Université de Paris VI 2e semestre 2002-2003

Cours spécialisés du DEA “Méthodes algébriques”

GROUPES DE GALOIS DIFFÉRENTIELS

Daniel BERTRAND

Plan

Sommaire

En parfaite analogie avec son analogue classique, la théorie de Galois différentielle établit un dictionnaire entre les extensions de corps différentiels engendrées par les solutions d'une équation différentielle et les groupes algébriques affines (on ne considère ici que des équations différentielles *linéaires*). Elle a récemment connu des applications à des domaines bien éloignés de son cadre initial: théorie des nombres (transcendance, sommes exponentielles), intégrabilité des systèmes hamiltoniens, théorie des revêtements. Le cours décrit l'approche tannakienne de la théorie, et certaines de ces applications.

Sont rassemblées au *chapitre I*:
- une présentation de la théorie de Galois différentielle: modules différentiels; extensions de Picard-Vessiot et groupes de Galois différentiels; la correspondance de Galois;
- et une introduction aux catégories tannakiennes: foncteurs fibres; groupes d'automorphismes d'un foncteur fibre; exemples tirés de la théorie de Galois différentielle.

Le *chapitre II* donne le calcul des groupes de Galois locaux associés à une équation différentielle sur une surface de Riemann: groupe de monodromie, points singuliers réguliers (théorie de Fuchs) et points singuliers irréguliers (groupe de Stokes et théorie de Ramis).

Les exercices du *chapitre III* donnent quelques exemples de calculs de groupes de Galois globaux (représentations de groupes algébriques, cas d'un système local rigide).

CHAPITRE I

THÉORIE DE PICARD-VESSIOT

On souhaite étendre la correspondance de Galois au cas des extensions différentielles. On se limitera dans ce cours aux extensions de Picard-Vessiot (pour la théorie non linéaire, voir les textes de Kolchin, Pillay, Malgrange cités en références.)

§1. La correspondance de Galois différentielle.

Soit K un corps et ∂ une dérivation sur K (i.e. une application additive de K dans K vérifiant la formule de Leibniz $\partial(xy) = x\partial y + y\partial x$). Par K-algèbre différentielle, on entendra ici une K-algèbre commutative et unitaire, munie d'une dérivation prolongeant ∂ (et encore notée ∂). Une extension différentielle L de K est une K-algèbre différentielle qui est un corps. On note $Aut_\partial(L/K)$ le sous-groupe de $Aut(L/K)$ formé des automorphismes de l'extension L/K qui commutent à l'action de ∂ sur L. Si L/K est une extension algébrique séparable, $Aut_\partial(L/K)$ coïncide avec $Aut(L/K)$.

Soient $C := K^\partial := \{x \in K, \partial x = 0\}$ le corps des constantes de K, et $\mathcal{D}_K = K[\partial]$ l'anneau des opérateurs différentiels engendrés par ∂ sur K. On appelle K-vectoriel à connexion la donnée d'un $\mathcal{D}_K$-module V qui est un K-espace vectoriel de dimension finie sur K. Pour toute extensions différentielle L de K, $V_L = V \otimes_K L$ est naturellement muni d'une structure de L-vectoriel à connexion, et on note $V_L^\partial = \{v \in V_L, \partial v = 0\}$ l'ensemble des *vecteurs horizontaux* de V_L. C'est un espace vectoriel sur L^∂, de dimension au plus égale à celle de V sur K. En effet:

Lemme du wronskien: *des éléments de V_L^∂ linéairement indépendants sur L^∂ sont linéairement indépendants sur L.*

Démonstration: considérer une relation de longueur minimale, la diviser par l'un des coefficients non nuls, et dériver la relation obtenue. On justifiera ensuite l'appellation du lemme en notant que n éléments de L sont toujours solutions d'une équation différentielle $\mathcal{L}y = 0$ d'ordre n, avec $\mathcal{L} \in L[\partial]$.

L'injection naturelle de V_L^∂ dans V_L s'étend ainsi en une injection

$$\iota_L : V_L^\partial \otimes_{L^\partial} L \hookrightarrow V_L.$$

On dit que l'extension différentielle L/K *trivialise* V (ou encore, que V est complètement soluble dans L) si i_L est un isomorphisme.

Définition: *Soit* L *une extension différentielle de* K *telle que* $L^\partial = K^\partial (= C)$, *et soit* V *un* K*-vectoriel à connexion. On dit que* L/K *est une extension de Picard-Vessiot relativement à* V *si* V *est trivialisé par* L, *et par aucune extension différentielle intermédiaire stricte* $K \subset L' \subset L$. *On dit que* L/K *est une extension de Picard-Vessiot si* $L^\partial = K^\partial$ *et si* L/K *est une extension de Picard-Vessiot relativement à un vectoriel à connexion (non spécifié).*

Soient $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de V sur K, et A la matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K définie par $\partial(e_1, ..., e_n) = -(e_1, ..., e_n)A$. Alors $v = y_1 e_1 + ... y_n e_n \in V_L$ est horizontal si et seulement si $Y :=^t (y_1, ..., y_n) \in L^n$ vérifie le système différentiel $\partial Y = AY$. Ainsi, quand $L^\partial = K^\partial$, L/K est une extension de Picard-Vessiot si et slt s'il existe une "matrice fondamentale de solutions" $U \in GL_n(L)$ telles que $L = K(U)$ et $\partial U.U^{-1} := A \in \mathcal{M}_n(K)$. L'anneau $R = K[U, \frac{1}{detU}]$ ne dépend alors que de V. C'est une K-algèbre différentielle simple (voir plus bas). Plus généralement, on appelera K*-algèbre de Picard-Vessiot* relative à V tout K-algèbre différentielle simple R telle que $R = K[U, \frac{1}{detU}]$, où $U \in GL_n(R)$ vérifie $\partial U = AU$.

Un changement de base $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n) = (e_1, ..., e_n)P$, avec $P \in GL_n(K)$, de V/K remplace la matrice A de la connexion par $\tilde{A} = P^{-1}AP - P^{-1}\partial P$. Les systèmes différentiels $\partial Z = \tilde{A}Z$ (de matrice fondamentale de solutions $\tilde{U} = P^{-1}U$) et $\partial Y = AY$ sont alors dit équivalents sur K. Pour L/K de Picard-Vessiot relativement à V, U est la matrice de passage de la base $\{e_1 \otimes 1, ..., e_N \otimes 1\}$ de V_L/L en une base formée de vecteurs horizontaux (dans laquelle la matrice de la connexion devient $\tilde{A} = 0$; matrice fondamentale de solution $\tilde{U} = I_n$). Toute matrice fondamentale de solutions de $\partial Y = AY$ est donc de la forme $U\mathcal{C}$, où $\mathcal{C} \in GL_n(C)$.

Pour L/K de Picard-Vessiot relt à V, le groupe $Aut_\partial(L/K)$ agit C-linéairement sur $V_L = V \otimes L$ par le deuxième facteur, et cette action laisse stable le C-sous-espace V_L^∂. D'où une représentation, fidèle par minimalité de L:

$$\rho = \rho_V : Aut_\partial(L/K) \to Aut_C(V_L^\partial).$$

En termes matriciels, la représentation ρ est définie par la relation $\sigma(U) = U\mathcal{C}_\sigma$, où $\sigma \to \mathcal{C}_\sigma \in GL_n(C)$ est une représentation de degré $n = dim_K V$ du groupe abstrait $Aut_\partial(L/K)$.

Supposant désormais que

C **est de caractéristique nulle et algébriquement clos**,

on peut énoncer:

Théorème 1: *Soient V/K un vectoriel à connexion, L/K une extension de Picard-Vessiot pour V, et G le groupe $Aut_\partial(L/K)$. Alors:*

i) l'image sous ρ de G est (l'ensemble des C-points d') un sous-groupe algébrique de GL_n/C, de dimension égale au degré de transcendance de L sur K;

ii) pour toute extension différentielle intermédiaire $K \subset M \subset L$, L/M est une extension de Picard-Vessiot, et M coïncide avec le sous-corps $L^H := \{x \in L, \forall \sigma \in H, \sigma(x) = x\}$ de L fixé par le sous-groupe $H = Aut_\partial(L/M)$ de G;

iii) pour tout sous-groupe H de G, l'image de $Aut_\partial(L/L^H)$ sous ρ est l'adhérence de Zariski de $\rho(H)$.

iv) Dans cette correspondance entre extensions différentielles intermédiaires M et sous-groupes algébriques H de G, $M = L^H$ est une extension de Picard-Vessiot de K si et seulement si H est distingué dans G, et $Aut_\partial(M/K)$ s'identifie alors (comme groupe algébrique) au quotient G/H.

En appliquant ce théorème à la composante neutre G^0 du groupe algébrique G (qui est distinguée et d'indice fini dans G), on voit que $K^0 := L^{G^0}$ est la fermeture algébrique de K dans L, et que G/G^0 s'identifie au groupe de Galois (classique) $Aut(K^0/K)$.

2. Existence et "unicité" des extensions de Picard-Vessiot.

Nous commençons par démontrer l'existence d'une extension de Picard-Vessiot relative à V, et surtout son unicité à un K-isomorphisme différentiel (non unique) près. Nous utiliserons ici le point de vue des algèbres différentielles (voir Magid, van der Put-Singer).

Lemme 1: *i) Soit R une K-algèbre différentielle simple (i.e. sans idéal différentiel propre) de type fini. Alors, R est un anneau intègre, dont le corps de fractions L vérifie $L^\partial = C$.*

ii) Soit V un K-vectoriel à connexion. Alors, il existe une K-algèbre de Picard-Vessiot R relt à V. En particulier, $L = Fr(R)$ est une extension de Picard-Vessiot relt à V.

iii) Deux K-algèbre R_1 et R_2 de Picard-Vessiot relt à V sont différentiellement isomorphes.

iv) Soit $L = K(U)$ une extension de Picard-Vessiot relt à V. Alors, $R = K[U, \frac{1}{detU}]$ est une K-algèbre de Picard-Vessiot relt à V. En particulier, deux extensions de P-V de K relt à V sont isomorphes.

Démonstration: i) Si a divise 0, $I = \{b \in R, \exists n \geq 1, a^n b = 0\}$ est un idéal différentiel non nul, donc égal à R, et a est nilpotent. Cela entraîne que $Nilrad(R)$ est un idéal différentiel (donc nul), donc $a = 0$. Si $a \in L^\partial$, son transporteur dans R est un idéal différentiel, donc $a \in R^\partial$, et si $a \notin C$, $a - c \in R^*$ pour tout $c \in C$. En interprétant a comme une fonction K-rationnelle sur $Spec(R)(\overline{K})$, on en déduit que a est algébrique sur K, donc sur C.

ii) Soient A une matrice de connexion pour V et $X = (X_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)$ une matrice d'indéterminées. Munissons la K-algèbre $R_0 = K[X, \frac{1}{detX}]$ de la dérivation définie par par $\partial X = AX$. Son quotient $R = R_0/J$ par un idéal différentiel maximal répond à la question.

iii) Soient U_1, U_2 des matrices fondamentales de solutions pour R_1, R_2, R_3 le quotient par un idéal différentiel maximal de la K-algèbre différentielle $R_1 \otimes_K R_2$, ϕ_1, ϕ_2 les homomorphismes naturels de R_1, R_2 dans R_3 (qui sont injectifs par simplicité). Les $\phi_i(U_i)$ sont alors des matrices fondamentales de solutions dans R_3. Comme $R_3^\partial = C$, il existe $\mathcal{C} \in GL_n(C)$ tel que $\phi_1(U_1) = \phi_2(U_2)\mathcal{C}$, d'où $R_1 \simeq \phi_1(R_1) = \phi_2(R_2) \simeq R_2$.

iv) Munisssons $B = C[GL_C(V_L^\partial)] \simeq C[T_{i,j}, \frac{1}{detT_{i,j}}]$ de la dérivation triviale, et considérons la L-algèbre différentielle $B_L = L \otimes_C B \simeq L[T, \frac{1}{detT}]$. Alors, tout idéal différentiel J de B_L est engendré sur B_L par son intersection $J \cap B$ avec B (on verra plus généralement que tout L-sous-ev de B_L stable sous ∂ est défini sur C, i.e. engendré sur L par son intesection avec avec B). Dans ces conditions, considérons comme dans ii) un idéal différentiel maximal J de la K-algèbre différentielle R_0, ainsi que le système d'indeterminées $(T_{i,j})$ défini par $X = UT$ (où U est la matrice fondamentale de solutions définissant L). Alors, $\partial T = 0$, et J engendre dans $L \otimes_K R_0 = L[T, \frac{1}{detT}] = B_L$ un idéal différentiel (J), donc de la forme $(J \cap B)$, qui est propre (car $L \otimes_K R_0/(J) \simeq L \otimes_K (R_0/J)$). Soit alors m un idéal maximal de B contenant $J \cap B$. L'application $B \to B/m = C$ s'étend en un homomorphisme de L-algèbres différentielles $B_L = L \otimes_K R_0 \to L$, d'où un homomomorphisme de K-algèbres différentielles $\phi : R_0 \to L$, dont le noyau contient, donc vaut, J. L'image $K[\phi(X), \frac{1}{det\phi(X)}]$ de ϕ est simple, et (puisque $U^{-1}\phi(X) \in GL_n(C)$) s'identifie à R, qui est donc bien une K-algèbre de Picard-Vessiot pour V. La fin de l'énoncé résulte alors de iii).

Remarque 1: soit $PV(L/K)$ l'ensemble des éléments f de L *holonomes sur* K, c'est-à-dire dont l'annulateur $Ann(f) = \{\mathcal{L} \in \mathcal{D}_K, \mathcal{L}(f) = 0\}$ dans l'anneau $\mathcal{D}_K$ ne soit pas réduit à 0 (autrement dit: qui vérifient une équation différentielle linéaire à coefficients dans K). Un élément de $R = k[U, \frac{1}{detU}]$ est holonome, puisque son orbite sous l'action de $\mathcal{D}_K$ est un K-espace vectoriel de dimension finie (appliquer la formule de Leibniz aux monômes en les $U_{i,j}$, et noter que $\partial(detU) = TrA.detU$). On verra en fait que $R = PV(L/K)$.

Remarque 2: dans la preuve de ii), on a utilisé implicitement le fait que l'application ∂ sur $R_1 \otimes_K R_2$ dans elle-même "définie" par $\partial(r_1 \otimes r_2) = \partial r_1 \otimes r_2 + r_1 \otimes \partial r_2$ est une dérivation. Justifier qu'elle est bien définie. Dans le même ordre d'idée, montrer que si $S^{-1}R$ désigne un localisé d'une K-algèbre différentielle R, la formule $\partial(\frac{r}{s}) := \frac{s\partial v - v\partial s}{s^2}$ définit bien une application sur $S^{-1}R$ (et c'en est alors clairement une dérivation).

L'énoncé suivant montre qu'une extension de Picard-Vessiot correspond aux extensions galoisiennes de la théorie classique. Joint à la remarque du §1 sur les extensions algébriques, il justifie d'appeler "groupe de Galois" (différentiel) de L/K le groupe $Aut_\partial(L/K)$.

Lemme 2: *Soient V un K-vectoriel à connexion et L/K une extension de Picard-Vessiot relative à V. Alors, le corps $L^{Aut_\partial(L/K)}$ des éléments de L fixés par $Aut_\partial(L/K)$ coïncide avec K.*

Démonstration: d'après le lemme 1, L est le corps des fractions d'une K-algèbre de Picard-Vessiot R pour V. Soient $a = \frac{b}{c}, b, c \in R$ un élément de L n'appartenant pas à K, de sorte que l'élément $d = b \otimes c - c \otimes b$ de $R \otimes_K R$ est non nul, donc non nilpotent (en caractéristique 0, le produit de deux schémas réduits est réduit). Soient R' le quotient, par un idéal différentiel maximal, de la K-algèbre différentielle $R \otimes_K R[\frac{1}{d}]$, et ϕ_1, ϕ_2 les deux homomorphismes naturels de R dans R'. Comme au Lemme 1. iii, on voit que leurs images sont égales, d'où un K-isomorphisme différentiel de σ de R, donc de L, tel que $\phi_1 = \phi_2 \circ \sigma$. L'image de d dans R' est non nulle, et vaut $\phi_1(b)\phi_2(c) - \phi_1(c)\phi_2(b)$, d'où $\sigma(a) \neq a$.

Puisque qu'une extension différentielle intermédiaire admet C comme corps des constantes, ce lemme démontre la partie ii) du Théorème 1. Nous poursuivons maintenant la preuve grâce à une approche plus géométrique.

3. Le point de vue tannakien.

Par groupe algébrique, on entendra ici groupe algébrique affine (= linéaire), et on se restreindra à des corps de base k de caractéristique nulle. Selon le théorème de Tannaka, un groupe de Lie compact est entièrement déterminé par la catégorie de ses représentations de dimension finie. Soit maintenant G_k un groupe algébrique sur k. Une représentation k-rationnelle de G_k est la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie V, et d'un morphisme de k-groupes algébriques $\rho : G \to GL_k(V)$. L'analogue algébrique du théorème de Tannaka est que la catégorie Rep_{G_k} des représentations k-rationnelle de G_k permet de retrouver G_k. Cela découle de l'énoncé suivant:

Théorème 2 (Chevalley): *soit $G_k \subset GL_k(V)$ un groupe algébrique sur k. Il existe une construction tensorielle E de la représentation V_k de G_k et une k-droite D de E tels que $G_k = \{g \in GL_k(V), g.D = D\}$.*

Pour la démonstration, voir A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Théorème 5.1. Par constructions tensorielles sur V (ou "constructions de l'algèbre linéaire" engendrées par V), on entend la collection des représentations de G_k définie à partir de V en itérant les opération suivantes:

- passage à la représentation contragrédiente V^* et sommes directes;

- produit tensoriel; pour tout couple d'entiers $m, n \geq 0$, on note $V^{m,n}$ la représentation $V^{\otimes n} \otimes (V^*)^{\otimes m}$. Par exemple, l'action de $g \in G_k$ sur un élément ϕ de $End_K(V) \simeq V^{1,1}$ est donnée par $g.\phi = g\phi g^{-1}$. On ajoute les puissances symétriques et extérieures, que l'hypothèse $car(k) = 0$ permet de voir comme des sous-représentations de puissances tensorielles, plutôt que comme des quotients.

Plus généralement, on appelle *construction* de la représentation V de G_k toute représentation X obtenue à partir des opérations précédentes, auxquelles on adjoint les sous-quotients, i.e. les représentations X_1/X_2, où $X_2 \subset X_1$ sont deux sous-représentations de X. Elle forment une sous-catégorie pleine, notée $< V >$, de la catégorie Rep_{G_k}. Pour $G_k \subset GL_k(V)$, $< V >$ coïncide en fait avec Rep_{G_k} (voir J-P. Serre, *Gèbres*, Ens. math., 39, 1993, 33-85, Prop. 8). Noter que pour $GL_k(V)$ lui-même (ou, plus généralement, si G_k est un groupe réductif), tout quotient est isomorphe à une sous-représentation.

Soient alors ω le foncteur oubli de la représentation, de la catégorie Rep_{G_k} dans la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie, ω_V sa restriction à $< V >$, et $Aut^{\otimes}\omega_V$ le foncteur de la catégorie des k-algèbres vers celle des groupes défini comme suit: pour toute k-algèbre R et tout objet X de $< V >$, on pose $\omega(X)_R = \omega(X) \otimes_k R$; un élément de $Aut^{\otimes}\omega_V(R)$ est alors un automorphisme du foncteur $\omega._R$, i.e. une loi associant à tout objet X de $< V >$ un automorphisme R-linéaire λ_X de $\omega(X)_R$ dépendant fonctoriellement de X (i.e. $\forall f \in Hom_{G_k}(X, Y), \lambda_Y \omega(f)_R = \omega(f)_R \lambda_Y$), cette loi étant soumise aux conditions suivantes: pour tout $X, Y \in Ob(< V >), \lambda_{X \otimes Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y$, et la représentation triviale $\mathbf{1} = k$ de G_k vérifie $\lambda_{\mathbf{1}} = id_R$. Cela impose à λ_{X^*} d'être le contragrédient (= inverse du transposé) de λ_X

Soit G_k un sous-groupe algébrique de $GL_k(V)$. Pour toute k-algèbre R, tout élément de $G_k(R)$ définit clairement un élément de $Aut^{\otimes}\omega_V(R)$, et l'application $\lambda \to \lambda_V$ permet de voir ce dernier groupe comme un sous-groupe de $GL_R(V)$. Par fonctorialité, l'action de λ_V sur la construction E_R du théorème de Chevalley est donnée par λ_E, et cette dernière laisse stable la droite D_R, puisque $D \hookrightarrow E$ est un morphisme de Rep_{G_k}. Donc $\lambda_V \in G_k(R)$, et $Aut^{\otimes}\omega_V(R) = G_k(R)$. Ainsi, *le foncteur* $Aut^{\otimes}\omega_V$ *est représentable par le groupe algébrique* G_k, et on a bien pu reconstruire G_k à partir de la catégorie de ses représentations.

Plus généralement, partant d'un sous-groupe quelconque G de $GL_k(V)(k)$, et de la catégorie des représentations linéaires de G de dimension finie que V engendre, on peut interpréter le foncteur analogue $Aut^{\otimes}\omega_V$ comme la k-adhérence de Zariski de G dans $GL_k(V)$: c'est le stabilisateur dans $GL_k(V)$ de l'ensemble $\mathcal{X}_V(G)$ des sous-espaces W de sommes directes de $V^{m,n}$ tels que W est stabilisé par G.

Reprenant les notations du §1, nous allons maintenant appliquer ce point de vue à l'étude d'un vectoriel à connexion V. Notons d'abord que toute construction de l'algèbre linéaire engendrée par V est naturellement munie d'une structure de $\mathcal{D}_K$-module: par exemple, pour $\phi \in End_K(V) \simeq V^{1,1}$, $\partial\phi$ est définie par $(\partial\phi)(v) = \partial(\phi(v)) - \phi(\partial v)$. Considérons dans ces conditions l'ensemble $\mathcal{X}_V(\partial)$ des K-sous-espaces W de sommes directes de $V^{m,n}$ tels que W est stable sous ∂. On appelle *groupe de Galois différentiel intrinsèque* de V le K-sous-groupe algébrique G'_K de $GL_K(V)$ stabilisateur dans $GL_K(V)$ de $\mathcal{X}_V(\partial)$:

$$G'_K := \{g \in GL_K(V),\ \forall W \in \mathcal{X}_V(\partial),\ gW = W\}.$$

Fixons maintenant une extension de Picard-Vessiot L/K relativement à V. Le lemme du wronskien montre que pour toute construction X de V, munie de sa structure de vectoriel à connexion, le C-espace-vectoriel X^∂ des vecteurs horizontaux de X_L se déduit de V^∂ précisément par la construction qui fait passer de V à X. Par exemple, $(End_K(V))^\partial = End_C(V^\partial)$ dans $End_L(V_L)$. De plus, pour tout sous$\mathcal{D}_K$-module W de X, $W^\partial = W_L(L) \cap X^\partial$. On appelle *groupe de Galois différentiel relatif à* L de V le C-sous-groupe algébrique de $GL_C(V^\partial)$

$$G_C^L = G_C := \{g \in GL_C(V^\partial),\ \forall W \in \mathcal{X}_V(\partial),\ gW^\partial = W^\partial\}.$$

Lemme 3: *l'image $\rho(G)$ du groupe $G = Aut_\partial(L/K)$ est l'ensemble des C-points du groupe algébrique G_C.*

Démonstration: il est clair que les éléments de $\rho(G)$ stabilisent les W^∂. Inversément, un élément γ de G_C agit par K-linéarité sur le dual de l'algèbre symétrique de $(V^\partial \oplus ... \oplus V^\partial) \otimes_C K$ ($n = dimV$ facteurs), ainsi que sur $\Lambda^n(V^\partial) \otimes_C K$, et définit ainsi un automorphisme $\tilde{\gamma}$ de l'algèbre de polynômes $K[X_{i,j,1\le i,j\le n}; \frac{1}{detX_{i,j}}]$. Mais l'ensemble des K-formes linéaires sur une construction X de V qui annulent un élément donné x de X^∂ est un $\mathcal{D}_K$-sous-espace de X^*, et est donc stable sous $\tilde{\gamma}$. Ainsi, $\tilde{\gamma}$ stabilise l'idéal (de type fini) J des relations de dépendance algébriques sur K satisfaites par les coefficients $u_{i,j}$ de la matrice de solutions U de V, et définit donc un automorphisme de la K-sous-algèbre $K[U, \frac{1}{detU}]$ de L, donc un élément σ de $Aut(L/K)$. Enfin, σ commute à ∂: puisque γ agit sur V^∂, $\sigma(U)$ est une matrice fondamentale de solutions, et $\partial(\sigma(U)) = A\sigma(U) = \sigma(AU) = \sigma(\partial U)$.

Remarque 3: l'idéal J, qui est stable sous ∂, coïncide avec l'idéal différentiel maximal de la preuve du lemme 1.iv. On notera par ailleurs la relation $W_L = W^\partial \otimes_C L$ pour tout $W \in \mathcal{X}_V(\partial)$, qui (après changement de base de K à L) justifie l'assertion sur les idéaux différentiels de B_L faite au cours de cette preuve. Enfin, on prendra garde à ne pas confondre G'_K et $G_K = G_C \otimes_C K$ (où vivent les éléments de la forme $\tilde{\gamma}$): on passe de

$G_K(L)$ à $G'_K(L)$ par conjugaison par la matrice $U \in GL_n(L)$, de sorte que ces K-groupes deviennent isomorphes sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, mais pas forcément sur K.

Soit maintenant P le K-sous-schema $SpecK[U, \frac{1}{detU}]$ de $GL_{n/K}$. Puisque $K[U, \frac{1}{detU}] = K[X_{i,j}, \frac{1}{X_{i,j}}]/J$ est intègre, c'est une K-variété algébrique irréductible, de corps de fractions L (autrement dit, U est un point générique de P). L'action linéaire de G_K sur cette algèbre (qui est provient de l'action naturelle de $GL_C(V^\partial)$ sur $C[X_{i,j}]$) fournit un K-morphisme $G_K \times P \to P \times P : (g,p) \mapsto (g.p, p)$, pour laquelle on peut énoncer:

Lemme 4: *P est un torseur sous G_K. En particulier, $degtr(L/K) = dimG_C$.*

Démonstration: considérons le foncteur qui attache à un K-algèbre R l'ensemble

$$P'(R) := \{p \in Isom_R(V^\partial \otimes_C R, V \otimes_K R),\ \forall W \in \mathcal{X}_V(\partial),\ p(W^\partial(R)) \subset W(R)\}$$

Puisque les W sont définis sur K, il est représentable par un K-sous-schéma P' de $Isom_K(V^\partial \otimes_C K, V)$, et P' est clairement un K-torseur sous G_K (en particulier, P' est réduit, et lisse). Montrons que $P = P'$. Par définition, la matrice U appartient à $P'(L)$, donc sa K-adhérence de Zariski P est contenue dans P'. Mais l'argument donné plus haut sur $\tilde{\gamma}$ montre que la K-adhérence de Zariski de U contient son orbite $\rho(G).U$ sous G, donc aussi sous G_K. Ainsi $P'(L) = U.G_K(L) \subset P(L)$ et P coïncide avec P'.

La deuxième assertion du lemme 4 en découle immédiatement, et cela démontre la partie i) du théorème 1. Plus précisément, $\overline{K}[U, \frac{1}{detU}] \simeq \overline{K} \otimes_C C[G_C]$: l'algèbre de Picard-Vessiot de V/K est une forme tordue de l'extension à K de l'algèbre des fonctions régulières sur le groupe de Galois G_C. Pour L/K finie, on retrouve le fait bien connu que si L/K est galoisienne, $\overline{K} \otimes L \simeq \overline{K}[G_C]$ est isomorphe au produit de $|Gal(L/K)|$ copies de $\overline{K}$, i.e. $[L : K] = |Gal(L/K)|$.

Remarque 4: P' est aussi un torseur sous G'_K, et les deux actions commutent. Pour toute extension de Picard-Vessiot $\tilde{L} = K(\tilde{U})$ de K relative à V/K, de groupe de Galois $\tilde{G}_C$, on peut de même construire un bi-torseur $\tilde{P}$ sous G_C et $\tilde{G}_C$, cette fois défini sur C, et dont les C-points correspondent aux isomorphismes différentiels de L vers $\tilde{L}$.

La catégorie $Conn_K$ des K-vectoriels à connexion vérifie les propriétés suivantes, qui en font une *catégorie tannakienne neutre sur C*: elle est abélienne, possède un produit tensoriel, des Hom internes, un objet $\mathbf{1} = (K, \partial)$ vérifiant $End(\mathbf{1}) = C$, ces différentes données étant soumises à des propriétés de compatibilité similaires à celles de Rep_{G_C}, et un foncteur fibre ω_K sur K (oubli de la connexion), donc aussi, d'après un théorème de Deligne (Birkhäuser PM 87), des foncteurs fibres sur le corps alg. clos de car. 0 C. Si $\{V\}$

désigne la sous-catégorie pleine engendrée par le vectoriel à connexion V, chaque extension de Picard-Vessiot L/K munit d'ailleurs $\{V\}$ d'un tel foncteur fibre ω_V^L sur C. On peut alors montrer que $G_C^L = Aut^{\otimes}\omega_V^L$; de même, $\tilde{P} = Isom^{\otimes}(\omega_V^L, \omega_V^{\tilde{L}})$ pour L/K et $\tilde{L}/K$ de Picard-Vessiot relt à V, tandis que $P' = Isom^{\otimes}((\omega_V^L)_K, (\omega^K)_{|\{V\}})$. Cela permet de définir l'extension de Picard-Vessiot L/K sans recours au lemme 1, et, en considérant toute la catégorie $Conn_K$, de construire l'extension de Picard-Vessiot universelle $U_{PV}(K)$, dont le groupe de Galois différentiel est l'ensemble des C-points du groupe proalgébrique $Aut^{\otimes}\omega$, limite projective des G_C^L. Nous nous contenterons de vérifier que les catégories $\{V\}$ et $< V^{\partial} >$ sont équivalentes.

§4. Fin de la démonstration du théorème 1.

Lemme 5: *i) Soit H un sous-groupe de G tel que $L^H = K$. Pour tout H-sous-module W_C de V^{∂}, il existe un K-ss-ev de V stable sous ∂ tel que $W_C = W^{\partial}$.*

ii) Soit f un élément de L. Alors, f est holonome sur $K \Leftrightarrow f \in K[U, \frac{1}{detU}] \Leftrightarrow$ l'orbite de f sous G engendre dans L un C-espace vectoriel de dimension finie.

iii) Le foncteur $F : X \mapsto F(X) = X^{\partial}$ fournit une équivalence de catégories, compatible à $\otimes$, entre les sous-catégories $\{V\}$ de $Conn_K$ et $< V^{\partial} >$ de Rep_{G_C}.

Démonstration: i) Le lemme du vecteur cyclique permet de supposer que V est isomorphe au dual de $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\mathcal{L}$, où $\mathcal{L} \in \mathcal{D}_K$, autrement dit que V^{∂} est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle $\mathcal{L}y = 0$ à coefficients dans K. Soit alors $\mathcal{L}_1 \in L[\partial]$ un opérateur différentiel unitaire d'ordre minimal annulant W_C. D'après le lemme du wronskien, $\mathcal{L}_1$ est d'ordre $dim_C W_C$, et ses coefficients sont entièrement déterminés par W_C. Puisque W_C est stable sous H, ces coefficients appartiennent donc au corps $L^H = K$. Alors, $\mathcal{L}$ est un multiple à gauche de $\mathcal{L}_1$ dans $\mathcal{D}_K$, et le dual W de $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\mathcal{L}_1$ répond à la question.

ii) D'après l'argument du i), seule la première implication reste à vérifier. Si f est holonome, le K espace vectoriel W engendré par ses dérivées est de dimension finie. Son transporteur dans $R = K[U, \frac{1}{detU}]$ est donc non nul. Or c'est un idéal différentiel de l'algèbre simple R, donc $f \in W \subset R$.

iii) Comme on l'a noté implicitement lors de la défintion de G_C, le lemme du wronskien montre que F est un foncteur et qu'il est compatible à $\otimes$. On en définit un inverse S de la façon suivante. Pour toute représentation W_C de G_C, munissons $W_L := W_C \otimes_C L$ d'une structure de L-vectoriel à connexion par l'action de ∂ sur le deuxième facteur, et de l'action de G_C définie par $g(w \otimes f) = g(w) \otimes g(f)$, qui commute donc à celle de ∂, de sorte que $S(W_C) := (W_L)^{G_C}$ est un $\mathcal{D}_K$-module. En appliquant i) à une construction tensorielle convenable de V, et en notant que le corps L^{G_C} vaut K d'après le théorème 1. ii), on voit que pour tout objet W_C de $< V^\partial >$, il existe un objet W de $\{V\}$ tel $S(W_C)$ coïncide avec W (donc appartient à $\{V\}$), et vérifie $F(S(W_C)) = W_C$. Inversément, la relation $L^{G_C} = K$ montre que $S(F(W)) = W$ pour tout objet W de $\{V\}$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le thórèmeme 1.iii. Avec ses notations, H est un sous-groupe de $Aut(L/L^H)$, et on peut, sans perte de généralité, supposer que L^H est le corps de base K. On doit alors montrer que $\rho(H)$ est Zariski-dense dans G, autrement dit, d'après le théorème de Chevalley, que tout C-sous-espace vectoriel W'_C d'une construction X^∂ de $< V^\partial >$ qui est stable sous H est automatiquement stable sous G. D'après le lemme 5.i, W'_C appartient à $< V^\partial >$, et est donc bien stable sous G.

Démonstration du théorème 1.iv.

Montrons d'abord que M est stable sous G ssi H est distingué, et que $\Gamma := Aut_\partial(M/K)$ est alors isomorphe à G/H. Si M est stable sous G, l'application de restriction à M fournit un homomorphisme de G dans Γ, de noyau $H \triangleleft G$. Mais elle est aussi surjective: le raisonnement du lemme 1.iii montre que pour tout K-automorphisme différentiel ψ de M, l'extension de Picard-Vessiot $L' = L$ de $\psi(M)$ relativement à $\partial Y = \psi(A)Y = AY$ est isomorphe au-dessus de ψ à l'extension de Picard-Vessiot L de M relativement à $\partial Y = AY$. Inversément, si H est distingué dans G, on a pour tout $\sigma \in G, \tau \in H, x \in M, \tau' = \sigma^{-1}\tau\sigma \in H$, donc $\sigma(x) = \sigma\tau'(x) = \tau(\sigma(x))$ et $\sigma(x) \in L^H = M$.

Supposons M de Picard-Vessiot sur K. D'après le lemme 5, $PV(M/K)$ est stable sous G, donc M également. Inversément, soit H_C un sous-groupe fermé et distingué du groupe algébrique G_C. Il existe une représentation rationnelle $rho : G_C \to GL_C(N_C)$, i.e. un objet N_C de $< V^\partial >$, telle que H soit le noyau de ρ. Considérons le K-vectoriel à connexion $N = S(N_C) \in \{V\}$. Comme L/K trivialise N, L contient une extension de Picard-Vessiot M relt à N. Son groupe de Galois de différentiel est par construction le C-groupe algébrique G_C/H_C. Enfin, $M \subset L^{H_C}$ puisque H_C agit trivialement sur $N^\partial = N_C$, et la correspondance de Galois entraîne que $L^H = M$, qui est donc bien une extension de Picard-Vessiot de K. Ceci conclut la preuve du théorème 1.

Un corollaire remarquable de ce théorème est le

Théorème de Liouville: *soient L/K une extension de Picard-Vessiot, et G_C le C-groupe algébrique défini par son groupe de Galois différentiel $Aut_\partial(L/K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) L se déduit de K par adjonction successive d'extensions algébriques, de primitives et d'exponentielles de primitives;

ii) la composante neutre $(G_C)^0$ de G_C est un groupe résoluble.

CHAPITRE II

GROUPES DE GALOIS LOCAUX

§1. Du local au global.

Soient X une surface de Riemann compacte, $\mathbf{K}$ le corps des fonctions méromorphes sur X, et $\mathcal{M}$ un fibré holomorphe de rang n sur X. Soit par ailleurs ∇ une connexion à singularités sur $\mathcal{M}$, c'est-à-dire une application additive $\nabla : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes \Omega^1_X(*S)$, où $\Omega^1_X(*S)$ désigne le faisceau des formes différentielles sur X à pôles dans un ensemble fini S, telle que pour toute section locale (f, v) de $\mathcal{O}_X \times \mathcal{M}$, $\nabla(fv) = f\nabla v + v \otimes df$. Pour toute dérivation ∂ de $\mathbf{K}$ de corps de constante $\mathbf{C}$, c'est-à-dire pour toute section méromorphe non nulle du fibré tangent à X, la contraction ∇_∂ de ∇ avec ∂ munit le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{V}$ des sections méromorphes de $\mathcal{M}$ d'une structure de $\mathbf{K}$-vectoriel à connexion, définie, pour tout $v \in \mathbf{V}$, par $\partial.v = \nabla_\partial v \in \mathbf{V}$. On se propose ici de construire des générateurs topologiques du groupe de Galois différentiel G_∇ de $\mathbf{V}$ sur $\mathbf{K}$.

Fixons un point b de X hors de S. D'après le théorème de Cauchy, il existe une base de vecteurs horizontaux de $\mathbf{V}$ formée d'éléments de $\mathcal{M}_b$, dont nous noterons U la matrice représentative dans une base de $\mathbf{V}/\mathbf{K}$. Soit $L_b = \mathbf{K}(U)$ l'extension de Picard-Vessiot correspondante, de sorte que $G_\nabla \simeq Aut_\partial(L_b/\mathbf{K})$. Le faisceau des germes de sections horizontales de ∇ est un *système local* de rang n sur $X' := X \setminus S$, c'est-à-dire un faisceau localement isomorphe au faisceau constant $\underline{\mathbf{C}}^n$. Il lui correspond une représentation linéaire du groupe $\pi_1(X'; b)$, donnée concrètement par le prolongement analytique des coefficients de U le long des lacets de X' issus de b. Comme le prolongement analytique respecte les structures de corps différentiels, l'image de $\pi_1(X', b)$ par cette représentation s'identifie à un sous-groupe de G_∇, dont l'adhérence de Zariski dans G_∇ s'appelle le *groupe de monodromie* (global) $Mono_\nabla$ de la connexion.

Soient maintenant $s \in S$ une singularité de ∇, D_s un petit disque centré en s, K_s le corps des fonctions méromophes sur D_s, $s' \neq s$ un point de D_s, $L_{s'}$ l'image de L_b par prolongement analytique le long d'un chemin $\gamma_{s'}$ de b à s', et $L^s = L_{s'}.K_s$ le compositum de $L_{s'}$ et K_s dans le corps des fonctions méromorphes au voisinage de s'. Alors, L^s/K_s est une extension de Picard-Vessiot pour le K_s-vectoriel à connexion $V_s = \mathbf{V} \otimes_{\mathbf{K}} K_s$. Son groupe de Galois différentiel $Aut_\partial(L^s/K_s)$ s'identifie au sous-groupe fermé $Aut_\partial(L_{s'}/L_{s'} \cap K_s)$ de G_∇, qu'on appele le *groupe de Galois analytique local* $G_{\nabla,s}$ de ∇ en s. Nous l'étudions aux §§2 et 3. Noter que ce sous-groupe dépend du chemin $\gamma_{s'}$: seule sa classe de conjugaison dans G_∇ est intrinsèque. Pour calculer cette classe, on peut choisir à sa guise une extension de Picard-Vessiot L^s/K_s de V_s, sans référence à b, D_s, ou s'. C'est ce que nous ferons, en remplaçant K_s par le corps des germes de fonctions méromorphes au voisinage de s.

Fixons enfin un système $\{\gamma_{s'}, s \in S\}$ de chemins reliant b aux différents points proches s', tels que que le complémentaire dans X de la réunion des γ'_s et des disques D_s soit connexe. Pour un tel système "compatible" de chemins, on peut énoncer:

Proposition 1: *si X est la sphère de Riemann $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, le groupe de Galois différentiel G_∇ est engendré (pour la topologie de Zariski) par ses sous-groupes analytiques locaux $G_{\nabla,s}, s \in S$.*

Démonstration: il s'agit de vérifier (voir chap. I, thm. 1.iii) qu'un élément f de L_b invariant sous les groupes locaux appartient à $\mathbf{K}$. Par définition (et par le chap. I, lemme 2), f est invariant sous $G_{\nabla,s}$ ssi son image $f^{\gamma_{s'}}$ dans $L_{s'} \subset L^s$ appartient à K_s, i.e. s'étend en une fonction méromorphe sur D_s. Ainsi, f admet un prolongement méromorphe le long de tout chemin de X issu de b, et comme $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ est simplement connexe, ce prolongement est indépendant du chemin choisi. Par conséquent, f s'étend en une fonction méromorphe sur X, et $f \in \mathbf{K}$.

Remarque: de même, le groupe de Galois d'une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ est engendré par tous ses sous-groupes d'inertie. Mais il n'y a ici pas de moyen de choisir un système compatible de représentants de leurs classes de conjugaison, on doit les prendre tous.

§2. Singularités régulières.

La lettre $K = K_0$ désigne désormais le corps des germes de fonctions méromorphes en 0. Nous nous plaçons au voisinage d'une singularité, disons $s = 0$, de paramètre local z, de valuation z-adique v. Soient $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,0} = \mathbf{C}\{z\}$ l'anneau des séries convergentes, $\hat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[z]]$ son complété pour la topologie v-adique (anneau de séries formelles), K et $\hat{K}$ leurs corps des fractions. On utilisera les dérivations $\partial := \frac{d}{dz}$ et $\theta := z\frac{d}{dz}$, qui sont continues pour la topologie v-adique, et dont $\mathbf{C}$ est le corps des constantes, tant pour K que pour $\hat{K}$. On appelle *réseau* d'un K-espace vectoriel V de dimension n tout sous-$\mathcal{O}$-module de type fini Λ de V engendrant V sur K; comme $\mathcal{O}$ est un anneau principal, Λ est alors isomorphe à $\mathcal{O}^n$. Mêmes notions avec $\hat{\mathcal{O}}$.

Soient (V, ∇) un K-vectoriel à connexion, $(\hat{V} = V \otimes_K \hat{K}, \hat{\nabla} = \nabla \otimes d)$ son extension des scalaires à $\hat{K}$, $G = G_{\nabla,0}$ le groupe de Galois différentiel de V/K. Le groupe de Galois différentiel $\hat{G}$ de $\hat{V}/\hat{K}$ s'appelle le *groupe de Galois formel* de V (en 0). Il s'identifie (encore une fois, non canoniquement) à un sous-groupe fermé de G. Par exemple, si $\hat{L} = \hat{K}(\hat{U})$ est une extension de Picard-Vessiot pour $\hat{V}/\hat{K}$, alors $L = K(\hat{U})$ est une extension de Picard-Vessiot pour V/K, et $\hat{G} = Aut_\partial(\hat{L}/\hat{K}) \simeq Aut_\partial(L/L \cap \hat{K}) \subset G$. De façon plus intrinsèque, tout automorphisme de $\hat{V}$ qui laisse stable les sous-$\hat{K}$-connexions des constructions de $\hat{V}$ stabilise en particulier celles qui proviennent de V, de sorte que le groupe de Galois différentiel intrinsèque $\hat{G}'_{\hat{K}}$ de $\hat{V}$ est naturellement un sous-groupe fermé de $G'_K \otimes_K \hat{K}$, où G'_K désigne le groupe de Galois intrinsèque de V.

Par ailleurs, le choix d'une base de V sur K permet d'étendre (V, ∇) sur un disque $D = \{|z| < r\}$ suffisamment petit en un fibré à connexion $(\mathcal{M}_D, \nabla_D)$, sans singularité sur $D^* = D \setminus 0$. Ses sections horizontales locales forment par Cauchy un système local sur D^*, indépendant de la base choisie, d'où une représentation linéaire ρ du groupe (abélien) $\pi^1(D^*) \simeq \mathbf{Z}$, dont l'image appartient à G. Son adhérence de Zariski dans G s'appelle le groupe de monodromie (local) Mon_0 de V/K; l'image $\rho(1) := \mu_0(\nabla)$ de son générateur canonique (tour autour de 0 dans le sens trigonométrique) est l'automorphisme de monodromie de ∇.

On dit que le K-vectoriel à connexion (V, ∇) est à *singularité régulière* (SR) s'il existe un réseau Λ de V tel que $\nabla_\theta \Lambda \subset \Lambda$. C'est par exemple le cas s'il provient d'un fibré à connexion $(\mathcal{M}, \nabla)$ sur X *fuchsien* en 0, i.e. tel que $\nabla_\theta \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$. L'endomorphisme induit par ∇_θ sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\Lambda/z\Lambda \simeq \mathbf{C}^n$ s'appelle alors le résidu $Res_\Lambda(\nabla)$ de ∇ relativement à Λ. On dit que $Res_\Lambda(\nabla)$ est *non-résonnant* si aucune de ses valeurs propres ne diffère d'une autre par un entier *non nul*. Mêmes définitions pour les $\hat{K}$-connexions.

Théorème 1: *soit ∇ une connexion sur un K-vectoriel V, à singularité régulière (en 0).*

i) Il existe un réseau Λ stable sous ∇_θ tel que $Res_\Lambda(\nabla)$ soit non-résonnant.

ii) Pour un tel réseau Λ, posons $\hat{\Lambda} = \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}$; il existe une base $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\hat{\Lambda}$ sur $\hat{\mathcal{O}}$ telle que $\hat{\nabla}_\theta(e_1, ..., e_n) = -(e_1, ..., e_n)R$, où R est la matrice représentative de $Res_\Lambda(\nabla)$ dans la base correspondante de $\hat{\Lambda}/z\hat{\Lambda}$.

iii) On peut en fait choisir la base $\{e_1, ..., e_n\}$ convergente, i.e. dans Λ.

iv) Les coordonnées de la matrice $z^R := exp(R.\ell nz)$ engendrent sur K une extension de Picard-Vessiot pour ∇. En particulier, $G = \hat{G} = Mon_0$, et ce groupe est engendré topologiquement par $\mu_0(\nabla) = exp(2i\pi Res_\Lambda(\nabla))$.

Pour la démonstration, voir les livres de Deligne, Poole ou Wasow cités dans la bibliographie. La preuve de i) repose sur une transformation de cisaillement ("shearing"); celle de ii) sur l'algèbre linéaire. Soient alors ∇_0 la connexion sur $V_0 = K^n$ définie par $(\nabla_0)_\theta Y = \theta Y - RY$, et H le K-espace vectoriel $Hom(V, V_0)$ muni de la connexion $\nabla_0 \otimes \nabla^*$;

comme V et V_0 sont SR, H l'est aussi, et iii) découle de la proposition 2.ii ci-dessous: tout vecteur horizontal de H défini sur $\hat{K}$ appartient en fait à $H(K)$. En particulier, la matrice de passage P d'une $\mathcal{O}$-base $\mathcal{B}$ de Λ à la base $\{e_1, ..., e_n\}$ est dans $GL_n(K)$. L'énoncé iv) en est un corollaire immédiat, puisque $P(z)z^R$ représente une matrice fondamentale de solutions de V relativement à $\mathcal{B}$. Noter que pour un réseau stable sous ∇_θ quelconque, on peut affirmer seulement que les semi-simplifiés de $\mu_0(\nabla)$ et de $exp(2i\pi Res_\Lambda(\nabla))$ coïncident.

Soit $L = a_n\partial^n + ... + a_0 = b_n\theta^n + ... + b_0 \in \mathcal{D}_K$ un opérateur différentiel, et V le vectoriel à connexion dual de $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L$. En notant qu'une extension de connexions SR est SR, on déduit de ii) que V est à singularité régulière si et seulement si L vérifie la *condition de Fuchs*: pour tout $i = 0, .., n$, $v(a_i) - i \geq v(a_n) - n$; autrement dit, si $b_n = 1$, tous les b_i appartiennent à $\hat{\mathcal{O}}$, donc à $\mathcal{O}$. Les valeurs propres de $\mu_0(\nabla)$ sont alors données, avec leur multiplicités, par $exp(2i\pi\rho)$, où ρ parcourt l'ensemble des racines du polynôme indiciel $P_L(\rho) = \rho^n + b_{n-1}(0)\rho^{n-1} + ... + b_0(0)$ de L en 0; on appelle ces racines les *exposants* de L en 0. De façon générale, le nombre $i(L) := (v(a_n) - n) - \inf_{i=0,...,n}(v(a_i) - i)$ s'appelle l'*irrégularité de Malgrange* de L. La proposition suivante montre qu'il ne dépend que de la classe de K-isomorphisme de V, et peut donc être noté $i(V)$.

Proposition 2: *soit (V, ∇) un K-vectoriel à connexion et $L \in \mathcal{O}[\partial]$ un opérateur différentiel tel que $V^* \simeq \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L$.*

i) Vu comme opérateur $\mathbf{C}$-linéaire sur $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$, L est surjectif, et son noyau a pour dimension $i(L)$. En particulier, $i(L) = 0$ si et seulement si V est SR.

ii) Vu comme opérateur $\mathbf{C}$-linéaire sur $\hat{V}/V$, ∇_∂ est surjectif, et son noyau a pour dimension $i(L)$. En particulier, V est SR si et seulement si tout élément $\hat{v}$ de $\hat{V}$ tel que $\nabla_\partial(v) \in V$ appartient à V.

Pour la démonstration, voir Malgrange, Ens. math., 20, 1974, 147-176. On dit qu'un K-vectoriel à connexion V a une singularité irrégulière en 0 si $i(V) > 0$.

§**3. Singularités irrégulières.**

Les parties i) et ii) du théorème 1 montrent que tout $\hat{K}$-vectoriel à connexion SR est extension successive de $\hat{K}$-vectoriel SR de rang 1. Cet énoncé reste correct pour le complété formel $\hat{V}$ d'un K-vectoriel (V, ∇) à connexion irrégulière en 0, à condition de passer à une extension finie de K; celles-ci sont, d'après le théorème de Puiseux, de la forme $K_b = K(t)$, où $t^b = z$ pour un entier $b \geq 1$. Plus précisément, il existe un entier b divisant $n!$, une matrice diagonale $t\frac{d}{dt}Q(\frac{1}{t})$ dont les coefficients sont des polynômes en $\frac{1}{t}$ sans termes constants, et une matrice constante R commutant à Q, telle que $V_b := V \otimes_K K_b$ soit $\hat{K}_b$-isomorphe au K_b-vectoriel $V_0 = K_b^n$, muni de la connexion ∇_0

définie par $(\nabla_0)_{t\frac{d}{dt}} Y = t\frac{d}{dt} Y - \big(t\frac{d}{dt} Q(\frac{1}{t}) + R\big) Y$. En d'autres termes, il existe une matrice $\hat{P} \in GL_n(\hat{K}_b) \subset Hom(\hat{V}_b, \hat{V}_0)$ représentant un isomorphisme horizontal de $\hat{V}_b$ sur $\hat{V}_0$ tel que $\hat{U}(t) = \hat{P}(t) exp(Q(\frac{1}{t})) t^R$ soit une matrice fondamentale de solutions pour $\hat{V}_b$. Les coefficients $q_1, ..., q_n$ de Q s'appellent les *facteurs déterminants* de V; quand V provient d'une équation différentielle $Ly = 0$, leurs degrés (en $\frac{1}{z}$) se lisent sur les pentes du polygône de Newton de L. Le plus grand de ces degrés s'appelle le rang de Katz de V.

Le groupe de Galois formel $\hat{G}$ est un quotient de $Aut_\partial(\hat{K}(t, exp(Q(\frac{1}{t})), t^R)/\hat{K})$, qu'il est facile de dévisser (voir Séminaire Bourbaki, exposé No 750, Prop.2). Mais comme l'irrégularité de Malgrange de $Hom(V_b, V_0)$ n'est pas nulle, $\hat{P}$ peut diverger, de sorte que $\hat{G}$ est en général un sous-groupe strict de G. On doit lui adjoindre le *groupe de Stokes St* de ∇ pour engendrer G. Noter que le groupe de monodromie Mon_0 peut lui aussi être un sous-groupe propre de G, comme le montre l'équation $z^2 y' + y = 0$, de solution $y = e^{\frac{1}{z}}$ uniforme sur $\mathbf{C}^*$ (de fait, toute équation de rang 1 vérifie $St = \{1\}$, et $\hat{G} = G$).

Pour simplifier, nous supposons désormais que la décomposition formelle de V ne requiert pas de ramification, i.e. que $b = 1$, et que les différences $q_i - q_j$ des différents facteurs déterminants sont nulles ou de degré égal au rang de Katz q de V.

Le groupe de Stokes

Soient $\hat{f} = \Sigma_{n \geq v(\hat{f})} f_n z^n \in \hat{K}$ une série formelle, et B un germe de secteur ouvert de sommet 0, d'angle d'ouverture $< 2\pi$. On dit qu'une fonction f holomorphe sur B y admet $T_B f = \hat{f}$ comme développement asymptotique si, pour tout sous-secteur compact β de $B \cup 0$ et tout entier $m \geq 0$, il existe un nombre réel $A_{\beta,m}$ tel que $\epsilon_m(z) := |f(z) - \Sigma_{v(f) \leq n < m} f_n z^n| \leq A_{\beta,m} |z|^m$ pour tout $z \in \beta$. On note $\mathcal{A}$ le faisceau sur le cercle S^1 des directions autour de 0, formé par les germes de telles fonctions. D'après le théorème de Borel-Ritt, toute série formelle est de la forme $T_B(f)$ pour au moins une fonction f holomorphe sur B. On en déduit que $\hat{K}/K \simeq \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ est isomorphe à $H^1(S^1, \mathcal{A}^0)$, où $\mathcal{A}^0$ désigne le sous-faisceau de $\mathcal{A}$ des germes de fonctions plates.

En pendant à Borel-Ritt, le théorème de Poincaré énonce que pour *tout* secteur B d'angle suffisamment petit, l'isomorphisme horizontal $\hat{P} \in Hom(\hat{V}, \hat{V}_0)^\partial$ supra est le développement asymptotique sur B d'un isomorphisme $P_B \in GL_n(\mathcal{A}(B))$, encore horizontal pour la K-connexion $H = Hom(V, V_0)$. On vérifie en considérant la matrice fondamentale de solutions $U_B = P_B(z) exp(Q(\frac{1}{z})) z^R$ de $V \otimes_K \mathcal{A}(B)$, que P_B se prolonge analytiquement, avec même développement asymptotique $\hat{P}$, sur tout secteur $B' \supset B$ tel que $B' \setminus B$ ne contient pas l'une des *lignes de Stokes* de V, c'est-à-dire l'une des directions θ où près de 0, $Re(q_i - q_j)(\frac{1}{z})$ change de signe pour au moins une couple (i, j). Il conviendrait d'ailleurs de les nommer plutôt lignes de Stokes de $Hom(V, V_0)$. On en déduit (théorème de Malgrange-Sibuya, voir Babbitt-Varadarajan, 3.4.1 et 4.4.1) une bijection entre l'ensemble des classes de K-isomorphismes de K-vectoriels à connexion V munis d'un $\hat{K}$-isomorphisme avec V_0, et l'ensemble pointé $H^1(S^1, \mathcal{S}t(\nabla_0))$, où $\mathcal{S}t(\nabla_0)$ désigne le faisceau des germes de sections horizontales de $End(V_0)$ tangentes à l'identité. On trouvera dans les travaux de M. Loday-Richaud (voir Sém. Bourbaki, *loc.cit.*, §3.2) une description directe du groupe de Stokes St à partir du cocycle représentant la classe de $(V, \hat{P})$.

La construction originale donnée par Ramis du groupe St repose sur le raffinement suivant du théorème de Poincaré: pour tout secteur B d'ouverture $< \frac{\pi}{k}$, il existe une isomorphisme horizontal $P_B \in GL_n(\mathcal{A}(B))$ tel que $T_B(P) = \hat{P}$, formé de fonctions Gevrey d'ordre k. Rappelons qu'une fonction $f \in \mathcal{A}(B)$ est dite Gevrey d'ordre k s'il existe des réels A_β tels que dans l'évaluation des restes $\epsilon_m(z)$ de la formule supra, on puisse prendre $A_{\beta,m} = A_\beta^{m+1}(m!)^{\frac{1}{k}}$. Elles définissent un sous-faisceau $\mathcal{A}_k$ de $\mathcal{A}$, dont les sections plates ont une décroissance exponentielle d'ordre k au voisinage de 0, et sont donc nulles si l'angle d'ouverture de B est $> \frac{\pi}{k}$. On en déduit que si B est un secteur d'angle $\frac{\pi}{k}$ non singulier, i.e. non bordé par des lignes de Stokes, il existe un secteur $B' \supset B$ d'angle $> \frac{\pi}{k}$ et un isomorphisme horizontal *unique* $P_{B'} := \Sigma_{B'}(\hat{P}) \in H(\mathcal{A}_k(B'))$ tel que $T_{B'}(P_{B'}) = \hat{P}$. De plus, cet inverse partiel $\Sigma_{B'}$ de $T_{B'}$ respecte les structure d'anneaux différentiels de $K[\hat{P}]$ et de $\mathcal{A}(B')$. D'où (cf. Appendice, §3.1) une collection $\{st_\alpha\}$ d'éléments du groupe de Galois différentiel G de V/K, indexés par les bissectrices α des secteurs singuliers. Par définition, le groupe St est le sous-groupe algébrique de G engendré par les st_α.

Théorème 2: *Le groupe analytique local G est engendré topologiquement par le groupe formel $\hat{G}$ et le groupe de Stokes St.*

Démonstration: si un élément f de l'extension de Picard-Vessiot $L \subset K(\hat{P}, exp(Q(\frac{1}{z}))z^R)$ de V/K est invariant sous $\hat{G}$, $f \in K(\hat{P})$. Si f est de plus invariant sous St, ses différentes resommations $\Sigma_{B'}(f)$ se recollent en une fonction méromorphe sur D, donc $f \in K$.

Exemple: l'opérateur $L = (z\partial - 1)(z^2\partial + 1)$ a une singularité irrégulière en 0. Une base de solutions est donnée par $e^{\frac{1}{z}}$ et par la série d'Euler $\hat{f}(z) = \Sigma_{n\geq 1}(-1)^n n! z^{n+1} \in \hat{\mathcal{O}}$. Les lignes de Stokes sont $i\mathbf{R}^+, i\mathbf{R}^-$; seule la direction singulière $\alpha = \mathbf{R}^-$ conduit ici à une matrice de Stokes. Soient $d^\pm$ des demi-droites faisant un angle $\pm\varepsilon$ avec $\mathbf{R}^-$. Les resommations de $\hat{f}$ sur $B'_- =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $B'_+ =]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont obtenues par prolongement analytique des fonctions définies, sur les demi-plans de bissectrices $d^\pm$, par $\Sigma_\pm(\hat{f})(z) = \int_{d^\pm} \frac{e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} d\zeta$. Ces fonctions sont Gevrey d'ordre 1, et coïncident avec $e^{\frac{1}{z}} \int_0^z e^{-\frac{1}{t}} \frac{dt}{t}$ pour $Re(z) > 0$. Sur le secteur $\{Re(z) < 0\}$, leur différence vaut $Res_{\zeta=-1} \frac{e^{-\zeta/z}}{1+\zeta} = 2i\pi e^{\frac{1}{z}}$, d'où $st_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2i\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $St \simeq \mathbf{G}_a$. Ici, G est le produit semi-direct de $\hat{G} = Aut_\partial(\hat{K}(e^{\frac{1}{z}})/\hat{K}) \simeq \mathbf{G}_m$, par St.

CHAPITRE III

EXERCICES

Sauf mention du contraire, K désigne un corps de caractéristique nulle, muni d'une dérivation ∂ de corps des constantes C.

1. Le théorème d'Ostrowski-Kolchin.

1°/ Soient $\mathbf{G}_m$ (resp. $\mathbf{G}_a$) le groupe multiplicatif (resp. additif) sur C, et n un entier ≥ 1.

i) Montrer que si H est un sous-groupe algébrique propre de $\mathbf{G}_m^n$, il existe n entiers rationnels $a_1, .., a_n$ non tous nuls tels que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in H$, on a $x_1^{a_1}...x_n^{a_n} = 1$.

ii) Montrer que si H est un sous-groupe algébrique propre de $\mathbf{G}_a^n$, il existe n éléments $c_1, .., c_n$ de C non tous nuls, tels que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in H$, on a $c_1x_1 + ... + c_nx_n = 0$.

2°/ Soient L une extension différentielle de (K, ∂), de corps de constantes C, et $f_1, ..., f_n$ des éléments non nuls de L tels que $deg.tr_K K(f_1, ..., f_n) < n$

i) On suppose de $\frac{\partial f_i}{f_i} \in K$ pour tout $i = 1, ..., n$. Montrer que $K(f_1, ..., f_n)$ est une extension de Picard-Vessiot de K, que son groupe de Galois s'identifie à un sous-groupe H de $\mathbf{G}_m^n$, et que $dim(H) < n$. En déduire qu'il existe des entiers rationnels $a_1, .., a_n$ non tous nuls tels $f_1^{a_1}...f_n^{a_n} \in K$.

ii) On suppose de $\partial f_i \in K$ pour tout $i = 1, ..., n$. Montrer que $K(f_1, ..., f_n)$ est une extension de Picard-Vessiot de K, que son groupe de Galois s'identifie à un sous-groupe H de $\mathbf{G}_a^n$, et que $dim(H) < n$. En déduire qu'il existe des éléments $c_1, .., c_n$ de C non tous nuls tels $c_1f_1 + ... + c_nf_n \in K$.

2. Le lemme du vecteur cyclique.

On suppose ici que le corps des constantes C est *strictement inclus* dans K, et on note $\mathcal{D}$ l'anneau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D} = K[\partial]$. On rappelle que $\mathcal{D}$ est muni d'algorithmes de divisions euclidiennes à gauche et à droite. En particulier, $\mathcal{D}$ est un anneau principal à gauche et à droite.

1°/ On se propose de montrer que $\mathcal{D}$ est simple, i.e. n'a pas d'idéal bilatère propre. Soient

J un idéal bilatère de $\mathcal{D}$ non nul, et $\mathcal{L} = \partial^n + a_1\partial^{n-1} + ... + a_n$ un opérateur unitaire d'ordre minimal appartenant à J .

i) Montrer que $D\mathcal{L} = \mathcal{L}D = J$.

ii) Soit b dans K , de dérivée $\partial(b) := b' \neq 0$. Montrer que $\mathcal{L}b - b\mathcal{L} = nb'\partial^{n-1}+$ (termes d'ordre $\leq n-2$). En déduire que $n = 0$, et conclure.

iii) Montrer que si $K = \mathbf{F}_2(z)$, $\partial = d/dz$, l'anneau $K[\partial]$ n'est pas simple.

2°/ Soient $M \simeq \mathcal{D}^m$ un $\mathcal{D}$-module à gauche libre de rang fini m, et N un sous-$\mathcal{D}$-module de M.

i) Soit π la projection de N sur le m-ième facteur de $\mathcal{D}^m$. Montrer qu'il existe un élément f de N tel que $\pi(N) = \mathcal{D}\pi(f)$. En déduire (au moyen d'une récurrence sur m) que N est libre de rang $n \leq m$.

ii) On admettra pour la suite qu'il existe une base $\{e_1, ..., e_m\}$ (resp. $\{f_1, ..., f_n\}$) de M (resp. N) telle que pour tout $i = 1, ..., n$, $f_i = \delta_i e_i$, où les δ_i sont des éléments non nuls de $\mathcal{D}$ vérifiant $\mathcal{D}\delta_i \cap \delta_i\mathcal{D} \supset \mathcal{D}\delta_{i+1}\mathcal{D}$ pour $i = 1, ..., n-1$. Vérifier ce résultat en supposant que $K = C$ (que peut-on alors dire de l'anneau $\mathcal{D}$?).

3°/ Soit V un K-vectoriel à connexion de dimension m finie sur K.

i) Montrer qu'il existe un sous-$\mathcal{D}$-module N de $\mathcal{D}^m$ tel que $V \simeq \mathcal{D}^m/N$ comme $\mathcal{D}$-module, et que N est de rang $n = m$ sur $\mathcal{D}$.

ii) Déduire de 1^o/ et 2^o/ qu'il existe un élément $\mathcal{L}$ de $\mathcal{D}$ d'ordre m tel que $V \simeq \mathcal{D}/\mathcal{D}\mathcal{L}$.

iii) Soit A une matrice carrée d'ordre m à coefficients dans K. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(K)$ et $\mathcal{L} \in \mathcal{D}$ tel que $P^{-1}AP - P^{-1}\partial P$ soit la matrice compagnon $A_{\mathcal{L}}$ de l'équation différentielle $\mathcal{L}y = 0$.

3. Calculs de groupes de Galois *(équations d'Airy et de Bessel)*

Ici, $K = \mathbf{C}(z)$, et $\partial = d/dz$. On considère l'équation différentielle

$$\partial^2 y + r(z)y = 0 \qquad (*),$$

où $r \in \mathbf{C}[z]$ est un polynôme non nul.

1°/ Montrer que $(*)$ admet une base de solutions $\{y_1, y_2\}$ formée de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$. On désignera désormais par $L = K\{y_1, y_2\}$ l'extension de Picard-Vessiot de K engendrée par ces solutions, par V le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}y_1 \oplus \mathbf{C}y_2$, et par $G \subset Aut(V/\mathbf{C}) \simeq GL_2(\mathbf{C})$ le groupe de Galois différentiel de $(*)$.

2°/ Montrer que le wronskien W de (y_1, y_2) est constant. En déduire que $G \subset SL_2(\mathbf{C})$.

3°/ Soit G^0 la composante neutre de G. On se propose de montrer que $G = G^0$, i.e. que G est connexe.

i) Montrer que si $G \neq G^0$, L contient une extension algébrique de K de degré > 1.

ii) Soit f une fonction méroromorphe sur $\mathbf{C}$. Montrer que si f est algébrique sur K, elle appartient nécessairement à K, et conclure.

4°/ i) On suppose qu'il existe une solution $y \neq 0$ de $(*)$ telle que la droite $\mathbf{C}y$ soit stable sous l'action de G. Montrer $u := \frac{y'}{y} \in K$, et que $u' + u^2 + r = 0$.

ii) On suppose qu'il existe une solution $y \neq 0$ de $(*)$ telle que l'image de la droite $\mathbf{C}y$ sous l'action de G soit formée de deux droites. Montrer $u := \frac{y'}{y} \in K$ est algébrique sur K.

On admettra pour la suite du problème que si G est un sous-groupe connexe propre de $SL_2(\mathbf{C})$, alors

- ou bien il existe une droite D de $V = \mathbf{C}^2$ invariante sour G;
- ou bien il existe un couple $\{D_1, D_2\}$ de droites de V dont la réunion est stable sous G.

5°/ On suppose ici que r est un polynôme de degré impair.

i) Montrer que $G = SL_2(\mathbf{C})$.

ii) Déterminer le degré de transcendance de L sur K, et l'ensemble des relations de dépendance algébrique sur K liant y_1, y_2, y_1', y_2'.

6°/ Dans un ordre d'idées voisin, on considère maintenant l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L} = \partial^2 + \frac{1}{z}\partial + 1.$$

On note encore G son groupe de Galois différentiel.

i) Écrire $z^2\mathcal{L}$ en fonction $\theta = z\partial$. Montrer que 0 (resp. ∞) est une singularité régulière (resp. irrégulière) de $\mathcal{L}$. Calculer l'irrégularité de Malgrange de $\mathcal{L}$ en ∞.

ii) Écrire l'équation $\mathcal{L}y = 0$ sous la forme d'un système différentiel $\theta \begin{pmatrix} y \\ \theta y \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} y \\ \theta y \end{pmatrix}$, et montrer que son groupe de monodromie locale en 0 est engendré par $\exp(2i\pi A(0))$.

iii) En déduire que $\mathcal{L}y = 0$ admet une base de solutions de la forme $J(z), Y(z) := J(z)Logz + R(z)$, où J et R sont analytiques au voisinage de 0. Montrer que J et R se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$.

iv) Montrer que le groupe G est connexe.

v) On se propose de démontrer que $\mathcal{L}$ est un élement irréductible de l'anneau D . Soit $u \in K$ tel que $\theta - u(z)$ divise à droite $z^2\mathcal{L}$ dans $\mathcal{D}$. Montrer que $\theta u + u^2 + z^2 = 0$, et conclure en décomposant u en éléments simples.

vi) Montrer que $G \simeq SL_2$. En déduire que $Log(z)$ n'appartient pas au corps $K(J, \theta J, Y, \theta Y)$, et déterminer le degré de transcendance du corps $K(J, \theta J, R, \theta R)$ sur K.

4. Un système local rigide *(équations hypergéométriques).*

Soient $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ (resp. $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$) des nombres complexes non nuls tels que $\alpha_i \neq \beta_j$ pour tout $i, j = 1, ..., n$.

1°/ Montrer qu'il existe deux matrices A, B dans $GL_n(\mathbf{C})$ admettant respectivement pour valeurs propres les α_i et les β_j, et telles que $A^{-1}B - I_n$ soit de rang 1. (On pourra considérer les matrices companions des opérateurs $\Pi_{i=1,...,n}(\partial - \alpha_i)$ et $\Pi_{j=1,...,n}(\partial - \beta_j)$ -ou leurs transposées.)

2°/ On se propose de montrer que pour tout couple (A', B') vérifiant les propriétés du $1^o/$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP, B' = P^{-1}BP$. Soient V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $a, b \in GL(V)$, de valeurs propres $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ (resp. $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$), tels que $a^{-1}b - id_V$ soit de rang 1.

i) Calculer la dimension de $H = Ker(b - a)$. En déduire qu'il existe un vecteur $v \neq 0$ situé dans $W := \cap_{j=0,...,n-2}\ a^{-j}(H)$.

ii) Montrer que V est une représentation irréductible du groupe $\mathcal{G} :=< a, b >$. En déduire que les $\{a^j(v); j = 0, ..., n-1\}$ forment une base de V.

iii) Montrer que $a^j(v) = b^j(v)$ pour tout $j = 0, ..., n-2$, et conclure.

À conjugaison près, le sous-groupe algébrique G de $GL(V)$ engendré par a et b ne dépend donc que des $\{\alpha_i, \beta_j\}$.

3°/ On suppose ici que les α_i, β_j sont des racines de l'unité.

i) Montrer qu'il existe $H \in GL_n(C)$ telle que $({}^t\overline{A})^{-1} = H^{-1}AH$, $({}^t\overline{B})^{-1} = H^{-1}BH$, et que ${}^t\overline{H}$ vérifie la même propriété.

ii) Déduire de l'irréductibilité de l'action de $\mathcal{G}$ sur V qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que ${}^t\overline{H} = \lambda H$, puis qu'il existe une forme hermitienne non dégénérée h sur V telle que $h(gx, gy) = h(x, y)$ pour tout $g \in \mathcal{G}, x, y \in V$.

4°/ On considère l'opérateur différentiel $\mathcal{L} = z\Pi_{i=1,...,n}(\theta - a_i) - \Pi_{j=1,...,n}(\theta - b_j)$, où $\theta = z(d/dz)$, et les a_i, b_j sont des logarithmes des nombres complexes α_i, β_j.

i) Montrer que $\mathcal{L}y = 0$ admet au moins $n - 1$ solutions analytiques au voisinage de 1 et lin. indép. sur $\mathbf{C}$. (On pourra appliquer le théorème d'indice de Malgrange.)

ii) Calculer les monodromies locales de $\mathcal{L}$ en $\infty, 0$ et 1, et montrer que le groupe de Galois différentiel de $\mathcal{L}$ est isomorphe au groupe G.

iii) On suppose que G est un groupe fini. Montrer que les α_i, β_j sont des racines de l'unité, et que pour tout $\sigma \in Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, la forme hermitienne h_σ attachée aux paramètres $\sigma(\alpha_i), \sigma(\beta_j)$ est définie (positive ou négative).

iv) On suppose que les α_i, β_j sont des racines de l'unité, et que pour tout $\sigma \in Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, la forme hermitienne h_σ attachée aux paramètres $\sigma(\alpha_i), \sigma(\beta_j)$ est définie. Montrer que G est un groupe fini. (On notera que dans une base convenable, tous les coefficients des éléments de $\mathcal{G}$ sont des entiers algébriques.)

Bibliographie

[1. Ouvrages généraux]

E. KOLCHIN: *Selected Works with Commentary*, AMS 1999.

M. van det PUT, M. SINGER: *Galois Theory of LDE*, Springer GTM 328, 2003.

A. MAGID: *Lectures on Differential Galois Theory*, AMS 1996.

[2. Le point de vue tannakien]

P. DELIGNE: pp. 101-228 (avec J. MILNE) in Springer LN 900; pp. 111-195 in Birkhäuser PM 87; pp. 79-297 in MSRI Publ. 16.

[3. Singularités régulières et irrégulières]

P. DELIGNE: *ED à points singuliers réguliers*; Springer LN 163, 1970.

E. POOLE: *Introduction to the Theory of LDE*; Oxford 1936.

W. WASOW: *Asysmptotic expansions...*; New-York, 1965.

J-P. RAMIS: *Filtrations Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot...*; Prep. IMPA, Rio, 1985.

[4. Problèmes de modules]

C. SABBAH: *Déformations isomonodromiques...*; Cours Ec. polytechnique, 2000.

N. KATZ: *Rigid local systems*, Princeton UP 139, 1996.

D. BABBITT, V. VARADARAJAN: *Local moduli...*; Astérisque 169-170, 1989.

[5. Applications]

N. KATZ: *Exponential sums and DE*, Princeton UP 124, 1990.

A. SHIDLOVSKY: *Transcendental numbers*; W. de Gruyter, 1989.

M. AUDIN: *Les systèmes hamiltoniens...*; SMF, Cours spécialisés 8, 2001.

Algorithmique, Intégration formelle, ...: voir le Journal of Symbolic Computation

[6. Extensions de la théorie]

Opérateurs aux (q)-différences, p-dérivations,...: Y. ANDRÉ (Ann. ENS 34, 2001, 685-739); M. van det PUT, M. SINGER (Springer LN 1666); A. BUIUM (Crelle 520, 2000, 95-167), ...

Caractéristique p: B. MATZAT, *Differential Galois Theory in positive characteristic*; Cours Univ. Heidelberg, 2001.

Cas non linéaire: B. MALGRANGE (Ens. math. 38, 2001, 465-501), A. PILLAY (Banach Center Publ. 58, 2002, 189-199 - pour la théorie des modèles, voir aussi H. HRUSHOVSKI, loc. cit., 97-138).