Université de Paris 6
M. Bertrand

Master M1 de mathématiques 2009-2010
MM001- Algèbre géométrique

Partiel du 29 Octobre 2009

Durée: 3 heures

Documents autorisés : feuilles de cours et de TDs de cette année.
Les 4 énoncés sont indépendants. On se place sur un corps commutatif K quelconque.

I

On considère les quatre points $A = (1 : 0 : 0), B = (0 : 1 : 0), C = (0 : 0 : 1)$ et $D = (1 : 1 : 1)$ du plan projectif $\mathbf{P}_2(K)$.

1^0/ i) Donner les équations des 6 droites déterminées par ces 4 points.

ii) Donner les coordonnées homogènes des points

$$U = (CD) \cap (AB)\ ;\ V = (AD) \cap (BC)\ ;\ W = (BD) \cap (AC).$$

2^0/ i) Donner l'équation de la droite (WV), et les coordonnées homogènes du point $U' = (WV) \cap (AB)$.

ii) Calculer le birapport $[U, U', A, B]$. Quel énoncé du cours a-t-on ainsi retrouvé ?

II

(Ici, $car(K) \neq 2$.) Soient ABC un triangle du plan affine, P un point de la droite (BC) distinct de B et de C, et M un point de la droite (AP) distinct de P. On désigne par B' le point d'intersection de la droite parallèle à (CM) passant par P et de la droite parallèle à (AP) passant par B. De même, on désigne par C' le point d'intersection de la droite parallèle à (BM) passant par P et de la droite parallèle à (AP) passant par C. On note respectivement I, J, K les milieux des segments PM, BB', CC', et on pose $\gamma = (CM) \cap (PC'), \beta = (BM) \cap (PB')$.

0^0/ Faire un dessin de cette configuration, et justifier brièvement l'existence de B', C', β, γ.

1^0/ i) Soit f l'homothétie de centre γ qui envoie M sur C. Montrer que $f(P) = C'$.

ii) Montrer que les points I, γ, K sont alignés.

iii) Montrer de même que les points I, β, J sont alignés.

2^0/ i) Montrer que les points β, I, γ sont alignés.

ii) Ainsi, I, J et K sont alignés. En déduire que M, B' et C' sont alignés.

III

Soient ABC un triangle du plan affine. À tout point P de la droite (BC), on associe le point $P_1 \in (CA)$, intersection de (CA) avec la parallèle à (BA) passant par P, puis le point $P_2 \in (AB)$, intersection de (AB) avec la parallèle à (CB) passant par P_1, puis le point $P_3 \in (BC)$, intersection de (BC) avec la parallèle à (AC) passant par P_2.

1^0/ i) Trouver une application affine π_1 du plan dans lui-même telle que pour tout point P de (BC), on ait : $P_1 = \pi_1(P)$.

ii) Montrer que l'application $f : P \mapsto f(P) := P_3$ est une application affine de la droite (BC) vers elle-même.

iii) Déterminer $f(B)$ et $f(C)$. En déduire que $f \circ f = id_{(BC)}$.

2^0/ On se propose de retrouver ce résultat par le calcul. Soit $P = \lambda B + (1-\lambda)C$ l'écriture en coordonnées barycentriques de P relativement à $\{B, C\}$.

i) Déterminer les coordonnées barycentriques de P_1 relativement à $\{C, A\}$, de P_2 relativement à $\{A, B\}$, et de P_3 relativement à $\{C, B\}$.

ii) Conclure.

IV

Soient $a, a', b, b', c, c', d, d'$ des éléments de K. On considère dans l'espace projectif $\mathbf{P}_3(K)$ les plans projectifs $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, d'équations respectives $L_i = 0$, où

$$L_1 = -X_0 + aX_2 + bX_3 \ ; \ L_2 = -X_1 + cX_2 + dX_3 \ ;$$
$$L_3 = -X_0 + a'X_2 + b'X_3 \ ; \ L_4 = -X_1 + c'X_2 + d'X_3 \ .$$

1^0/ Montrer que $\Delta = \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$ et $\Delta' = \mathbf{H}_3 \cap \mathbf{H}_4$ sont des droites projectives.

2^0/ Montrer que Δ et Δ' sont coplanaires si et seulement si $(a-a')(d-d') = (b-b')(c-c')$.

3^0/ Montrer que $\Delta = \Delta'$ si et seulement si $a = a', b = b', c = c', d = d'$.

4^0/ On suppose que Δ et Δ' sont coplanaires et distinctes. Donner une équation du plan projectif $< \Delta, \Delta' >$.

5^0/ Rédiger les énoncés obtenus par dualité projective à partir de ceux de cet exercice.

Corrigé

I-1^o/ i) En désignant les coordonnées homogènes par $(X : Y : T)$, on obtient : $(BA) : T = 0$; $(AC) : Y = 0$; $(CD) : X-Y = 0$; $(DA) : Y-T = 0$; $(BC) : X = 0$; $(BD) : X-T = 0$.
ii) $U = (1 : 1 : 0)$; $V = (0 : 1 : 1)$; $W = (1 : 0 : 1)$.
2^0/ i) $(WV) : X+Y-T = 0$; $U' = (1 : -1 : 0)$. ii) En choisissant $A = (1 : 0)$ comme point à l'infini sur la droite (AB), on a $z_U = 1, z_{U'} = -1, z_B = 0, z_A = \infty$, d'où $[U, U', A, B] = \frac{z_A - z_U}{z_A - z_{U'}} : \frac{z_B - z_U}{z_B - x_{U'}} = -1$. En fait, on savait déjà que A, B, U, U' forment une division harmonique, voir cours, chap. II, thm. 2.6.

II-0^o/ $P \neq C$, donc (CM) non $//(AP)$, donc B' existe. Idem pour C'. $M \neq P$, donc $M \notin (BC)$, donc (BM) non $//(CM)$, donc (PC') non $//(CM)$, donc γ existe. Idem pour β.
1^o/ i) Comme toute homothétie, f envoie (PM) sur la droite parallèle à (PM) passant par $f(M)$, c-à-d. (CC'), donc le point $P = (PM) \cap (C'\gamma P)$ sur le point $(CC') \cap (C'\gamma P) = C'$.
ii) f conserve les barycentres, donc envoie le milieu I de PM sur le milieu K de CC', et K, γ, I sont alignés. iii) Idem à partir de l'homothétie de centre β qui envoie M sur B.
2^o/ i) $P\beta M\gamma$ est un parallèlogramme, donc $(\beta\gamma)$ coupe la diagonale PM en son milieu I.
ii) La symétrie affine par rapport à la droite (IJK) parallèlement à (AP) envoie les points alignés B, P, C sur les points B', M, C', qui sont donc alignés.

III-1^o/ i) Comme un triangle est un repère du plan affine, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ engendrent son plan directeur, et on peut parler de la projection π_1 sur (AC) parallèlement à (AB); cette application affine répond à la question. ii) En définissant π_2, π_3 de la même façon, on voit que f est la restriction à (BC) de $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$, donc est une transformation affine de (BC). iii) $f(B) = C, f(C) = B$, donc f^2 est une transformation affine de (BC) qui admet au moins deux points fixes B et C. C'est donc l'identité (l'équation $ax + b = x$ admet au plus une solution si $(b, a) \neq (0, 1)$).
2^o/ i) D'après Thalès, $\frac{\overrightarrow{CP_1}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda$, donc $P_1 = (1-\lambda)C + \lambda A$. De même, $\frac{\overrightarrow{AP_2}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AP_1}}{\overrightarrow{AC}} = 1-\lambda$, donc $P_2 = \lambda A + (1-\lambda)B$; et $P_3 = (1-\lambda)B + \lambda C = f(P)$. ii) Donc $f^2(P) = f(P_3) = \lambda B + (1-\lambda)C = P$.

IV-1^o/ Les formes linéaires L_1 et L_2 sont linéairement indépendantes sur K, donc le sous-espace vectoriel $Ker(L_1) \cap Ker(L_2)$ de K^4 est de dimension 2, et définit dans $\mathbf{P}_3(K)$ un sous-espace projectif $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 := \Delta$ de dimension 1. Idem pour Δ'.
2^o/ Δ et Δ' sont dans un même plan si et slt si les faisceaux de plans $\mathcal{F}_\Delta$ de centre Δ et $\mathcal{F}_{\Delta'}$ de centre Δ' admettent un élément commun $\mathbf{H} = \mathbf{P}(KerL)$, c-à-d. si et slt

s'il existe des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0), \lambda'_1, \lambda'_2$ tels que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = \lambda'_1 L_3 + \lambda'_2 L_4 := L$. Comme L_3 et L_4 sont linéairement indépendantes, cela revient à demander que les formes $L_1, ..., L_4$ soient linéairement dépendantes $\Leftrightarrow det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ a & c & a' & c' \\ b & d & b' & d' \end{pmatrix} = 0$. En combinant quelques colonnes, on voit que ce déterminant vaut $det \begin{pmatrix} a'-a & c'-c \\ b'-b & d'-d \end{pmatrix} = (a'-a)(d'-d) - (b'-b)(c'-c)$, d'où la condition recherchée.

3^o/ $\Delta = \Delta' \Rightarrow \mathcal{F}_\Delta = \mathcal{F}_{\Delta'} \Rightarrow$ chacun des triplets $\{L_1, L_2, L_3\}, \{L_1, L_2, L_4\}$ est linéairement dépendant $\Rightarrow (a', b') = (a, b)$ et $(c', d') = (c, d)$. La réciproque est claire.

4^0/ Le plan $< \Delta, \Delta' >$ est alors de la forme $\mathbf{H} = \mathbf{P}(KerL)$, où L admet l'expression $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = \lambda'_1 L_3 + \lambda'_2 L_4$ donnée au 2^o/. Les termes en X_0, X_1 montrent que $\lambda_1 = \lambda'_1, \lambda_2 = \lambda'_2$, et ceux de X_2, X_3 que $\lambda_1(a'-a) + \lambda_2(c'-c) = 0 = \lambda_1(b'-b) + \lambda_2(d'-d)$. Comme le déterminant de ce système est nul, il admet bien une solution non triviale, qui définit un point $(\lambda_1 : \lambda_2)$ de $\mathbf{P}_1(K) \simeq \mathcal{F}_\Delta$ (et ce point est unique si et seulement si les droites Δ et Δ' sont distinctes). Si $c' \neq c$ ou $a' \neq a$, l'hyperplan $\mathbf{H}$ admet ainsi pour équation : $(c'-c)L_1 - (a'-a)L_2 = 0$. Si $c' = c$ et $a' = a$, il admet pour équation : $(d'-d)L_1 - (b'-b)L_2 = 0$. Ainsi, dans le premier cas, on obtient

$$(c-c')X_0 + (a'-a)X_1 + ((c'-c)a - (a'-a)c)X_2 + ((c'-c)b - (a'-a)d)X_3 = 0,$$

ou encore (si de plus $d \neq d'$) :

$$(c-c')X_0 + (a'-a)X_1 + (c'a - a'c)X_2 + \tfrac{c'-c}{d'-d}(bd' - b'd)X_3 = 0.$$

5^0/ On considère dans $\mathbf{P}_3(K)$ les points $P_1 = (-1 : 0 : a : b), P_2 = (0 : -1 : c : d), P_3 = (-1 : 0 : a' : b'), P_4 = (0 : -1 : c' : d')$. 1^*/ Montrer que $D =< P_1, P_2 >$ et $D' =< P_3, P_4 >$ sont des droites projectives. 2^*/ Montrer que D et D' sont concourantes (ou, de façon équivalente : coplanaires !) si et seulement si $(a-a')(d-d') = (b-b')(c-c')$. 3^*/ $D = D' \Leftrightarrow$ même CNS (ici $\Leftrightarrow P_1 = P_3$ et $P_2 = P_4$, ce qui se voit peut-être plus facilement). 4^*/ Mêmes hypothèses sur D, D', même question sur le plan $< D, D' >$. 5^*/ Retour à l'énoncé initial.

Université de Paris 6 Master M1 de mathématiques 2009-2010
M. Bertrand *MM001- Algèbre géométrique*

Examen du 15 Décembre 2009

Durée: 3 heures

Documents autorisés : feuilles de cours et de TDs de cette année.
Les 3 énoncés sont indépendants. On se place sur un corps commutatif K de caract. $\neq 2$.

I

Soit $\{A, B, C\}$ un repère affine du plan affine. Les coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ seront relatives à ce repère. On considère un point P de la droite (BC), et un point Q de la droite (AC). On désigne par $(0, x, y)$ les coordonnés barycentriques de P, par $(u, 0, v)$ celles de Q, et on suppose que l'expression $D = yu + xv + yv$ est non nulle.

1^0/ Justifier la forme donnée aux coordonnés barycentriques de P et Q, et vérifier les relations $xv - yu = x - u$, $D + yv = y + v$.

2^0/ i) Donner les équations barycentriques des droites (AP) et (BQ), et montrer qu'elles ne sont pas parallèles.

ii) Calculer les coordonnées barycentriques du point $R = (AP) \cap (BQ)$. On les mettra sous la forme $(\frac{\alpha}{D}, \frac{\beta}{D}, \frac{\gamma}{D})$.

3^0/ Soient E, F et G les milieux respectifs des segments AB, PQ et CR. Calculer leurs coordonnées barycentriques.

4^0/ Montrer par le calcul que les points E, F, G sont alignés.

II

Soit $\mathcal{Q}$ le K-espace vectoriel formé par les formes quadratiques en 3 variables à coefficients dans K. Pour tout élément $q \neq 0$ de $\mathcal{Q}$, on note Γ_q la conique de $\mathbf{P}_2(K)$ d'équation $q(X, Y, T) = 0$. Ainsi, Γ_q ne dépend que de l'image $\overline{q}$ de q dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$ associé à $\mathcal{Q}$. On dit que Γ_q est non dégénérée (ou lisse) si la forme quadratique q est non dégénérée. Si D est une droite projective de $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$, l'ensemble $\Delta = \{\Gamma_q, \overline{q} \in D\}$ s'appelle un faisceau de coniques.

1^0/ i) Calculer la dimension de $\mathcal{Q}$, puis celle de $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$.

ii) Soit P un point de $\mathbf{P}_2(K)$. Montrer que l'ensemble $\{\overline{q} \in \mathbf{P}(\mathcal{Q}), q(P) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$. En déduire que par 5 points de $\mathbf{P}_2(K)$, on peut toujours faire passer une conique.

$\mathbf{2}^0$/ Montrer que l'ensemble des coniques qui passent par les quatre points $[1:0:0]$, $[0:1:0], [0:0:1], [1:1:1]$ forme un faisceau de coniques.

$\mathbf{3}^0$/ Soient A, B, C, A', B', C' six points de $\mathbf{P}_2(K)$ trois à trois non alignés.

i) Montrer que par les 5 points A, B, C, A' et B', il passe une unique conique Γ, et que Γ est non dégénérée.

ii) Montrer que cette conique Γ passe par le point C' si et seulement si les trois points $P = (BC') \cap (B'C)$, $Q = (CA') \cap (C'A)$ et $R = (AB') \cap (A'B)$ sont alignés.

$\mathbf{4}^0$/ Soient q_1, q_2 deux éléments K-linéairement indépendants de $\mathcal{Q}$, et D la droite projective engendrée par $\overline{q_1}$ et $\overline{q_2}$ dans $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$. On note Δ le faisceau de coniques associé à D.

i) On suppose que q_1 est non dégénérée. Montrer que Δ contient au plus 3 coniques dégénérées. On pourra considérer les matrices symétriques Ω_1, Ω_2 associées à q_1, q_2, et étudier l'équation $det(\lambda_2\Omega_2 + \lambda_1\Omega_1) = 0$.

ii) On suppose que $K = \mathbf{R}$. Montrer que Δ contient au moins une conique dégénérée. Dessiner un exemple où Δ en contient trois; un autre où Δ n'en contient qu'une.

III

Soient $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice $n \times n$ à coefficients dans K, de déterminant Δ, et $x_1, ...x_n, y_1, ..., y_n, z$ des éléments de K. On considère la matrice $(n+1) \times (n+1)$:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} & x_n \\ y_1 & \dots & y_n & z \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{1}^0$/ Pour tout $i, j \in [1, n]$, soit δ_{ij} le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ déduite de A en en rayant la i-ième ligne et la j-ième colonne. Montrer que

$$det(M) = \Delta z + \Sigma_{1 \leq i,j \leq n}(-1)^{i+j+1}\delta_{ij}x_i y_j.$$

$\mathbf{2}^0$/ Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension n. Montrer que si u est de rang $n-1$, l'endomorphisme $\wedge^{n-1}u$ de $\wedge^{n-1}V$ est de rang 1.

$\mathbf{3}^0$/ Soit $(d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de rang 1 . Montrer qu'il existe des éléments $c_1, ..., c_n$, $\gamma_1, ..., \gamma_n$ de K tels que $d_{ij} = c_i\gamma_j$ pour tout $i, j \in [1, n]$. (On pourra donner une preuve directe, ou considérer les éléments de $End(V) \simeq V^* \otimes V$ de la forme $\ell \otimes v$.)

$\mathbf{4}^0$/ On reprend les notations initiales, et on suppose que $\Delta = 0$. Montrer qu'il existe deux formes linéaires ℓ, λ sur K^n telles que pour tous $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ dans K, on a : $det(M) = \ell(x_1, ..., x_n) \times \lambda(y_1, ..., y_n)$.

Corrigé

I.1^o/ Dans le repère $A=(1,0,0), B=(0,1,0), C=(0,0,1)$, la droite (BC) a pour équation barycentrique $\lambda_0=0$, donc ses points P sont repérés par $(0,x,y)$, où $x+y=1$. La droite (AC) a pour équation barycentrique $\lambda_1=0$, donc ses points Q sont repérés par $(u,0,v)$, où $u+v=1$. On a $xv-yu=x(1-u)-yu=x-u$, $D+yv=y(u+v)+(x+y)v=y+v$.

2^o/ i) L'équation de (AP) est $det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&x&y\\\lambda_0&\lambda_1&\lambda_2\end{pmatrix}=0$, avec $\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1$, soit $y\lambda_1-x\lambda_2=0$. De même, l'équation de (BQ) est $v\lambda_0-u\lambda_2=0$. Ces droites sont parallèles (si et) seulement si la matrice $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&y&-x\\v&0&-u\end{pmatrix}$ est de rang 2. Or son déterminant vaut $-yu-vx-vy=-D\neq 0$. - ii) En résolvant le système $y\beta-x\gamma=0, v\alpha-u\gamma=0, \alpha+\beta+\gamma=D$, on trouve $R=(\frac{yu}{D},\frac{xv}{D},\frac{yv}{D})$.

3^o/ Par associativité du barycentre, $E=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $F=\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q=(\frac{u}{2},\frac{x}{2},\frac{y+v}{2})$, $G=\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}R=(\frac{yu}{2D},\frac{xv}{2D},\frac{D+yv}{2D})$.

4^o/ $det\begin{pmatrix}1&1&0\\u&x&y+v\\yu&xv&D+yv\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}x-u&y+v\\xv-yu&D+yv\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}x-u&y+v\\x-u&y+v\end{pmatrix}=0$, donc E,F,G sont alignés.

II.1^o/ Les éléments de $\mathcal{Q}$ sont de la forme $q(X,Y,T)=\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma T^2+2cXY+2aYT+2bXT$, où $(\alpha,\beta,\gamma,a,b,c)$ parcourt K^6, et forment donc un espace vectoriel de dimension 6. Donc $dim\mathbf{P}(\mathcal{Q})=5$.

2^o/ i) Si $P\in\mathbf{P}_2(K)$, l'une au moins de ses coordonnées projectives $[x:y:t]$ est non nulle, donc la forme linéaire $q\mapsto\ell(q):=q(x,y,t)=x^2.\alpha+y^2.\beta+t^2.\gamma+2xy.c+2yt.a+2xt.b$ sur $\mathcal{Q}\simeq K^6$ n'est pas identiquement nulle. Son noyau $Ker(\ell)=H_P$ (qui ne dépend que de P) est donc un hyperplan de $\mathcal{Q}$, dont l'image $\mathbf{P}(H_P)=\{\overline{q}, q(P)=0\}$ dans $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$ est bien un hyperplan $\mathbf{H}_P$ de $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$. L'ensemble des coniques qui passent par 5 points $P_1,...,P_5$ s'identifie ainsi à l'intersection des hyperplans $\mathbf{H}_{P_1}\cap...\cap\mathbf{H}_{P_5}$. Cette intersection est de codimension ≤ 5, i.e. de dimension ≥ 0, et est donc non vide. - ii) En écrivant la condition $\ell(q)=0$ pour chacun de ces points $P_0,...,P_3$, on trouve que $\alpha=\beta=\gamma=a+b+c=0$. Ces 4 formes linéaires sur $\mathcal{Q}$ étant linéairement indépendantes, l'ensemble des $\overline{q}\in\mathbf{P}(\mathcal{Q})$ que définit l'intersection de leurs noyaux est un sous-espace projectif de codimension 4, c-à-d. une droite D de $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$, et les coniques correspondantes forment un faisceau Δ.

3^o/ i) Puisque 3 quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants, les points A,B,C,A' forment un repère projectif. Choisissons-les comme repère projectif standard, et soient $[x:y:t]$ des coordonnées projectives de B' dans ce repère. Les équations

des coniques Γ qui passent par les 5 points vérifient donc $\alpha = \beta = \gamma = a + b + c = yt.a + xt.b + xy.c = 0$ (∗). Dès que B' est distinct de A, B, C, A', la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yt & xt & xy \end{pmatrix}$ est de rang 2 (sans quoi $t = 0$, et alors x ou $y = 0$; ou $x = y$, et alors $x = 0$ ou $x = t$). Les équations (*) définissent donc un unique point de $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$, d'où une unique Γ passant par les 5 points. Supposons maintenant que B' n'appartienne à aucune des droites joignant deux points du repère, de sorte que x, y et t sont non nuls et deux à deux distincts. La conique d'équation $aYT + bXT + cXY = 0$ est dégénérée (si et) seulement si $det \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} = 2abc = 0$. Le système (*) précédent montre que si, par exemple, $a = 0$, alors $x = 0$ ou $y = t$, ce que l'hypothèse sur B' interdit. Ainsi, Γ est non dégénérée. - ii) Si Γ passe par C', la conclusion est le théorème de Pascal. Inversement, si P, Q, R sont alignés, et si $(AQ) \cap \Gamma := \{A, C''\}, P'' := (B'C) \cap (BC'')$, Pascal entraîne que $P'' = (RQ) \cap (B'C) = P$, donc $C' = (BP) \cap (AQ) = (BP'') \cap (AQ) = C'' \in \Gamma$.
4^o/ i) La conique de Δ d'équation $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$, où $[\lambda_1 : \lambda_2] \in \mathbf{P}_1(K)$, est dégénérée si et seulement si $det(\lambda_2\Omega_2 + \lambda_1\Omega_1) = 0$. Comme $det(\Omega_1) \neq 0$, il revient au même de rechercher les $\lambda = -\lambda_1/\lambda_2 \in K$ tels que $det(\Omega - \lambda\mathbf{I}_3) = 0$, où $\Omega = \Omega_2\Omega_1^{-1}$, c-à-d. les valeurs propres de Ω. Il y en a au plus 3. - ii) Un polynôme de degré 3 à coefficients réels admet au moins une racine réelle. Le faisceau du $2^o/ii)$, ensemble des coniques passant par le repère réel $P_0, ..., P_3$, contient les 3 coniques dégénérées formées par les "côtés opposés" et les "diagonales" du quadrilatère $P_0P_1P_2P_3$. Le faisceau des "cercles" passant par P_2 et P_3, qu'on obtient en remplacant P_0 et P_1 par les points cycliques de la droite (réelle) "à l'infini" $D : T = 0$, n'admet qu'une conique *réelle* dégénérée : $D \cup (P_2P_3)$.
[NB. - Exercice : résoudre sans calculs la question $3^o/i)$ à partir de la question $4^o/i)$.]

III.1^o/ Développer le déterminant suivant la dernière colonne, et le mineur correspondant à chaque x_i suivant sa dernière ligne.
2^o/ Soient $v_1, ..., v_{n-1} \in V$ tels que $u(v_1), ..., u(v_{n-1})$ forme une base de $Im(u)$. Alors $(\wedge^{n-1}u)(v_1 \wedge ... \wedge v_{n-1}) = u(v_1) \wedge ... \wedge u(v_{n-1})$ est une base de la droite $\wedge^{n-1}(Imu)$. Mais l'image de $\wedge^{n-1}u$ dans $\wedge^{n-1}V$ est contenue $\wedge^{n-1}(Imu)$. Donc $\wedge^{n-1}u$ est de rang 1.
3^o/ Si $d \in End(V)$ est de rang 1, et si v engendre la droite $Im(d)$, il existe $\ell \in V^*$ tel que $d = \ell \otimes v$. Dans une base $\{e_i\}$ de V, de base duale $\{e_j^*\}$, ℓ est représentée par une matrice ligne (γ_j), v par une matrice colonne (c_i), et $\ell \otimes v$ par leur produit de Kronecker $(c_i\gamma_j)$.
4^o/ On peut supposer que les δ_{ij} ne sont pas tous nuls. Comme $\Delta = 0$, A représente alors un endomorphisme u de rang $n - 1$, et $\wedge^{n-1}u$ est représenté par la matrice $d = (\delta_{ij})$, de rang 1 d'après 2^o/, donc de la forme $c_i\gamma_j$ d'après 3^o/ (appliqué en fait à $V' = \wedge^{n-1}V$). Alors, $\ell(x) := c_1x_1 + ... + c_nx_n$ et $\lambda(y) := \gamma_1y_1 + ... + \gamma_ny_n$ répondent à la question.