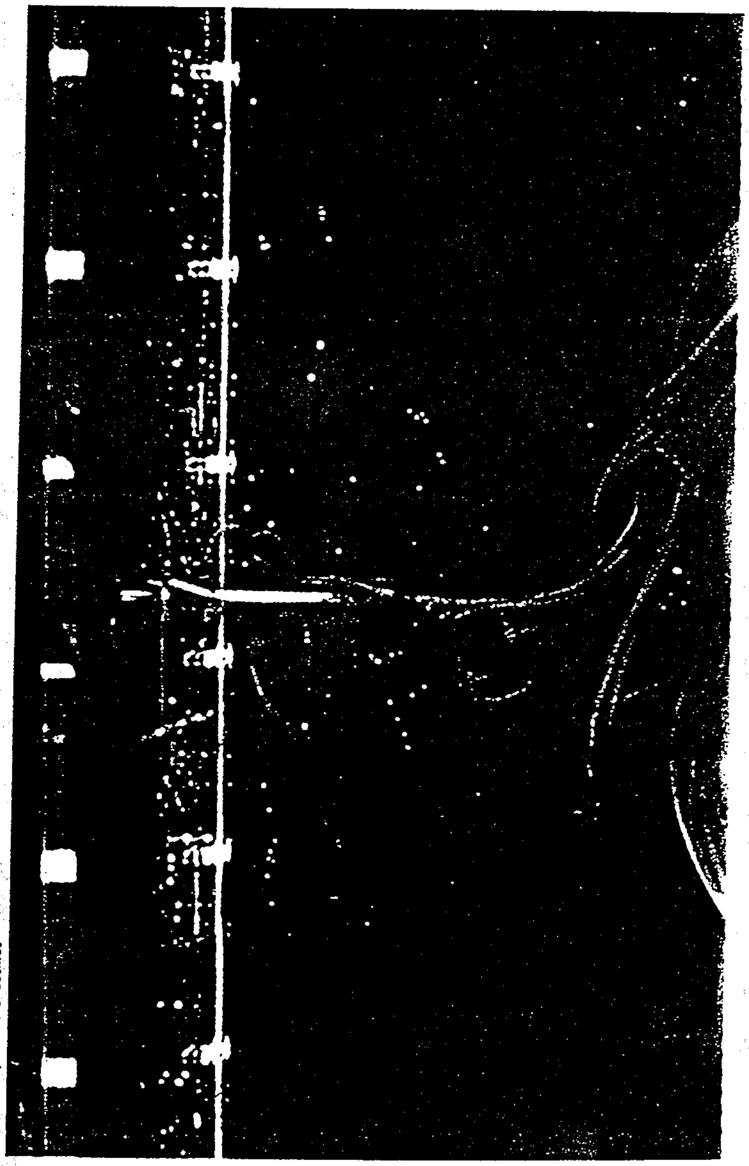
« *Entrons dans un laboratoire*, nous conviait récemment le philosophe et historien des sciences Michel Serres, *et observons l'attitude des scientifiques, les objets qu'ils manipulent.* » Il y a trente ou quarante ans, cela aurait sans doute suffi à nous faire deviner leur discipline : s'ils manipulaient des éprouvettes, c'était des chimistes ; s'ils avaient l'œil rivé au microscope, des biologistes ; s'ils proclamaient n'avoir guère besoin que d'un crayon et de papier, il s'agissait de mathématiciens, voire de physiciens théoriciens... Aujourd'hui, c'est plus difficile. Tous, semble-t-il, passent la majeure partie de leurs journées à pianoter sur un clavier d'ordinateur. Si l'irruption, et surtout la diffusion progressive puis massive de cet outil paraissent maintenant devoir bouleverser la pratique scientifique, peut-on concevoir que l'ordinateur ait eu un impact significatif sur les contenus de la science, l'organisation des disciplines, l'épistémologie ?

Sans doute l'émergence de cette vaste constellation de résultats mathématiques, de pratiques de modélisation des phénomènes du monde, de leur simulation et de leur exploration expérimentale qu'on a désignée sous le nom de chaos déterministe, fournit-elle un exemple flagrant de l'impact conceptuel qu'ont pu avoir les outils de calcul modernes sur la science la plus théorique. Impensable sans l'ordinateur, le chaos ? Les techniques mathématiques mobilisées dans la constitution de ce champ disciplinaire, appelé à connaître une popularité spectaculaire, tant chez les spécialistes qu'au sein d'un large public, remontent souvent à près d'un siècle. Il ne semble pas impossible, *a posteriori*, d'imaginer une théorie du chaos sans l'ordinateur. Mais il faut admettre que le phénomène n'aurait pas pu se produire sans la disponibilité croissante de cet outil.

Qu'est-ce, au juste, que le chaos déterministe ? On ne s'aventurera pas ici à esquisser une définition trop précise, car elle fait encore l'objet de controverses. Un certain consensus s'est toutefois établi : on considère généralement comme chaotique le comportement d'un système (mathématique, physique, biologique...) qui, bien qu'exactement gouverné par une loi déterministe (c'est-à-dire qui ne laisse nulle place au hasard dans sa formulation), reste aussi imprévisible qu'une suite de nombres tirés à la loterie. Le problème, c'est qu'on n'a presque jamais accès aux lois de la nature directement. La question de savoir si un comportement stochastique, c'est-à-dire aléatoire, est dû au hasard ou à une équation de type chaotique a ainsi pu sembler relever de la métaphysique. Certaines caractéristiques se sont pourtant imposées en tant que diagnostiques. Il existe des cas d'équations déterministes, par exemple, qui donnent lieu à des évolutions à long terme divergeant du tout au tout, quand bien même on leur attribue des conditions initiales extrêmement proches. C'est cette propriété que le physicien David Ruelle, de l'Institut des hautes études scientifiques (IHÉS) de Bures-sur-Yvette, a appelé la sensibilité aux conditions initiales.

Avec la publication, en 1987, de son *best-seller*, *La Théorie du chaos*, James Gleick a rendu populaire un épisode frappant de la découverte de cette propriété : celui vécu par l'Américain Edward Lorenz. En 1961, alors qu'il tentait de répéter la simulation numérique d'un système météorologique très simplifié, et ayant introduit cette fois des valeurs arrondies, il obtenait des résultats totalement différents. Il a, plus tard, traduit cette découverte par une image appelée à devenir célèbre : celle d'un papillon qui, battant de l'aile au Brésil, changeait les conditions atmosphériques de telle sorte qu'un mois plus tard une tornade ravageait le Texas.

Richement illustré d'images de synthèse, le livre de Gleick s'enthousiasme pour la « révolution » que représente cette irruption de l'ordinateur dans la modélisation mathématique. On y suit les tâtonnements du physicien américain Mitchell Feigenbaum sur sa calculette de poche. On est époustouflé par les images qui nous plongent dans les infimes détails de l'ensemble fractal de Mandelbrot. On sympathise avec les doctorants du Dynamical Systems Collec-



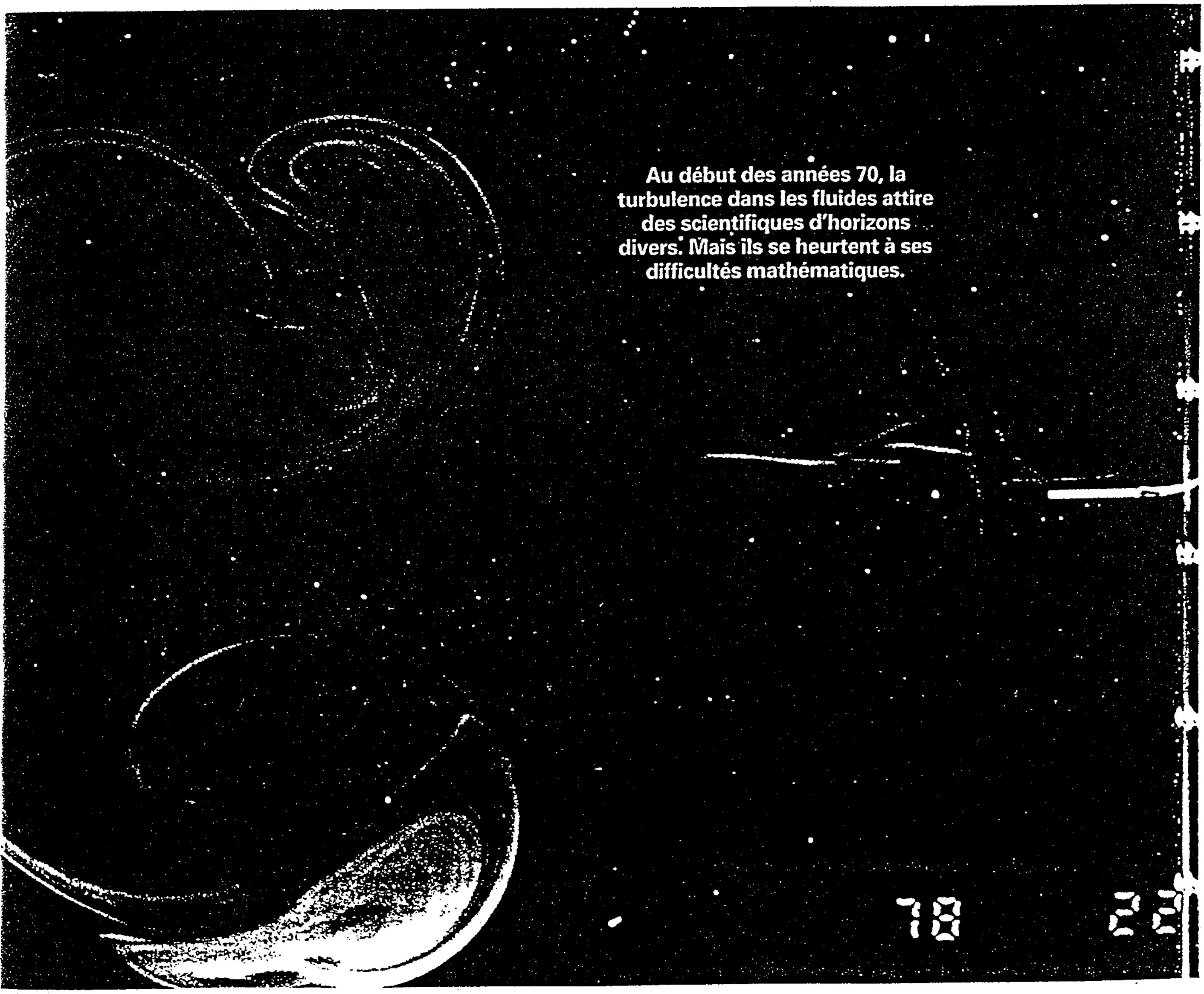
C. VAN HEIST & J. FLOR - SPL - COSMOS

tive de Santa Cruz, alors qu'ils tentent de faire valoir le bien-fondé de leurs recherches numériques et expérimentales sur les fuites d'un robinet... Autant d'exemples dans lequel l'ordinateur émerge comme un outil légitime de la recherche scientifique. Ce qui n'était pas le cas jusque-là. « *Dans les années soixante*, affirme Gleick, *presque aucun scientifique n'avait confiance dans les ordinateurs.* » La révolution du chaos, selon cette interprétation, est la conséquence de l'irruption massive de cet instrument dans le paysage de la science.

Un accueil glacial

Il y a certainement une part de vérité dans cette présentation de l'histoire du chaos. En particulier, il semble clair qu'une majorité de mathématiciens ne prêtait guère d'intérêt au développement de l'ordinateur à l'époque des travaux de Lorenz. Ces années marquaient l'apogée d'une idéologie des mathématiques pures, à laquelle le nom le plus souvent associé est celui de Bourbaki. Sous ce pseudonyme – regroupant quelques-uns des plus grands mathématiciens français, puis américains – fut entreprise la publication d'un ambitieux traité visant à reprendre les mathématiques à leur début, et à édifier sur des bases structurales simples l'ensemble du domaine. Mais surtout, Bourbaki défendait une image des mathématiques détachées des soucis d'application et des impératifs du calcul.

Cette image d'une mathématique à la recherche, sinon d'une vérité absolue, du moins d'une consistance interne sans faille, offrait peu de place à l'ordinateur et à son lot d'incertitudes. Qui plus est, la propriété de sensibilité aux conditions initiales ne suscitait guère de surprise chez les mathématiciens. On se souvenait qu'elle avait été identifiée dès la fin du XIX^{e} siècle par les mathématiciens français Henri Poincaré et Jacques Hadamard, pour ne citer qu'eux. En 1908, Poincaré écrivait : « *Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux* [...]. *La prédiction devient impossible* ». Cette connaissance n'était pas tombée totalement dans l'oubli : les techniques mathématiques imaginées par Poincaré pour l'étude de la stabilité du système solaire, celles développées par Hadamard pour éta-



Au début des années 70, la turbulence dans les fluides attire des scientifiques d'horizons divers. Mais ils se heurtent à ses difficultés mathématiques.

intelligibles. » Basés sur la topologie, ses modèles ne peuvent être, selon ses dires, que qualitatifs ; ils ne fournissent pas de prédictions chiffrées contrôlables expérimentalement.

Autour de Thom, plusieurs topologues s'intéressent alors à l'extension de leur pratique à d'autres domaines. Ainsi Christopher Zeeman produit-il, dès 1965, de nombreux modèles [4] qui, dans la seconde moitié de la décennie suivante, propulseront la théorie des catastrophes dans les médias. D'autres topologues, tout en restant sceptiques vis-à-vis de la théorie des catastrophes, voient, dans l'approche de Thom, une façon d'utiliser leurs outils afin de modéliser la nature : Smale, par exemple, conçoit des modèles d'économie, tandis que l'Américain Ralph Abraham fait de l'approche thomienne la pierre angulaire d'un livre influent de mécanique céleste (*Foundations of Mechanics*). Tout un ensemble de pratiques de modélisation s'attachant à l'étude des phénomènes naturels à l'aide de notions topologiques émerge alors. Et grâce à l'IHÉS, quoique la philosophie thomienne soit largement repoussée, ces pratiques vont être reprises et transformées par des physiciens.

En 1968, David Ruelle, collègue de Thom à l'IHÉS, commence à s'y intéresser. Dans un article qu'il cosigne avec le jeune mathématicien hollandais Floris Takens, il propose une explication, uniquement mathématique, pour l'apparition de la turbu-

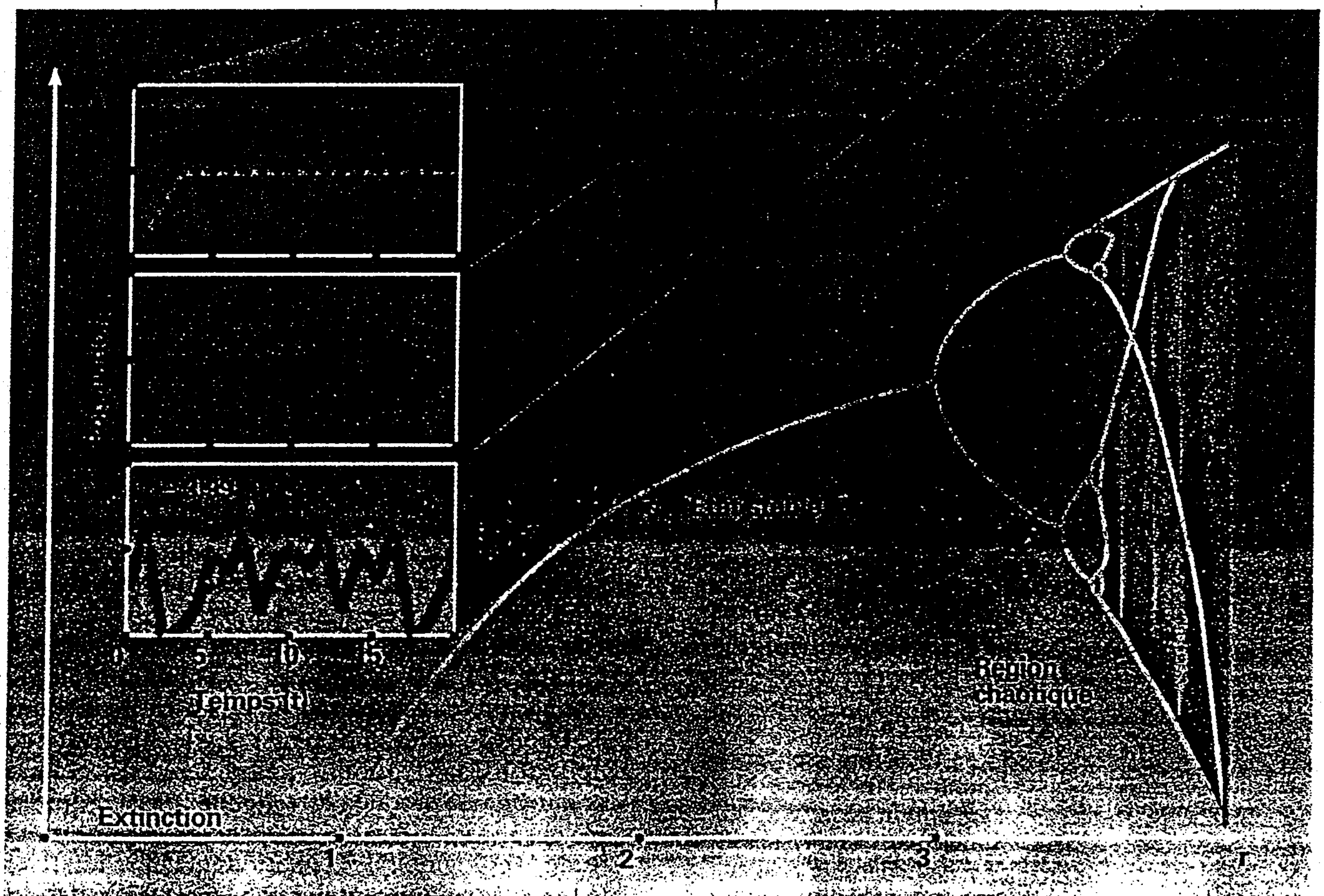
4 – Entre autres, sur l'agressivité du chien, les émeutes dans les prisons, le comportement politique des sociétés, le cœur, les influx nerveux...

Régime chaotique en écologie des populations

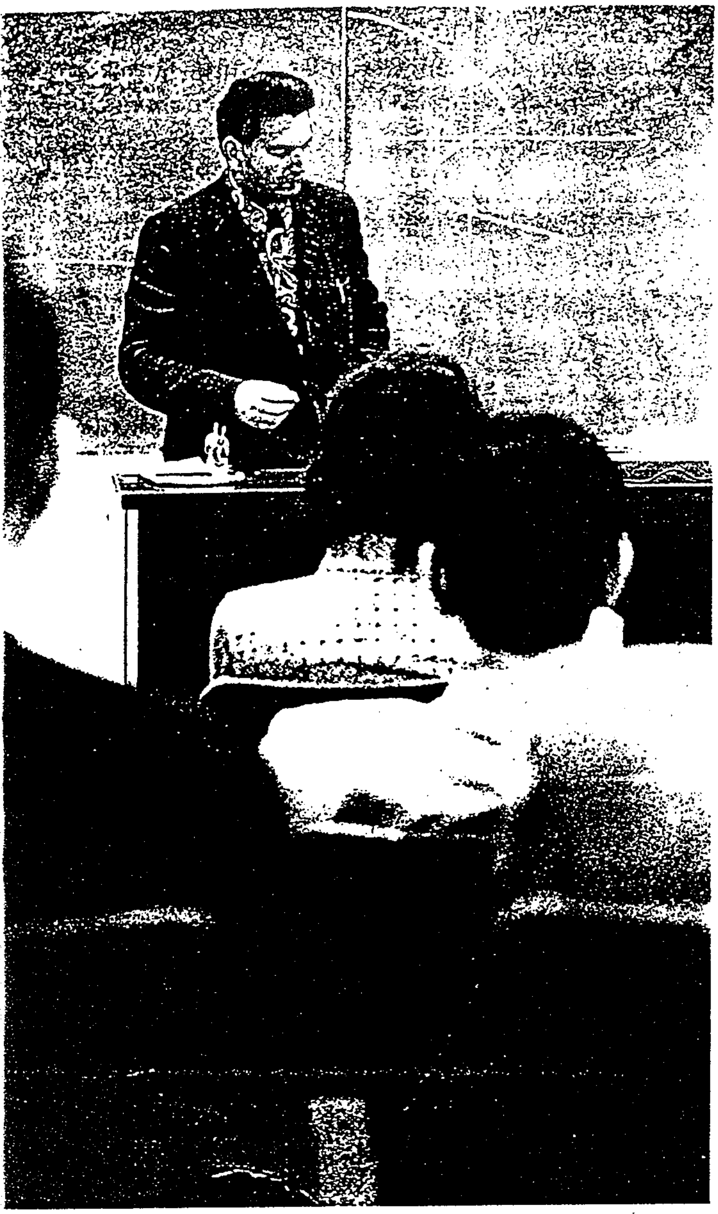
Pour modéliser divers phénomènes, comme par exemple l'évolution d'une population animale d'une année sur l'autre, on peut introduire une variable x_i représentant le nombre d'individus à l'année *i*. Une équation récurrente simple, appelée équation logistique, peut servir de modèle rudimentaire permettant de rendre compte de l'évolution d'une population qui croît naturellement tout en restant soumise aux limites de son environnement :

$$x_i + 1 = rx_i (1-x_i)$$

Étant donné un tel système, on cherche à déterminer autour de quel nombre la population tendra à se stabiliser, et on s'aperçoit que le régime stable vers lequel le système tend, son *attracteur*, change radicalement de structure selon la valeur du paramètre *r*. Pour *r* petit, le système approche rapidement une population stable quelle qu'elle soit à l'origine ; pour des valeurs un peu plus grandes, il oscille entre différentes quantités (au nombre de 2, 4, 8, etc.), tandis que pour toute une gamme de valeurs de *r* encore plus grande (mais pas toute), la population ne se stabilise jamais. C'est ce régime que Li et Yorke ont, les premiers, qualifié de « chaotique ».



DESSIN D. GALLAND - SOURCE : J. GLEICK, *CHAOS*



DR - MEMORIAL UNIV. OF NEWFOUNDLAND

Un langage fédérateur

René Thom publie en 1972 une méthode mathématique, basée sur la topologie, pour décrire la naissance et l'évolution des formes. Appelée théorie des catastrophes, elle servira à modéliser les phénomènes de la nature.

blir l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles, furent à la base de recherches se poursuivant tout au long du XX^e^ siècle. Elles préparaient l'émergence du chaos (voir l'article d'Amy Dahan dans ce numéro).

Jusqu'au milieu des années 1970, il ne saurait cependant être question de chaos. Ce n'est d'ailleurs qu'après 1975 que s'impose ce terme. Il est introduit par les chercheurs en mathématiques appliquées James Yorke et Tien-Yien Li (voir l'encadré ci-contre). Au moins trois axes de recherche se rejoignent alors, qui puisent leurs sources dans les décennies précédentes : l'étude mathématique (et surtout topologique) des systèmes dynamiques, celle de la turbulence dans les fluides et celle de trajectoires non périodiques à l'aide de l'ordinateur. L'étiquette « chaos » est dès lors appliquée au champ de recherche qui émerge de cette convergence.

C'est grâce au mathématicien René Thom, créateur de la célèbre théorie des catastrophes, que fut développé le premier axe de recherche. Il s'agissait d'utiliser les outils de la topologie – une branche des mathématiques née de l'étude des propriétés géométriques se conservant par déformation continue [1] – afin de modéliser les phénomènes de la nature.

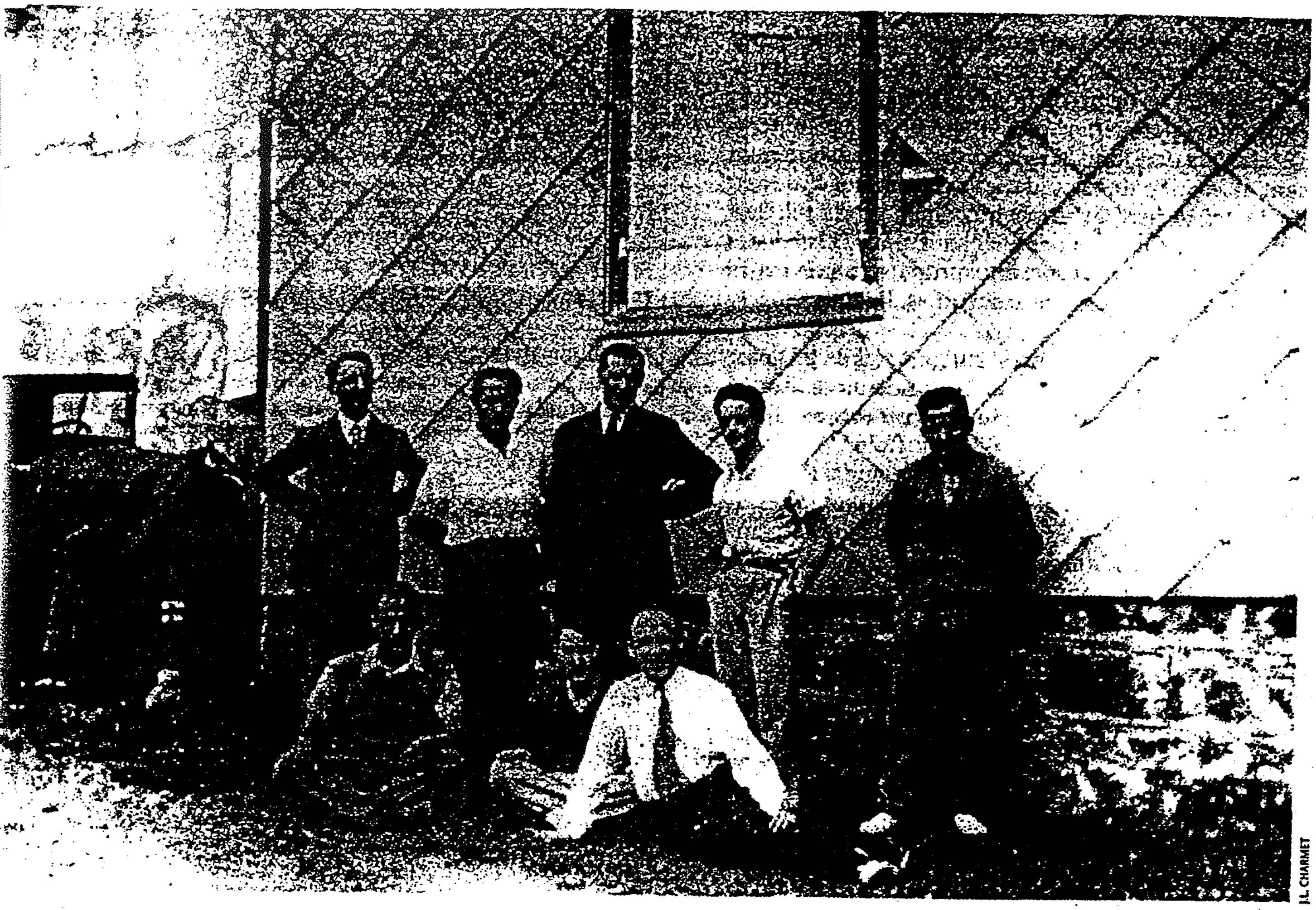
En arrivant à l'IHÉS en 1963, Thom trouve un environnement favorable à une réflexion indépendante, à l'échange d'idées, à la constitution d'équipes, et à l'exploration des conséquences concrètes de ses théories topologiques. Au départ, son programme reste très abstrait : il souhaite classifier les fonctions réelles par rapport à l'un de leurs caractères topologiques, à savoir leurs singularités [2]. Mais en 1956, déjà, dans sa présentation au séminaire Bourbaki, il insiste sur la distinction entre deux types de singularités selon qu'elles sont, ou non, stables, c'est-à-dire qu'elles subsistent ou non lorsqu'on déforme suffisamment peu la fonction. Il accorde de ce fait une grande importance, d'abord d'un point de vue méthodologique, puis philosophique, au concept de stabilité structurelle [3]. Supposée générique, cette propriété va permettre la conception parallèle de programmes de classification topologique des catastrophes par Thom, et des systèmes dynamiques par le mathématicien américain Stephen Smale.

Le modèle des catastrophes

De fait, ces recherches mathématiques ont rapidement d'autres buts que la classification d'objets abstraits. « *A côté de l'Analyse classique, essentiellement linéaire,* déclare Thom en 1966, *il y a le domaine pratiquement inexploré de l'analyse non linéaire ; là, le topologue peut espérer encore mieux utiliser ses méthodes, et peut-être sa qualité essentielle, à savoir la vision intrinsèque des choses.* » D'ailleurs, au début des années 60, il s'engage dans des expériences d'optique et envisage l'application de sa théorie à l'étude du développement embryologique. Dès 1965, il prépare un manuscrit qui circule sous le manteau. Véritable manifeste de la théorie des catastrophes, il sera publié en 1972, sous le titre de *Stabilité structurelle et morphogenèse*.

« *Le modèle des catastrophes est à la fois beaucoup moins, et beaucoup plus qu'une théorie scientifique,* écrira Thom ; *on doit le considérer comme un langage, une méthode, qui permet de classifier, de systématiser les données empiriques, et qui offre à ces phénomènes un début d'explication qui les rende*

1 – Elle s'impose au début du siècle, notamment avec Poincaré.
2 – Les singularités d'une fonction représentent les points où les dérivées de celle-ci s'annulent.
3 – Ce concept est introduit en 1937 par les mathématiciens russes Andronov et Pontrjagin. Lorsqu'on perturbe une fonction qui est structurellement stable, qu'on la déforme, on constate, autour des singularités, une relation inversible entre la fonction originale et la fonction perturbée.



J.L. CHARMET

Mathématiciens purs et durs

Les années 60 sont marquées par l'idéologie des mathématiques pures, introduite avant-guerre par le groupe Bourbaki (pseudonyme collectif de mathématiciens français). Peu de place est alors faite à l'ordinateur.

E. BOUBAT - TOP

La physique s'en mêle

S'inspirant de l'approche topologique de Thom, David Ruelle propose, en 1968, une explication mathématique pour l'apparition de la turbulence. Les physiciens se penchent de près sur ses travaux.

lence. Celle-ci ne serait pas due au bruit, mais à la stabilité structurelle des attracteurs étranges qui, non périodiques, devraient pouvoir s'observer expérimentalement (voir l'encadré ci-contre). Or, en ce début des années 1970, des groupes de scientifiques d'horizons très divers s'intéressent à la turbulence, chacun avec leurs propres théories et expériences.

Alors qu'ils accumulent des données expérimentales sur le passage contrôlé de l'état stable à turbulent de systèmes assez simples (système de Taylor-Couette, de Rayleigh-Bénard, etc.), des hydrodynamiciens se heurtent ainsi aux difficultés mathématiques de la théorie non linéaire. D'un autre côté, sous l'égide d'Ilya Prigogine, des thermodynamiciens rapprochent ces exemples des « structures dissipatives » qu'ils ont l'habitude d'étudier en chimie. Enfin, des physiciens spécialisés dans l'étude des phénomènes critiques, des transitions de phase, ou des cristaux liquides, s'approprient la turbulence, champ d'étude dans lequel ils espèrent pouvoir faire usage de nouvelles techniques théoriques et expérimentales qui leur sont propres. Sous l'impulsion d'une véritable idéologie de l'interdisciplinarité, les physiciens se saisissent peu à peu des travaux de Ruelle sur les systèmes dynamiques pour en faire leur langage de prédilection.

Vers 1975, tandis que les recherches concernant l'étude topologique des équations et celles relatives à la turbulence finissent par converger, est redécou-

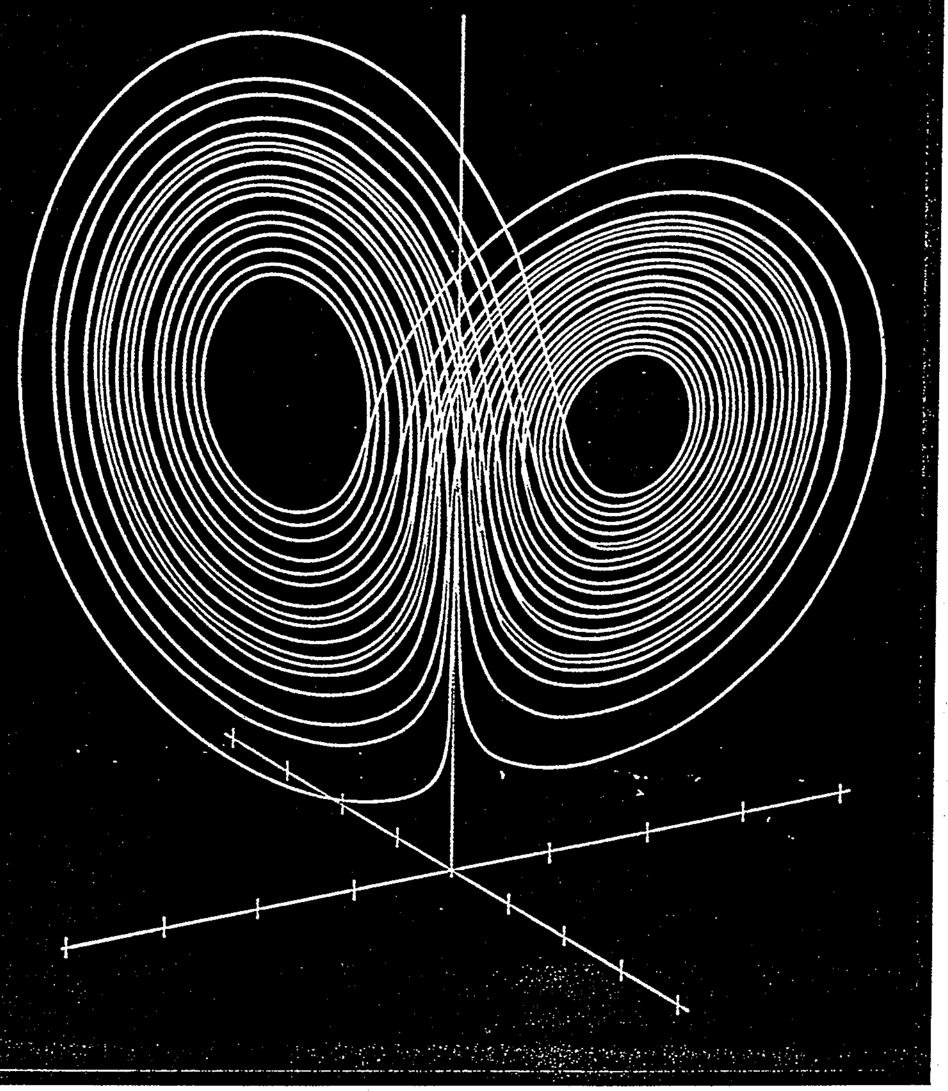
Système de Lorenz et attracteurs étranges

À la recherche d'un système simple qui produirait des solutions non périodiques, le météorologue Edward Lorenz introduira un système d'équations différentielles qui représente une simplification extrême du phénomène de la convection dans les fluides. Les variables *x*, *y* et *z* sont des fonctions du temps *t* qui sont liées entre elles par des équations non linéaires.

$$dx/dt = -10dx + 10y,$$
$$dy/dt = -xz + 28x - y,$$
$$dz/dt = xy - 8/3z.$$

C'est en voulant visualiser la trajectoire des solutions dans l'espace à trois dimension (*x, y, z*) qu'il produira son second « papillon » qui deviendra également un emblème pour les explorateurs du chaos. Ce papillon à la structure très compliquée (il ne s'intersecte jamais) représente le régime stable vers lequel tend le système. Il s'agit donc d'un attracteur qui possède une structure de type fractal et qu'on qualifiera d'étrange (ce qui d'ailleurs n'a été démontré que très récemment).

DESSIN D. GALLAND - SOURCE : J. GLEICK, CHAOS



vert le système de Lorenz. A Berkeley, le groupe de Smale tente d'appliquer ses outils topologiques à son étude. Sans doute n'est-ce pas dû au hasard : l'approche topologique repose en effet sur le besoin vaguement ressenti de faire face au défi posé par l'ordinateur. D'ailleurs, pour comprendre la portée des travaux du météorologue, un imposant arsenal mathématique est nécessaire (voir ci-dessus). Grâce à la disponibilité croissante de puissants outils de calcul, la construction d'une solution explicite à une équation différentielle ne pose plus de problèmes. Mais l'interprétation du résultat n'est pas immédiate : en 1964, déjà, Ruelle se demandait lequel de l'ordinateur ou du chercheur serait l'outil de l'autre. Il en concluait que les techniques servant à l'étude rigoureuse de la physique théorique devaient être modifiées.

Si l'émergence du chaos déterministe apparaît comme la conséquence d'une convergence, les causes de celle-ci sont multiples. Alors que leur utilité sociale est remise en cause [5], les mathématiciens cherchent une nouvelle légitimité à leur entreprise. Parallèlement, les physiciens qui s'attaquent au problème de la turbulence, tout comme les scientifiques confrontés aux résultats numériques que l'ordinateur produit en quantité, perçoivent l'intérêt de l'approche topologique développée par Thom et Smale comme langage fédérateur entre les disciplines. Enfin, dans les milieux intellectuels français, le début des années soixante-dix est marqué par le sentiment d'une crise de la science. Les vieilles certitudes sont ébranlées par le tumulte soixante-huitard.

Dans ce contexte, la théorie des catastrophes apparaît comme une planche de salut et est accueillie avec enthousiasme par des intellectuels comme François Lyotard, Michel Serres ou Edgar Morin. Au rejet de la vague structuraliste dans les sciences humaines, s'associe une réévaluation du modèle bourbakiste et de l'idéologie des mathématiques pures. Mais ce qui est alors proposé vise plus à changer la science qu'à la rejeter en bloc. Offrant de nouvelles façons de penser la dialectique de l'ordre et du désordre, le chaos s'inscrit donc pleinement dans cette mutation des savoirs. ■

5 – En 1967, on peut ainsi lire dans le *Washington Star* : « Que peut faire Stephen Smale que ne peut faire beaucoup plus rapidement un ordinateur ? »