Partiel du 13 Novembre 2012
Durée: 3 heures

L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.
Les 3 énoncés sont indépendants. La caractéristique du corps K est $\neq 2$.

I (8 pts)

On se place dans un plan affine $\mathcal{E}$ sur K. Soit n un entier > 0, et soient A_0, O_1, O_2, …, O_n des points de $\mathcal{E}$. Considérons les points A_1, A_2, …, A_n de $\mathcal{E}$ tels que, pour tout $i = 1, \dots n$, le point O_i soit le milieu du segment $A_{i-1}A_i$. Considérons ensuite les points B_1, B_2, …, B_n tels que O_1 soit le milieu du segment A_nB_1 et que, pour tout $i = 2, \dots, n$, le point O_i soit le milieu du segment $B_{i-1}B_i$. On se propose de montrer que si l'entier n est impair, les points A_0 et B_n coïncident.

1^0/ On suppose ici que $n = 3$. Faire un dessin de cette configuration, puis :
i) Trouver une application affine s_1 telle que $A_1 = s_1(A_0)$ et $B_1 = s_1(A_3)$.
ii) Trouver une translation t_2 telle que $A_2 = t_2(A_0)$ et $B_2 = t_2(A_3)$.

2^0/ On suppose ici que n est un nombre impair.
i) Trouver une translation T telle que $A_{n-1} = T(A_0)$ et $B_{n-1} = T(A_n)$.
ii) Trouver une application affine s telle que $A_n = (s \circ T)(A_0)$, et $B_n = (s \circ T)(A_n)$.
iii) Montrer que $B_n = A_0$.

3^0/ On suppose ici n pair. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les points O_i pour que $B_n = A_0$ pour tout choix du point A_0.

4^0/ (*Cette question est indépendante des précédentes.*) On suppose de nouveau que $n = 3$, et de plus, que $\mathcal{R} = \{O_1, O_2, O_3\}$ forme un repère affine de $\mathcal{E}$. Soit

$$A_0 = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2 + \lambda_3 O_3, \text{ avec } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

l'expression de A_0 en coordonnées barycentriques dans le repère $\mathcal{R}$.
i) Calculer les coordonnées barycentriques (μ_1, μ_2, μ_3) de A_1 dans le repère $\mathcal{R}$.
ii) En s'inspirant des formules de passage de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ à (μ_1, μ_2, μ_3), donner les coordonnées barycentriques de A_2 dans $\mathcal{R}$.
iii) Même question pour A_3, B_1, B_2, B_3. Que constate-t-on ?

II (6 pts)

Soient $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ les coordonnées homogènes dans l'espace projectif $\mathbb{P}_3(K)$. On fixe deux paramètres $\lambda, \mu \in K$, et on considère les trois droites projectives $\mathbf{D}, \Delta$ et $\mathbf{D'} = \mathbf{D'}_{\lambda,\mu}$ de $\mathbb{P}_3(K)$ définies par :

$$\mathbf{D} = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}_3(K), x_2 = x_3 = 0\},$$

$$\Delta = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}_3(K),\ x_0 = x_1 = 0\},$$

$$\text{et} \quad \mathbf{D}' = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}_3(\mathbb{K}),\ x_0 = \lambda x_2 \text{ et } x_3 = \mu x_1\}.$$

1^0/ i) Montrer que les droites $\mathbf{D}$ et Δ sont disjointes.

ii) Déterminer les valeurs des paramètres λ, μ tels que : (a) les droites $\mathbf{D}'$ et Δ soient disjointes; (b) les droites $\mathbf{D}'$ et $\mathbf{D}$ soient disjointes.

On suppose désormais que les droites $\mathbf{D}, \Delta$ *et* $\mathbf{D}'$ *sont deux à deux disjointes.*

2^0/ Soit P un point de $\mathbf{D}$. Montrer, sans utiliser de coordonnées, que :

i) il existe un unique plan $\mathbf{H}_P$ de $\mathbb{P}_3(K)$ contenant P et Δ.

ii) il existe un unique point P' de $\mathbf{D}'$ tel que la droite (PP') rencontre la droite Δ.

3^0/ On note $\phi : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ l'application qui attache à tout point P de $\mathbf{D}$ le point P' de $\mathbf{D}'$ défini au 2^o/ii). Soit $P = [a_0 : a_1 : 0 : 0]$ un point de $\mathbf{D}$.

i) Donner une équation du plan $\mathbf{H}_P$.

ii) Calculer les coordonnées $[\lambda b_2 : b_1 : b_2 : \mu b_1]$ du point $P' = \phi(P)$.

iii) En déduire que $\phi : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ est une homographie. Quel nom porte-t-elle ?

III (7 pts)

On considère cinq points distincts A, B, C, D, E du plan projectif $\mathbb{P}_2(K)$ tels que trois quelconques de ces cinq points ne sont jamais alignés. On pose

$$A' = (BD) \cap (CE)\ ,\ B' = (CE) \cap (DA)\ ,\ C' = (DA) \cap (EB)\ ,$$

$$D' = (EB) \cap (AC)\ ,\ E' = (AC) \cap (BD)\ .$$

1^0/ i) Montrer que ces formules définissent bien cinq points A', B', C', D', E' de $\mathbb{P}_2(K)$.

ii) Dessiner cette configuration dans un ouvert affine, en supposant que $K = \mathbb{R}$ et que les cinq côtés successifs du pentagone $ABCDE$ forment une figure convexe.

iii) Vérifier que $C' \neq D'$, et que $A' \notin (C'D')$. Dans la suite du texte, on pourra admettre de telles assertions au vu de la figure de (ii).

2^0/ Montrer qu'il existe une unique homographie $\phi : \mathbb{P}_2(K) \to \mathbb{P}_2(K)$ telle que $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$, $\phi(C) = C'$ et $\phi(D) = D'$.

3^0/ i) Montrer que le birapport $[AB, AC, AD, AE]$ des droites $(AB), (AC), (AD), (AE)$ coïncide avec le birapport $[A'E', A'D', A'C', A'B']$ des droites $(A'E'), (A'D'), (A'C'), (A'B')$.

ii) Montrer que $[A'E', A'D', A'C', A'B'] = [A'B', A'C', A'D', A'E']$.

4^0/ i) Soit $E'' = \phi(E)$ l'image du point E par ϕ. Montrer que E'' appartient à $(A'E')$.

ii) Montrer que $E'' = E'$.

Corrigé

I.1^0/ i) La symétrie centrale s_1 de centre O_1 (= homothétie de centre O_1, de rapport -1) répond à la question. - ii) La symétrie s_2 de centre O_2 envoie A_1 sur A_2 et B_1 sur B_2, donc $s_2 \circ s_1$ envoie A_0 sur A_2 et A_3 sur B_2. Mais $s_2 \circ s_1$ est la translation t_2 de vecteur $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$, qui répond donc à la question.

2^0/ i) De même, la translation t_{2i} de vecteur $2\,\overrightarrow{O_{2i-1}O_{2i}}$, $(i = 2, .., (n-1)/2)$, envoie A_{2i-2} sur A_{2i} et B_{2i-2} sur B_{2i}. La composée des translations $t_2, t_4, ..., t_{n-1}$ est la translation T de vecteur $\overrightarrow{V} = 2(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} + ... + \overrightarrow{O_{n-2}O_{n-1}})$. Elle envoie A_0 sur A_{n-1} et A_n sur B_{n-1}, et répond donc à la question. - ii) La symétrie s de centre O_n convient. - iii) On a $B_n = sTsT(A_0)$. Mais $s = s^{-1}$ est une involution affine, de partie linéaire $\overrightarrow{s} : \overrightarrow{v} \to -\overrightarrow{v}$, donc la translation $T = t_{\overrightarrow{V}}$ vérifie $sTs = st_{\overrightarrow{V}}s^{-1} = t_{\overrightarrow{s}(\overrightarrow{V})} = t_{-\overrightarrow{V}} = T^{-1}$, et $sTsT = T^{-1}T = id_{\mathcal{E}}$. Ainsi, $B_n = id_{\mathcal{E}}(A_0) = A_0$.

3^0/ Ici, le même argument donne : $A_n = T'(A_0)$ et $B_n = T'(A_n)$, où T' est la transation de vecteur $\overrightarrow{V'} = 2(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} + ... + \overrightarrow{O_{n-1}O_n})$. Donc $B_n = A_0 + 2\,\overrightarrow{V'}$, qui coïncide avec A_0 si et seulement si $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} + ... + \overrightarrow{O_{n-1}O_n} = 0$.

4^0/ i) $\overrightarrow{O_1A_1} = -\overrightarrow{O_1A_0}$, et $-1 + 2 = 1$, donc $A_1 = -A_0 + 2O_1$, d'où par associativité des barycentres, $A_1 = (2 - \lambda_1)O_1 - \lambda_2 O_2 - \lambda_3 O_3$. - ii) Pour $i = 1, 2, 3$, on a donc $\mu_i = 2 - \lambda_i$ si l'indice i est celui du centre O_i de la symétrie (ici $i = 1$), et $\mu_i = -\lambda_i$ sinon. Comme A_2 se déduit de A_1 par la symétrie de centre O_2, on obtient $A_2 = -\mu_1 O_1 + (2 - \mu_2)O_2 - \mu_3 O_3$, soit $A_2 = (\lambda_1 - 2)O_1 + (2 + \lambda_2)O_2 + \lambda_3 O_3$. - iii) De même, $A_3 = (2 - \lambda_1)O_1 - (2 + \lambda_2)O_2 + (2 - \lambda_3)O_3$, et comme $2 - (2 - \lambda_1) = \lambda_1$, $B_1 = \lambda_1 O_1 + (2 + \lambda_2)O_2 - (2 - \lambda_3)O_3$, puis avec le milieu O_2, $B_2 = -\lambda_1 O_1 - \lambda_2 O_2 + (2 - \lambda_3)O_3$, et enfin $B_3 = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2 + \lambda_3 O_3 = A_0$.

II.1^0/ i) Un point $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ de $\mathbf{D} \cap \Delta$ aurait toutes ses coordonnées nulles, ce qui est impossible. - ii) Deux droites de $\mathbb{P}_3(K)$ sont disjointes si et slt si les plans vectoriels de K^4 dont elles proviennent sont supplémentaires, ce qui équivaut à demander que les deux couples d'équations qui les définissent constituent 4 formes linéaires linéairement indépendantes. Pour Δ et $\mathbf{D}'$, le déterminant des formes linéaires $X_0, X_1, X_0 - \lambda X_2, -\mu X_1 + X_3$ dans la base canonique $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ du dual de K^4 vaut $-\lambda$, donc (a) : $\mathbf{D}' \cap \Delta = \emptyset$ si et slt si $\lambda \neq 0$. De même, (b) : $\mathbf{D}' \cap \mathbf{D} = \emptyset$ si et slt si $\mu \neq 0$.

2^0/ i) Comme tout tel plan contient le sous-espace projectif $< P, \Delta >$ engendré par P et Δ, et que deux plans inclus l'un dans l'autre coïncident, il s'agit de montrer que $< P, \Delta >$ est lui-même un plan. Comme $P \in \mathbf{D}$ n'appartient pas à Δ, la droite et le plan vectoriels de K^4 dont proviennent P et Δ sont linéairement indépendants. Leur somme dans K^4 est donc de dimension 3, et le sous-espace $< P, \Delta >$ qu'elle définit dans $\mathbb{P}_3(K)$ est bien de dimension 2. - ii) Si un tel point P' existe, il est distinct de P car $\mathbf{D} \cap \mathbf{D}' = \emptyset$, et on peut parler de la droite (PP'). Comme elle passe par $P \in \mathbf{H}_P$ et par un point Q (forcément distinct de P) de $\Delta \subset \mathbf{H}_P$, cette droite $(PP') = (PQ)$ est contenue dans $\mathbf{H}_P$. Donc $P' \in \mathbf{H}_P \cap \mathbf{D}'$. Inversement, tout point P' de $\mathbf{H}_P \cap \mathbf{D}'$ est situé sur $\mathbf{D}'$, et la droite (PP'), coplanaire avec la droite Δ, la rencontre. Il reste donc à montrer que $\mathbf{H}_P \cap \mathbf{D}'$ est non vide, et réduite à un point. Comme les droites projectives $\mathbf{D}'$ et Δ sont disjointes, elles ne sont pas coplanaires, et $\mathbf{D}' \not\subset \mathbf{H}_P$. Donc le plan et le 3-espace vectoriels dont proviennent $\mathbf{D}'$ et $\mathbf{H_P}$ engendrent

K^4 tout entier, et $dim(\mathbf{H}_P \cap \mathbf{D}') = dim(\mathbf{H}_P) + dim(\mathbf{D}') - (4-1) = 2+1-3 = 0$. Ainsi, $\mathbf{H}_P \cap \mathbf{D}'$ est bien constituée d'un unique point P'.

$\mathbf{3}^0$/ i) $\mathbf{H}_P$ appartient au faisceau d'hyperplans de centre Δ, donc admet une équation de la forme $\alpha X_0+\beta X_1 = 0$. Comme $P \in \mathbf{H}_P$, on a $\alpha a_0+\beta a_1 = 0$, et l'équation $-a_1X_0+a_0X_1 = 0$ (dont les coefficients ne sont pas tous deux nuls) répond à la question. - ii) *1ère méthode* : comme P' appartient à $\mathbf{D}'$ et à $\mathbf{H}_P$, ses coordonnées sont de la forme $[\lambda b_2 : b_1 : b_2 : \mu b_1]$, avec $-a_1\lambda b_2+a_0b_1 = 0$, d'où $P' = [\lambda a_0 : \lambda a_1 : a_0 : \mu\lambda a_1]$ (comme $\lambda \neq 0$, ces coordonnées ne sont jamais toutes nulles). *2e méthode* : on choisit deux points, disons $Q_1 = [0:0:1:0]$ et $Q_2 = [0:0:0:1]$, de Δ. Alors, les droites (PP') et (Q_1Q_2) se rencontrent si et slt si la matrice formée par les coordonnées des points P, P', Q_1, Q_2 est de rang ≤ 3, c-à-d si et slt si son déterminant $a_0b_1 - a_1\lambda b_2$ s'annule. - iii) L'application linéaire $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2)$ induit une application projective de $\mathbb{P}_3(K) \setminus \{x_1 = x_2 = 0\}$ sur $\mathbb{P}_1(K)$, dont la restriction $\theta' : \mathbf{D}' \to \mathbb{P}_1(K) : [\lambda b_2 : b_1 : b_2 : \mu b_1] \mapsto [b_1 : b_2]$ à $\mathbf{D}'$ est une homographie. De même, $\theta : [a_0 : a_1] \mapsto [a_0 : a_1 : 0 : 0]$ est une homographie de $\mathbb{P}_1(K)$ sur $\mathbf{D}$. Il suffit donc de montrer que $\phi' := \theta' \circ \phi \circ \theta : \mathbb{P}_1(K) \to \mathbb{P}_1(K)$ est une homographie. Comme $\phi'([a_0 : a_1]) = [\lambda a_1 : a_0]$, on a $\phi' = \mathbb{P}(f)$, où $f = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ (puisque $\lambda \neq 0$), et $\phi' \in PGL_2(K)$. En fait, ϕ est la perspective généralisée de centre Δ de la droite $\mathbf{D}$ sur la droite $\mathbf{D}'$ (la définition de cette perspective nécessite seulement que Δ soit disjointe de $\mathbf{D}$ et de $\mathbf{D}'$).

III.1^0/ i) Comme les points B, D, C, E ne sont pas alignés, les droites (BD) et (CE) sont distinctes, et se rencontrent donc en un unique point A' de $\mathbb{P}_2(K)$. Idem pour B', etc - iii) Si $C' = D'$, les droites (AD) et (AC) rencontreraient la sécante $(EB) \not\ni A$ au même point, donc seraient confondues, et les points A, C, D seraient alignés. Si $A' \in (C'D') = (EB)$, les droites $(BD), (CA)$ et (BE) seraient concourantes, et B appartiendrait à (CA).

$\mathbf{2}^0$/ Comme trois des quatre points A, B, C, D ne sont jamais alignés, ils forment un repère projectif du plan $\mathbb{P}_2(K)$. On démontre comme au 1^o/ (iii) (ou on voit sur la figure) que trois quelconques des cinq points A', B', C', D', E' ne sont jamais alignés. En particulier, les quatre points A', B', C', D' forment aussi un repère projectif de $\mathbb{P}_2(K)$. Il existe donc une unique homographie ϕ de ce plan envoyant A sur A', B sur B', C sur C' et D sur D'.

$\mathbf{3}^0$/ i) En considérant la sécante (BE) au faisceau de centre A, on obtient $[AB, AC, AD, AE]$ $= [B, D', C', E]$. Comme A' n'appartient pas à la droite $(C'D') = (BE)$, le faisceau de centre A' admet (BE) pour sécante, et $[B, D', C', E] = [A'B, A'D', A'C', A'E]$, qui s'écrit aussi $[A'E', A'D', A'C', A'B']$ puisque $(A'E') = (A'B)$ et $(A'B') = (A'E)$. - ii) Si x, y, z, t sont 4 points distincts de $K \subset \mathbb{P}_1(K)$, on a $[x, y, z, t] = \frac{z-x}{z-y} : \frac{t-x}{t-y} = \frac{y-t}{y-z} : \frac{x-t}{x-z} = [t, z, y, x]$, donc $[A'B', A'C', A'D', A'E'] = [A'E', A'D', A'C', A'B']$.

$\mathbf{4}^0$/ i) Une homographie ϕ du plan induit des homographies entre droites, et y préserve le birapport, donc ϕ préserve le birapport de quatre droites d'un faisceau. Par conséquent, $[A'B', A'C', A'D', A'E''] = [AB, AC, AD, AE]$, qui vaut $[A'B', A'C', A'D', A'E']$ d'après 3^o/. Donc les droites $(A'E')$ et $(A'E'')$ coïncident, et $E'' \in (A'E')$. - ii) En considérant les faisceaux de centres D et D', et la sécante $(CE) = (A'B')$, on démontre de même que $(D'E') = (D'E'')$, donc $E'' \in (DE')$. Ainsi, $E'' = (D'E') \cap (A'E') = E'$.