UPMC Licence L3 de mathématiques 12-13
D. Bertrand *LM 323 - Géométrie affine et euclidienne*

Examen du 23 Mai 2013
Durée: 2 heures

Les documents, calculatrices, portables ... ne sont pas autorisés.
Les 4 énoncés sont indépendants (et de valeurs sensiblement égales).
Les réponses devront être justifiées (sauf pour la question de cours).

I

1°/ (**Question de cours**). Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel et n un entier ≥ 3. On considère un système $\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ de n points pondérés de $\mathcal{E}$, et un entier $m \in [2, n-1]$.

i) Qu'entend-on par la "propriété d'associativité" des barycentres ? On commencera par préciser les hypothèses à faire sur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ et $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i$ pour pouvoir énoncer cette propriété (qu'on ne demande pas de démontrer).

ii) Quel énoncé classique cette propriété entraîne-t-elle sur les médianes d'un triangle ABC (non plat) ?

2°/ On considère un tétraèdre (non aplati) $ABCD$ de $\mathbb{R}^3$, et on note G l'isobarycentre du système $\{A, B, C, D\}$.

i) Soient M le milieu du segment AB, et N celui de CD. Montrer que $M \neq N$, et que la droite (MN) passe par G.

ii) Déterminer l'intersection du plan (ABC) avec la droite (DG).

II

Soit a un paramètre réel. On considère dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ les sous-ensembles Δ, Δ' définis respectivement par les couples d'équations

$$(\Delta) \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z - 2 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad (\Delta') \left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 1 = 0 \\ 3x - 5y + a = 0 \end{array} \right.$$

1^0/ i) Montrer que Δ et Δ' sont des droites affines.

ii) Trouver un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul de la droite directrice $D = \overrightarrow{\Delta}$ de Δ.

iii) Même question par la droite Δ'.

2^0/ i) Montrer que Δ et Δ' ne sont pas parallèles, et déduire de cette propriété que les trois conditions suivantes sont ici équivalentes :

(C_1): $< \Delta, \Delta' >$ est un plan ; (C_2): $\Delta \cap \Delta'$ est un point ; (C_3): $\Delta \cap \Delta'$ n'est pas vide.

ii) Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a, que l'on calculera, telle que $\Delta \cap \Delta'$ ne soit pas vide.

3^0/ On suppose désomais que $a = a_0$.

i) Calculer les coordonnées cartésiennes du point $P = \Delta \cap \Delta'$.

ii) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{H} =< \Delta, \Delta' >$ engendré par Δ et Δ'.

III

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de son espace vectoriel directeur E, et A, B deux points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = e_3$. Soient par ailleurs Δ_1 la droite de $\mathcal{E}$ passant par A, de vecteur directeur e_1, et Δ_2 la droite de $\mathcal{E}$ passant par B, de vecteur directeur e_2.

Pour $i = 1, 2$, on note f_i la rotation de $\mathcal{E}$ d'axe Δ_i, d'angle π, et on pose $f = f_2 \circ f_1$.

1°/ Donner les matrices représentatives dans la base $\mathcal{B}$ de E des parties linéaires $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$, $\overrightarrow{f}$ des trois isométries affines f_1 , f_2 , f .

2°/ i) Montrer que f est un vissage (ou une rotation).

ii) Déterminer l'axe, l'angle et le vecteur de glissement de f.

3°/ i) Calculer $f \circ f$.

ii) On pose $f' = f_1 \circ f_2$. Décrire les isométries affines $f_2 \circ f_2$, $f' \circ f$ et $f' \circ f'$.

IV

Soient $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ un repère affine d'un plan affine réel $\mathcal{E}$. Les coordonnées barycentriques des points de $\mathcal{E}$ seront relatives à ce repère. On fixe un point P situé sur la droite (BC).

1°/ Dire pourquoi il existe un unique nombre réel λ tel que $\overrightarrow{CP} = \lambda\, \overrightarrow{CB}$, et calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques (x, y, z) de P.

2°/ i) Soit Δ_1 la droite parallèle à (BA) passant par P. Montrer que $\Delta_1 \cap (CA)$ est un point P_1, et que $\overrightarrow{CP_1} = \lambda\, \overrightarrow{CA}$.

ii) Calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques (x_1, y_1, z_1) de P_1.

3°/ Soit de même $P_2 \in (AB)$ l'intersection de (AB) avec la parallèle Δ_2 à (CB) passant par P_1, et $P_3 \in (BC)$ l'intersection de (BC) avec la parallèle à (AC) passant par P_2.

i) Faire un dessin de cette configuration.

ii) Calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques de P_2, puis de P_3, dans le repère $\mathcal{R}$.

4°/ Soit $f : (BC) \to (BC)$ l'application qui attache au point P de (BC) le point $P_3 := f(P)$ de (BC).

i) Exprimer f en coordonnées barycentriques dans le repère affine $\{B, C\}$ de la droite affine (BC).

ii) Déterminer l'ensemble des points fixes de f, et calculer le point $f(f(P))$.

Corrigé

I.1°/ i) On suppose que $\alpha := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha' := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ et $\alpha'' := \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i$ sont tous trois non nuls. Les barycentres G, resp. G', resp. G'' des systèmes $\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)\}$, resp. $\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_m, \alpha_m)\}$, resp. $\{(A_{m+1}, \alpha_{m+1}), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ sont alors bien définis, et le propriété d'associativité dit que G est le barycentre du système $\{(G', \alpha'), (G'', \alpha'')\}$ (bien défini puisque $\alpha' + \alpha'' = \alpha \neq 0$). - ii) Les trois médianes du triangle concourent en son centre de gravité.

2°/ i) Si $M = N$, les droites (AB) et (CD) seraient coplanaires, et les 4 points A, B, C, D seraient affinement dépendants. Dans ces conditions, M est le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1)\}$, N celui de $\{(C, 1), (D, 1)\}$, G celui de $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$, et la propriété d'associativité entraîne que G est le barycentre du système $\{(M, 2), (N, 2)\}$. En particulier, G appartient à la droite (MN), et c'est même le milieu du segment MN. - ii) Soit G' le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$. Alors, G' appartient au plan (ABC), donc G' et D sont affinement indépendants, la droite (DG') est bien définie et son unique point d'intersection avec le plan (ABC) est le point G'. Par la propriété d'associativité, G est le barycentre du système $\{(G', 3), (D, 1)$. Donc G appartient à la droite (DG'). Ainsi, les droites (DG) et (DG') coïncident, et $(DG) \cap (ABC)$ est le point G', c-à-d. le centre de gravité du triangle ABC.

II.1°/ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc l'application linéaire $\overrightarrow{f} : E = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ qu'elle représente est surjective, et $\Delta = (\overrightarrow{f})^{-1}({}^t(2, -1))$ est non vide. C'est donc un sous-espace affine, d'espace vectoriel directeur $D = Ker(\overrightarrow{f})$, qui est de dimension $dimE - rg(\overrightarrow{f}) = 1$. Donc Δ est une droite affine. Idem avec Δ', en considérant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. ii) Le vecteur $\overrightarrow{v} = {}^t(1, 3, -5)$ engendre D. iii) Le vecteur $\overrightarrow{v'} = {}^t(0, 0, 1)$ engendre D'.

2°/ i) Les vecteurs $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}'$ ne sont pas colinéaires, donc $D \neq D'$ et Δ et Δ' ne sont pas parallèles. Dans ces conditions, (C_1) entraîne (C_2), qui entraîne clairement (C_3). Enfin, sous (C_3), si P est un point de $\Delta \cap \Delta'$, le sous-espace affine $\mathcal{H} =< \Delta, \Delta' >$ engendré par Δ et Δ' est aussi engendré par les points $P, P + \overrightarrow{v}, P + \overrightarrow{v}'$. Son vectoriel directeur H est donc engendré par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$, et est donc ici de dimension 2. Ainsi, $< \Delta, \Delta' >$ est un plan.

ii) Considérons les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & -a \end{pmatrix}$. La condition (C_3) est vérifiée si et slt si l'application $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de matrice repr. M admet le vecteur $\overrightarrow{V} = {}^t(2, -1, 1, -a)$ dans son image. Comme les vecteurs colonnes de M sont linéairement indépendants (considérer le mineur formé par les 3 dernières lignes), cela revient à dire que la matrice $\mathbf{M}_a$ est de rang < 4, c-à-d. que son déterminant s'annule. On a : $det(\mathbf{M}_a) = 8a + 16$, qui s'annule si et slt si $a = a_0$, avec $a_0 = -2$.

3°/ i) $\Delta \cap \Delta'$ est donné par un système de 4 équations qui, pour $a = -2$, admet pour unique solution le point $P = {}^t(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$. - ii) Les vecteurs $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}'$ engendrent le plan directeur H de $\mathcal{H} = < \Delta, \Delta' >$. Toute forme lineaire non nulle $\overrightarrow{\ell}(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ annulant ces vecteurs sera donc la partie linéaire d'une équation de $\mathcal{H}$. Un solution non triviale du système $\overrightarrow{\ell}(\overrightarrow{v}') = \overrightarrow{\ell}(\overrightarrow{v}) = 0$ est donnée par $(\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = 0)$. Par conséquent, $\mathcal{H}$ admet pour équation $\ell(x,y,z) = 0$, où $\ell = \overrightarrow{\ell} - \overrightarrow{\ell}(P)$, soit : $\ell(x,y,z) = 3x - y - 1$.

III.1°/ Pour $i = 1, 2$, $\overrightarrow{f}_i$ est la rotation vectorielle d'axe $D_i := \mathbb{R}.e_i$, d'angle π, tandis que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}_2 \circ \overrightarrow{f}_1$. Donc leurs matrices représentatives dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2°/ i) Composée de deux isométries directes, f est encore une isométrie directe. La classification de celles-ci en dimension 3 énonce que f est un vissage (qui sera une rotation si son vecteur de glissement est nul). - ii) Choisissons $\{O = A; e_1, e_2, e_3\}$ comme repère cartésien de $\mathcal{E}$, qu'on identifie ainsi à l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Comme $f_1(A) = A$, la rotation affine f_1 est encore représentée par la matrice M_1. Comme $f_2(A) = A + 2\overrightarrow{AB}$, la rotation affine f_2 est représentée par l'application $v \mapsto 2e_3 + M_2(v)$. Par conséquent, $f = f_2 \circ f_1$ est représentée par l'application $v \mapsto M(v) + 2e_3$. La matrice M représente la rotation affine g de $\mathcal{E}$ d'axe $\Delta_3 = A + \mathbb{R}.e_3 \subset \mathcal{E}$, d'angle π, et la relation précédente s'écrit $f = t_u \circ g$, où $u := 2e_3$. Comme u appartient à la droite directrice $D_3 = \mathbb{R}.e_3 \subset E$ de l'axe Δ_3 de g, il s'agit là de la décomposition canonique du vissage f, qui admet donc Δ_3 pour axe, π pour angle, et $2e_3$ pour vecteur de glissement. (Autre méthode : le vecteur de glissement u de f est donné, pour tout $P \in \mathcal{E}$, par le projeté orthogonal de $\overrightarrow{Pf(P)}$ sur $Ker(\overrightarrow{f} - id_E)$. Prendre $P = A$ ou B pour calculer u, puis trouver un point fixe de $g = t_{-u} \circ f$.)

3°/ i) La décomposition canonique $f = t_u \circ g$ vérifie $g \circ t_u = t_u \circ g$, donc $f \circ f = t_u \circ g \circ t_u \circ g = t_{2u} \circ g^2$. Mais g^2, rotation affine d'angle 2π, est l'identité sur $\mathcal{E}$, donc $f \circ f = t_{2u}$ est la translation de vecteur $2u = 4e_3$. - ii) Pour la même raison $f_i^2 = id_{\mathcal{E}}$ pour $i = 1, 2$, donc $f' \circ f = f_1 \circ f_2 \circ f_2 \circ f_1 = id_{\mathcal{E}}$. Ainsi $f' = f^{-1}$ et f'^2 est la translation t_{-2u} de vecteur $-4e_3$.

IV.1°/ Comme $B \neq C$, (BC) est une droite, de vecteur directeur $\overrightarrow{CB}$. Comme P appartient à cette droite, $\overrightarrow{CP}$ appartient à sa droite directrice, donc est de la forme $\lambda\overrightarrow{CB}$ pour un unique scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $P = xA + yB + zC$ avec $x + y + z = 1$. Alors, $\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} = \lambda\,\overrightarrow{CB}$. Comme $\{A, B, C\}$ est un repère affine, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ de E sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, donc $x = 0, y = \lambda$, et $z = 1 - (x + y) = 1 - \lambda$.

2°/ i) La droite Δ_1, parallèle à (AB), n'est pas parallèle à (AC), donc la rencontre en un unique point P_1. - ii) D'après le théorème de Thalès, $\frac{\overrightarrow{CP_1}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda$. Un calcul similaire au précédent donne : $P_1 = \lambda A + (1 - \lambda)C$, soit : $x_1 = \lambda, y_1 = 0, z_1 = 1 - \lambda$.

3°/ De même, $\frac{\overrightarrow{AP_2}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AP_1}}{\overrightarrow{AC}} = 1 - \lambda$, donc $P_2 = \lambda A + (1 - \lambda)B$. Et $P_3 = (1 - \lambda)B + \lambda C$.

4°/ i) Ainsi, l'application f envoie le point $P = \lambda B + (1 - \lambda)C := (\lambda, 1 - \lambda)$ de (BC) sur le point $P_3 = f(P) = (1 - \lambda)B + \lambda C = (1 - \lambda, \lambda)$ de (BC). - ii) Cette formule montre que $f(P) = P$ si et slt si $\lambda = 1 - \lambda$, soit $\lambda = \frac{1}{2}$, c-à-d. si et slt si P est le milieu du segment BC. Elle donne également : $f^2(P) = f(P_3) = \lambda B + (1 - \lambda)C = P$, autrement dit $f^2 = id_{(BC)}$.