, soit : $2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$, avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. - iii) De même, ou par permutation circulaire, on trouve $2\lambda_3 - \lambda_1 = 0$ pour (BB'), et $2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ pour (CC').
$\mathbf{2}^0$/ i) Le coordonnées barycentriques de $N = (CC') \cap (AA')$ vérifient : $\lambda_2 = 2\lambda_1, \lambda_3 = 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, soit : $N = \frac{1}{7}A + \frac{2}{7}B + \frac{4}{7}C$. - ii) De même, ou par permutation circulaire, $M = (AA') \cap (BB') = \frac{4}{7}A + \frac{1}{7}B + \frac{2}{7}C$. - iii) Par associativité des barycentres, le milieu $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}N$ du segment AN est le point $(\frac{1}{2} + \frac{1}{14}, 0 + \frac{2}{14}, 0 + \frac{4}{14}) = \frac{4}{7}A + \frac{1}{7}B + \frac{2}{7}C = M$.
$\mathbf{3}^0$/ i) La symétrie s_A d'axe la médiane du triangle issue de A, parallèlement à $K.\overrightarrow{BC}$, répond à la question. - ii) Si s_C désigne la symétrie fixant C et échangeant A et B, la transformation affine $f = s_C \circ s_A$ répond à la question. Autre méthode : comme $\mathcal{R}' = \{B, C, A\}$ est aussi un repère de $\mathcal{E}$, il existe une unique transformation affine f envoyant $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$. - iii) Comme les transformations affines préservent les barycentres, on a : $f(C') = A', f(A') = B', f(B') = C'$, donc l'image de $N = (CC') \cap (AA')$ est le point $f(N) = (AA') \cap (BB') = M$, $f(M) = L, f(L) = N$. Donc $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MN}} = \frac{\overrightarrow{f(N)f(C)}}{\overrightarrow{f(N)f(L)}}$, qui vaut $\frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NL}}$ puisque f préserve les rapports.
$\mathbf{4}^0$/ i) La droite (BB') coupe le côté (CA) en B', (AN) en M, (NC) en L. Le théorème de Menelaüs entraîne donc que $\frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}} \times \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{MA}} \times \frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{LN}} = 1$. (Dans les notations du poly, I. §2.3, remarquer que si $L = xB + x'C$, alors $\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{LB}} = -\frac{x}{x'}$.) - ii) Posons $x = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MN}}$. Comme $\frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}} = -\frac{1}{2}$, et $\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{LN}} = \frac{\overrightarrow{LN}}{\overrightarrow{LN}} + \frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{LN}} = 1 - x$ d'après 3^o/, la relation donne : $-\frac{1}{2}.\frac{1}{x}.(1 - x) = 1$, soit $x = -1$, et M est bien le milieu de AN.