UPMC Licence L3 de mathématiques 14-15
D. Bertrand *LM 323 - Géométrie affine et euclidienne*

Examen du 19 Juin 2015
Durée: 2 heures

Les documents, calculettes, portables... ne sont pas autorisés.
Les 3 énoncés sont indépendants.
Les réponses devront être justifiées (sauf pour la question de cours **I**.1^o/*).*

I (11 pts sur 25)

1^0/ (**Question de cours**) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, et f une isométrie de $\mathcal{E}$.

i) Remplir les blancs dans l'énoncé suivant : " Il existe un unique couple $(\overrightarrow{u}, g)$ vérifiant les propriétés suivantes : $\overrightarrow{u} \in$ ......, g est une isométrie telle que ......, et $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. "

ii) On suppose que $\dim(\mathcal{E}) = 3$, et on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points fixes de f. Sous chacune des 9 hypothèses suivantes, dire si $\mathcal{F}$ est non vide, et donner dans ce cas la dimension de $\mathcal{F}$.

(**a**) f est l'identité;
(**b**) f est une translation de vecteur non nul;
(**c**) f est une rotation d'angle non nul;
(**d**) f est un vissage de vecteur de glissement non nul;
(**e**) f est une réflexion (c-à-d. la symétrie orthogonale par rapport à un plan);
(**f**) f est la symétrie orthogonale par rapport à une droite.
(**g**) f est la symétrie par rapport à un point;
(**h**) f est une réflexion glissée, de vecteur de glissement non nul;
(**i**) f est une rotation-réflexion (c-à-d. la composée d'une rotation d'angle non nul par une réflexion par rapport à un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à l'axe $\mathcal{D}$ de la rotation).

On mettra les réponses sous la forme d'un tableau à 9 lignes (**a**) à (**i**) et 3 colonnes (hypothèse sur f, $\mathcal{F}$ vide ou pas, $\dim \mathcal{F}$).

2^0/ On considère l'isométrie f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ -z+2 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une rotation-réflexion et calculer l'angle $\pm\theta$ de la rotation correspondante.

3^0/ Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ l'axe et le plan attachés à f. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, les coordonnées du point $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ et une équation de $\mathcal{P}$.

T. S. V. P.

II (8 pts sur 25)

On se place dans l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$. Les coordonnées (x, y, z) sont relative à son repère cartésien usuel, tandis que $t \in \mathbb{R}$ désigne un paramètre. On considère les sous-ensembles $\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t$ de $\mathcal{E}$ définis respectivement par les couples d'équations

$$(\mathcal{F}_t) \left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 1 \\ y - tz = 0 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{G}_t) \left\{ \begin{array}{c} 2x - z = 0 \\ tx + ty - \frac{1}{2}z = 2t \end{array} \right.$$

1^0/ i) Montrer que pour toute valeur du paramère t, $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_t$ sont des droites affines, et qu'elles sont toujours distinctes.

ii) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_t}$, resp. $\overrightarrow{v_t}$, de la droite $\mathcal{F}_t$, resp. $\mathcal{G}_t$.

2^0/ Montrer qu'il existe une unique valeur t_0 du paramètre, que l'on déterminera, telle que les droites $\mathcal{F}_{t_0}$ et $\mathcal{G}_{t_0}$ soient parallèles.

3^0/ Montrer qu'il existe une unique valeur t_1 du paramètre, que l'on déterminera, telle que les droites $\mathcal{F}_{t_1}$ et $\mathcal{G}_{t_1}$ soient concourantes.

4^0/ (Cette question ne nécessite pas de calculs.) On suppose désormais que t est différent de t_0 et de t_1. Soit M un point de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant ni à $\mathcal{F}_t$ ni à $\mathcal{G}_t$.

i) Donner la dimension des sous-espaces affines $< M, \mathcal{F}_t >$ et $< M, \mathcal{G}_t >$, et montrer que leur intersection est une droite $\mathcal{D}_{M,t}$.

ii) Montrer que $\mathcal{D}_{M,t}$ est la seule droite $\mathcal{D}$ issue de M et vérifiant l'une des propriétés suivantes : (a) $\mathcal{D}$ rencontre $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_t$; (b) $\mathcal{D}$ rencontre $\mathcal{F}_t$ et est parallèle à $\mathcal{G}_t$; (c) $\mathcal{D}$ rencontre $\mathcal{G}_t$ et est parallèle à $\mathcal{F}_t$. .

5^0/ On suppose ici que $t = 3$, et que M est le point $\mathrm{O} = (0, 0, 0)$. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_{\mathrm{O},3}$. Laquelle des propriétés (a), (b), (c) vérifie-t-elle ?

III (6 pts sur 25)

1^o/ On considère quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ vérifiant

$$\lambda_1 \overrightarrow{M_4 M_1} + \lambda_2 \overrightarrow{M_4 M_2} + \lambda_3 \overrightarrow{M_4 M_3} = \overrightarrow{0},$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont trois nombres réels non nuls tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

2^o/ Maintenant, $\mathcal{E}$ est un plan, dont on note $\mathcal{R} = (A, B, C)$ un repère affine. Soient p, q, r trois nombres réels non nuls et distincts deux à deux, et P, Q, R trois points de $\mathcal{E}$ tels que

$$r\overrightarrow{PB} = q\overrightarrow{PC} \quad p\overrightarrow{QC} = r\overrightarrow{QA} \quad q\overrightarrow{RA} = p\overrightarrow{RB}.$$

i) Soit O un point de $\mathcal{E}$. Calculer $(q - r)\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

ii) Montrer que $p(q - r)\overrightarrow{OP} + q(r - p)\overrightarrow{OQ} + r(p - q)\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{0}$.

iii) Déduire du 1^o/ que les points P, Q, R sont alignés.

3^o/ On se propose de retrouver ce résultat par des calculs barycentriques.

i) Calculer les coordonnées barycentriques des points P, Q, R dans le repère $\mathcal{R}$.

ii) En déduire que P, Q, R sont alignés.

Esquisse de corrigé

I. 1/ i) $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{f} - Id_E)$, g est une isométrie telle que $Fix(g) \neq \emptyset$. - ii) (a) : $\dim \mathcal{F} = 3$; (b, d, h) : $\mathcal{F} = \emptyset$; (c, f) : $\dim \mathcal{F} = 1$; (e) : $\dim \mathcal{F} = 2$; (g, i) $\dim \mathcal{F} = 0$.
2/ $\overrightarrow{f}$ est une isométrie indirecte, qui s'écrit $diag(-1, R_\theta)$ dans une BON convenable. C'est donc une rotation-réflexion vectorielle, avec $-1+2cos\theta = Tr(\overrightarrow{f}) = 0$, soit $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\,(2\pi)$, qui est non nul. Donc f est une rotation-réflexion affine. (Autre méthode : étudier $Fix(f)$.)
3/ Comme $\theta \not\equiv \pi$, l'axe $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ de la rotation vectorielle est $Ker(\overrightarrow{f} + Id_E) = \mathbb{R}.(1,-1,-1)$. Le point $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est le point fixe $Q = (2,1,1)$ de f. Donc $\mathcal{D} = Q + \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{P}$ est le plan orthogonal à $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ passant par Q, dont une équation est $x - y - z = 0$.

II. 1/ i) C'est que dans chacun des deux cas, et pour tout t, les deux formes linéaires sont linéraiement indépendantes. Le point $(1,0,0)$ appartient à $\mathcal{F}_t$, mais pas à $\mathcal{G}_t$, donc les droites sont toujours distinctes. ii) $\overrightarrow{u_t} = (1-t, t, 1)$, $\overrightarrow{v_t} = (t, 1-t, 2t)$.
2/ Ces vecteurs sont colinéaires $\Leftrightarrow$ les 3 mineurs d'ordre 2 de la matrice $(1-t, t, 1\ //\ t, 1-t, 2t)$ sont nuls $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} := t_0$.
3/ $\mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_t \neq \emptyset \;\Leftrightarrow$ l'application linéaire $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par les 4 formes linéaires admet $Y := (1,0,0,2t)$ dans son image. En échelonnant simultanément la matrice A et le vecteur Y, on voit que c'est le cas si et slt si $t = 1 := t_1$. Autre méthode : considérer la matrice $B = (A, Y) \in Mat_{4,4}$. Pour $t \neq \frac{1}{2}$, son mineur NW d'ordre 3 est non nul, donc $Y \in Im(A) \Leftrightarrow det(B) = 0$. Or $det(B) = (2t-1)(1-t)$. Enfin, $t = \frac{1}{2}$ est exclu, car $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$, parallèles et distinctes, ne se rencontrent pas. [Ce n'était pas demandé, mais on peut vérifier que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}_1 = (1,2,2)$.]
4/ (On utilise à plusieurs reprises le fait que deux droites de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou concourantes.) - i) Comme $M \notin \mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t$, ce sont des plans. Ces plans sont distincts (sinon, $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_t$ seraient coplanaires, donc $t = t_0$ ou t_1) et non parallèlles (sinon, ils seraient confondus, puisqu'ils ont un point M commun). Donc leur intersection est une droite $\mathcal{D}_{M,t}$, qui passe par M. - ii) La réunion de (a), (b, (c) équivaut à dire que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{F}_t$ d'une part, et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}_t$ d'autre part, sont coplanaires (noter que $\mathcal{D}$ ne peut être simultanément parallèle aux deux droites, car $t \neq t_0$). Pour $\mathcal{D}$ issue de M, cela équivaut à dire que $\mathcal{D}$ appartient aux deux plans $< M, \mathcal{F}_t >$ et $< M, \mathcal{G}_t >$.
5/ $< \mathrm{O}, \mathcal{F}_3 >$, resp. $< \mathrm{O}, \mathcal{G}_3 >$, a pour équation $y - 3z = 0$, resp. $2x - z = 0$, donc $\mathcal{D}_{\mathrm{O},3}$ est portée par $(1,6,2)$, qui n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{u_3}$ ni à $\overrightarrow{v_3}$. Donc elle vérifie (a).

III. 1/ Comme $\lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$, la relation et Chasles entraînent que $\lambda_1\overrightarrow{M_3M_1} + \lambda_2\overrightarrow{M_3M_2} = 0$.
2/ i) Par Chasles, $(q-r)\overrightarrow{OP} = q\overrightarrow{OC} - r\overrightarrow{OB}$. - ii) De même, $(r-p)\overrightarrow{OQ} = r\overrightarrow{OA} - p\overrightarrow{OC}$, et $(p-q)\overrightarrow{OR} = p\overrightarrow{OB} - q\overrightarrow{OA}$. En multipliant par p, q, r et en additionnant, on trouve $\overrightarrow{0}$. - iii) Les coefficients sont non nuls et de somme nulle. On peut donc appliquer le 1/.
3/ i) De 2/i), on tire $P = (0, \frac{-r}{q-r}, \frac{q}{q-r})$. De même, $Q = (\frac{r}{r-p}, 0, \frac{-p}{r-p})$ et $R = (\frac{-q}{p-q}, \frac{p}{p-q}, 0)$. ii) Au facteur $((q-r)(r-p)(p-q))^{-1}$ près, la matrice correspondante a pour déterminant $det(0, -r, q // r, 0, -p // -q, p, 0) = 0$. On applique le critère d'alignement en coordonnées barycentriques.