

Des fronts d'onde en topologie

Emmanuel Ferrand

Différentes notions de « front d'onde », plus ou moins reliées entre-elles, interviennent dans divers champs de la physique et des mathématiques (en particulier en analyse microlocale). Il ne sera question ici que de la version la plus naïve, celle issue du principe de Huygens (1629-1695), mais que l'on développera dans une direction peut-être inattendue, celle de la topologie différentielle et de la théorie de nœuds. Nous évoquerons au passage la géométrie différentielle extrinsèque de courbes et des surfaces, les notions d'enveloppe et de contour apparent, les diagrammes de bifurcation, la transformée de Legendre,...

L'essentiel de ce qui est résumé ci-dessous est exposé avec beaucoup plus de brio par V.I. Arnold dans une multitude de publications, en particulier [Ar1]. Je souhaite juste montrer ici la continuité entre ces considérations élémentaires et des questions nettement plus pointues et récentes en topologie *de contact*.

1. Propagation des équidistantes

1.1. Le retournement de l'ellipse

Dans un milieu homogène isotrope représenté par le plan euclidien, on peut, en suivant Huygens, modéliser un phénomène de propagation en considérant la famille des courbes dites *équidistantes* à une courbe donnée, sur laquelle on aura choisi un côté (i.e. une coorientation), pour indiquer le sens de la propagation. Cette courbe initiale représentera le « front d'onde » au temps $t = 0$, la courbe équidistante à distance t du côté indiqué, le *front d'onde* au temps t .

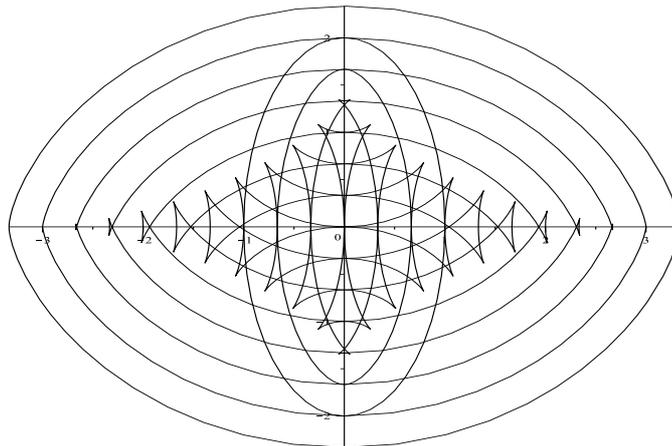


FIG. 1. Le retournement de l'ellipse.

Déterminer les courbes équidistantes revient par définition à considérer l'ensemble des points extrémités de segments de longueur t , perpendiculaires à la courbe initiale. Supposons par exemple que la courbe initiale soit une ellipse, avec une propagation vers l'intérieur. On voit que lorsque t est petit, cette courbe équidistante est une courbe convexe, lisse. Mais, en un temps fini, ce processus de propagation développe des singularités.

Le calcul montre que lorsque t est égal au rayon de courbure en un point de la courbe initiale, alors l'équidistante correspondante est singulière au point « image ». Dans le cas de l'ellipse, ces singularités sont des points de rebroussement de première espèce, sauf lorsque t est égal à un des extrema du rayon de courbure.

Au cours de la propagation, l'ensemble des points singuliers décrit donc le lieu des centres de courbure, i.e. la développée de l'ellipse, qui elle-même est une courbe plane singulière (une sorte d'astroïde à 4 pointes).

Écrire explicitement les calculs pour cet exemple est un exercice simple mais instructif sur la théorie des courbes paramétrées. Mais on peut aussi décrire les équidistantes de la manière suivante, qui mélange le paramétré et l'implicite : Soit $\gamma : S^1 \mapsto \mathbb{R}^2$ notre courbe initiale supposée régulière, paramétrée par un angle $w \in S^1$. Notons $F(Q, w)$ la distance entre un point Q du plan et le point $\gamma(w)$ de la courbe. Le point Q est l'extrémité d'un segment de longueur $t > 0$, orthogonal à la courbe, si et seulement si $F(Q, w) = t$ et si de plus w est un *point critique* pour la fonction $w \mapsto F(Q, w)$. Ainsi, l'ensemble Γ_t , donné par la formule suivante :

$$\Gamma_t = \{Q \in \mathbb{R}^2, \exists w \in S^1, F_t(Q, w) = 0, \frac{\partial F_t}{\partial w}(Q, w) = 0\},$$

où l'on a posé $F_t(Q, w) = F(Q, w) - t$, est l'union des deux équidistantes à distance t , correspondant à chacun des cotés de la courbe.

1.2. Le front d'onde

Le même genre de calcul peut se faire pour déterminer les hypersurfaces équidistantes d'une sous-variété N immergée dans une variété riemannienne M , de dimension n quelconque. On aboutit, modulo quelques hypothèses, à une formule du type suivant, dans laquelle F est une fonction définie sur le produit $M \times N$.

$$\{Q \in M, \exists w \in N, F(Q, w) = 0, \frac{\partial F}{\partial w}(Q, w) = 0\}$$

Pour qu'une telle formule ait un sens, il n'est pas nécessaire de disposer d'une immersion de N dans M , ni même que la dimension de N soit inférieure à celle de M . Il suffit d'avoir deux variétés lisses M et N et une fonction définie sur le produit. *Un front d'onde sera ici un sous-ensemble de M défini localement par une formule de ce type.*¹

Nous allons dans la suite considérer diverses constructions issues de contextes variés, qui font apparaître de tels fronts d'ondes.

¹ même s'il n'est plus question d'onde du tout !

2. Quelques autres exemples classiques

2.1. Enveloppes et principe de Huygens

Dans les livres de géométrie différentielle traditionnelle on apprend que, étant donné une famille de courbes γ_λ dans le plan, indexées par $\lambda \in I$ pour un certain intervalle I et définies implicitement par une équation $\gamma_\lambda = \{Q \in \mathbb{R}^2, F(Q, \lambda) = 0\}$, on peut en définir l'enveloppe E , par la formule suivante :

$$E = \{Q \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda \in I, F(Q, \lambda) = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda}(Q, \lambda) = 0\},$$

ce qui montre qu'une enveloppe est un front d'onde.

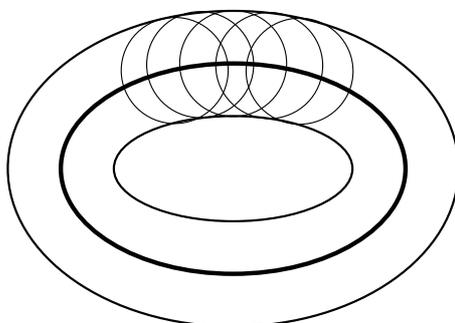


FIG. 2. Les équidistantes comme enveloppes de cercles.

Ce n'est pas une surprise, les questions de propagation ne sont pas très loin. Si l'on revient à la formule 1.1 pour les équidistantes d'une courbe, on s'aperçoit que l'ensemble Γ_t est l'enveloppe de la famille des cercles de rayon t , centrés sur la courbe initiale γ . C'est une version du *principe de Huygens*, selon lequel une source compliquée (ici la courbe initiale γ) est équivalente à la superposition de sources ponctuelles placées en chaque point de la source, émettant des fronts d'onde circulaires.

2.2. Contours apparents

Considérons maintenant une surface N dans \mathbb{R}^3 . Fixons un axe privilégié « vertical », et considérons la projection sur le plan horizontal, orthogonal à cet axe. Lorsqu'on regarde N (que l'on suppose fabriquée dans un matériau plus ou moins translucide) depuis la direction verticale, on en voit le *contour apparent*, c'est-à-dire la trace sur le plan de projection de l'ensemble des points de N où le plan tangent à N contient la direction de projection.

En géographie, si N est le graphe de la fonction altitude et si de plus l'axe appelé « vertical » ci-dessus est celui (plutôt horizontal) de notre regard dans un paysage de collines, la ligne d'horizon est une partie seulement du contour apparent, les collines n'étant pas translucides.

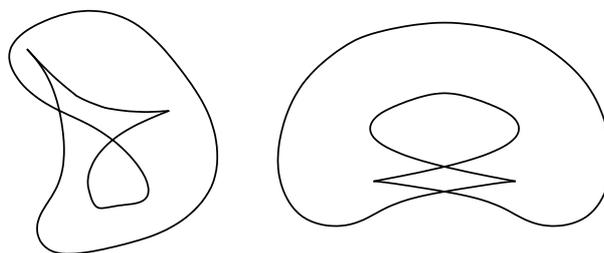


FIG. 3. Deux contours dans le plan de tores immergés dans \mathbb{R}^3 .
Exercice : retrouver les immersions correspondantes.

Si N est donnée implicitement par une équation régulière

$$F(x, y, z) = 0,$$

le plan tangent contient la direction verticale si et seulement si

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

(le gradient de F , qui est orthogonal au plan tangent, est alors horizontal).

Le contour apparent est alors donné par

$$\{(x, y), \exists z, F(x, y, z) = 0, \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0\}.$$

Il s'agit donc bien d'un front d'onde au sens de 1.2. Il n'y a pas de raison de se limiter au cas d'une surface dans l'espace tridimensionnel, on peut définir de manière similaire le contour apparent pour une sous-variété dans un produit ou dans l'espace total d'un fibré.

2.3. Bifurcations de valeurs critiques

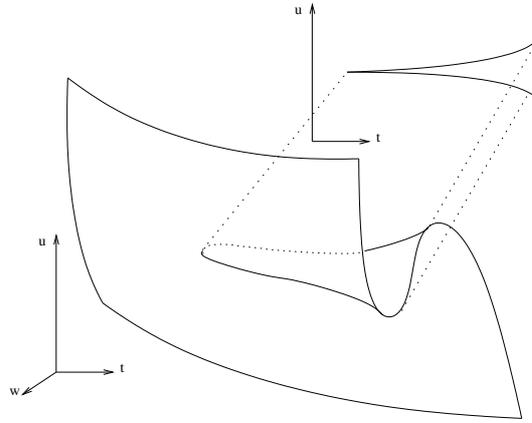
Considérons une famille f_t de fonctions d'une variable réelle w , paramétrée par t dans un intervalle I . Le *diagramme de bifurcation des valeurs critiques* est le sous-ensemble de $I \times \mathbb{R}$ constitué des couples (t, u) tels que u soit un extremum local. C'est l'ensemble

$$\{(t, u), \exists w, f_t'(w) = 0, u = f_t(w)\}$$

Si l'on pose $F(t, u, w) = u - f_t(w)$, on voit que cet ensemble est encore un front d'onde, au sens de 1.2. C'est aussi le contour apparent du graphe de la fonction $(t, w) \mapsto f_t(w)$, projeté sur le plan (t, u) .

Par exemple, pour $f_t(w) = w^3 - tw$, le diagramme de bifurcation est un point de rebroussement de première espèce.

Remarque. La *transformation de Legendre* s'inscrit dans ce contexte. Considérons une fonction g d'une variable réelle w , et la famille de fonctions paramétrée par $t \in \mathbb{R}$ définie par $f_t(w) = tw - g(w)$. Le diagramme de bifurcation des valeurs critiques de cette famille est constitué de tous les extrema

FIG. 4. Bifurcations des extrema de $w \mapsto w^3 - tw$.

locaux. Supposons g convexe quadratique hors d'un compact. Chaque fonction f_t possède alors un maximum global. Si pour tout t on sélectionne ce maximum dans le diagramme de bifurcation, on obtient une fonction continue, en général non lisse, et dont le graphe est un sous-ensemble du diagramme de bifurcation. Nous verrons plus loin (3.3) comment dépasser certaines difficultés liées à cette non-différentiabilité. Ce point de vue « front d'onde » peut être utile, par exemple en thermodynamique classique, pour clarifier des diagrammes de phase (voir Thom [Th], et aussi les travaux de F. Aicardi [AFV]).

2.4. Valeurs critiques, suite

La notion de valeur critique permet en fait d'unifier tout ce qui précède. Soient N et M deux variétés lisses, et une application lisse $\varphi : N \rightarrow M$. Le contour apparent dans M du graphe de φ , $G \subset N \times M$, n'est pas autre chose que l'ensemble W_φ des *valeurs critiques* de φ , c'est-à-dire l'ensemble des points de l'image de φ , image d'un point où la différentielle de φ est de rang inférieur à $\dim(M)$.

$$W_\varphi = \{Q \in M, \exists w \in N, Q = \varphi(w), \dim(D\varphi_w(T_w N)) < \dim(M)\}$$

Par exemple, si $\dim(N) < \dim(M)$, tous les points de l'image sont critiques, et W_φ s'identifie avec l'image de φ .

2.5. Singularités

Les exemples de fronts d'onde rencontrés jusqu'ici présentaient en général des singularités. Cette formulation en termes de valeurs critiques permet d'utiliser toutes les ressources de la théorie des singularités, et d'identifier ces singularités dans les cas génériques.

Il résulte de la théorie d'Arnold (voir, par exemple, [AGV] et [Ar2]) qu'un front d'onde sur une surface est génériquement une courbe présentant des points de rebroussement de première espèce et des points doubles transverses isolés (voir

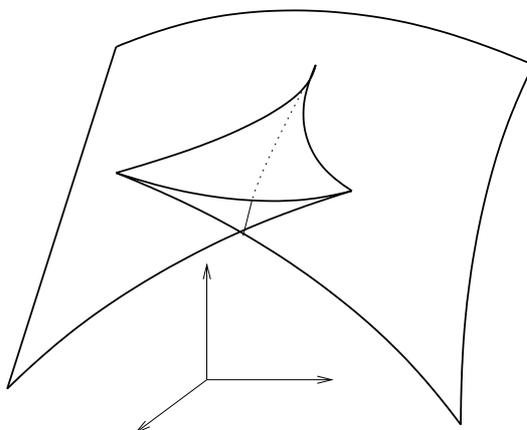


FIG. 5. Au voisinage d'une queue d'aronde.

les contours de la figure 2.2). Un front d'onde dans l'espace est génériquement une surface présentant des lignes de points de rebroussement et de points doubles transverses, des queues d'aronde et des points triples isolés.

3. Singuliers mais pas trop : le point de vue de contact

3.1. La structure de contact

Une meilleure compréhension des fronts d'ondes génériques provient de l'introduction d'un ingrédient supplémentaire, *la structure de contact*. Revenons provisoirement au cas des fronts d'onde dans le plan euclidien. Un *élément de contact* est la donnée d'un point du plan et d'une droite passant par ce point. L'ensemble E des éléments de contact du plan est donc de dimension 3, c'est le produit du plan par l'espace projectif réel de dimension 1 (qui est un cercle).

L'ensemble E nous parvient naturellement muni d'un *champ de plan*, obtenu par la construction « tautologique » suivante. Représentons un élément $e \in E$ par un couple $e = (Q, D)$, où Q est un point du plan, et D une droite passant par Q . Soit ξ_e le plan de l'espace tangent à E en e , qui contient la direction tangente à la fibre (le cercle) au dessus de Q , et qui, dans la direction « plane », contient la droite D .

Ce champ de plans est *la structure de contact naturelle de E* . Une courbe lisse immergée dans le plan se relève naturellement à E en associant à chaque point de la courbe la tangente passant par ce point. Ainsi, s'il y a un croisement normal, ce relèvement fournit deux points distincts dans la fibre au dessus du point double. Si la courbe n'est plus immergée, mais possède des rebroussements de première espèce, elle se relève aussi, car, à défaut de vecteur vitesse, il existe au point singulier une droite tangente bien définie. Enfin si la courbe est un front d'onde générique (immersion à croisements transverses en dehors de points de rebroussement de première espèce isolés, voir 2.5), la courbe relevée est plongée : c'est un *entrelacs* dans E .

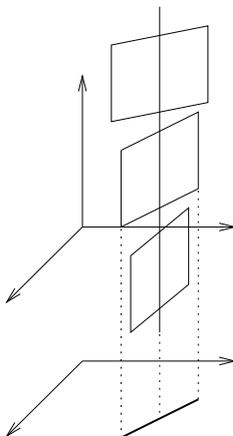


FIG. 6. Le fibré des éléments de contact du plan et son champ d'hyperplans naturel.

La courbe relevée possède par construction une propriété remarquable : elle est partout tangente au champ de plans ξ . On dit qu'elle est *legendrienne*. Un front d'onde générique se relève en un entrelacs legendrien, et réciproquement, un entrelacs legendrien générique se projette sur un front d'onde générique.

3.2. L'espace des 1-jets de fonctions $J^1(\mathbb{R})$

Fixons dans le plan un système de coordonnées cartésiennes (t, u) , et considérons l'ouvert dense E formé par tous les éléments de contact *non-verticaux*, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas parallèles à l'axe des u . De tels éléments de contact sont repérés par trois coordonnées cartésiennes, (t, u) pour le point base, et la pente p de la droite non-verticale passant par (t, u) . Le plan de contact au point (t, u, p) est engendré par l'axe des p et le vecteur $(1, p, 0)$ (autrement dit $\xi = \ker(du - pdt)$). Il s'agit de la *structure de contact standard* de \mathbb{R}^3 .

Une fonction lisse d'une variable réelle donne une courbe plongée dans \mathbb{R}^3 , le « 1-graphe » de f , qui est l'ensemble des $(t, u = f(t), p = f'(t)), t \in \mathbb{R}$. Ce 1-graphe est par construction legendrien. Réciproquement, toutes les courbes legendriennes de \mathbb{R}^3 dont la projection dans le plan (t, u) est lisse sont automatiquement des 1-graphes. En effet, cette projection dans le plan, ne pouvant avoir de tangente verticale, est le graphe d'une certaine fonction de la variable t .

La projection d'un entrelacs legendrien compact dans \mathbb{R}^3 est donc singulière. Les points de rebroussement sont l'unique moyen de changer de direction selon l'axe des t .

3.3. Transformation de Legendre, suite

L'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $(t, u, p) \mapsto (p, u - tp, -t)$ préserve le champ de plans ξ . Elle envoie donc une courbe legendrienne sur une autre courbe legendrienne. L'image du 1-graphe d'une fonction n'est pas en général le 1-graphe d'une fonction, sauf si la projection sur l'axe des p est régulière, c'est-à-dire si la

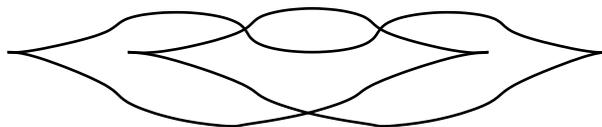


FIG. 7. Le front d'onde d'un nœud de trefle legendrien.

fonction de départ est convexe ou concave. Le graphe de la « vraie » transformée de Legendre (voir 2.3) est une section continue du front d'onde de la legendrienne transformée.

Un calcul montre que l'image par Φ du 1-graphe de $f(t) = t^3$ a pour front d'onde la courbe paramétrée par $(3t^2, -2t^3)$. Plus généralement, au niveau des fronts d'onde, cette transformation envoie les points d'inflexion sur des points de rebroussement. On peut vérifier que l'inverse est aussi vrai. Φ est en fait une version locale de la dualité projective (voir, par exemple, [Fe]). Par ailleurs, cette transformation, qui induit une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan (t, p) , est la « déquantification de Maslov » de la transformation de Fourier (voir, par exemple, [Li]).

3.4. Entrelacs legendriens

Un entrelacs legendrien dans \mathbb{R}^3 est complètement déterminé par son front d'onde. En effet, la tangence à ξ implique que $p = \frac{du}{dt}$ le long d'une courbe legendrienne. Un front d'onde code donc un entrelacs dans l'espace. Pour obtenir le diagramme de nœud correspondant, il suffit de voir qu'à chaque croisement la branche qui a la plus grande pente p passe au dessus.

Réciproquement, tout diagramme de nœud peut être transformé de sorte que les croisements respectent cette convention, et peut donc être réalisé par un front d'onde, quitte à lui ajouter quelques points de rebroussement (qui ne changent pas la topologie du nœud correspondant). Cette manière de coder les entrelacs par un dessin purement bidimensionnel est connue aujourd'hui sous le nom de *diagramme en grille* (« grid diagram ») et sert à la formulation combinatoire de l'homologie de Heegaard-Floer des entrelacs (voir, par exemple, [NT]).

La question de la classification des entrelacs legendriens (i.e. déterminer si deux entrelacs sont ou non dans la même composante connexe de l'espace des plongements legendriens) possède un intérêt propre en topologie de contact. Cette théorie des nœuds « sous contrainte » legendrienne est équivalente à la classification des fronts d'onde modulo trois mouvements élémentaires, cousins des trois mouvements de Reidemeister. Des invariants assez subtils peuvent être définis dans ce cadre, en particulier une version de l'homologie de contact relative (voir, par exemple, [Ng]) ou bien les « décompositions de front d'onde » de Chekanov et Pushkar, [CP].

4. Éléments de contact, suite

La construction de 3.1 peut être reformulée et généralisée comme suit. Un *élément de contact* sur une variété M de dimension n est la donnée d'un point Q de M et d'un hyperplan vectoriel dans $T_Q M$. Comme un tel hyperplan s'identifie à une droite dans $T_Q^* M$, l'ensemble E des éléments de contact de M n'est pas autre chose que $PT^* M$, la projectivisation fibre à fibre du fibré cotangent de M .

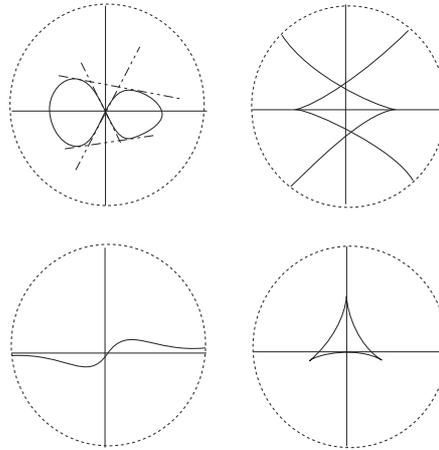


FIG. 8. La dualité projective.

Or T^*M est tautologiquement muni d'une 1-forme dite « de Liouville », notée λ , et qui s'écrit $\sum P_i dQ_i$ dans un système $(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)$ de coordonnées canoniques de T^*M , (Q_1, \dots, Q_n) désignant des coordonnées sur M . La projectivisation du noyau de λ induit un champ d'hyperplans ξ sur E . C'est la *structure de contact*² naturelle de E . Les *sous-variétés legendriennes* de E sont les sous-variétés de dimension $n - 1$, partout tangentes au champ d'hyperplans ξ (dont on peut montrer qu'il ne possède pas de sous-variété intégrale de dimension supérieure à $n - 1$).

Soit $\pi : E \rightarrow M$ la projection naturelle et L une sous-variété legendrienne de E . L'ensemble $\pi(L)$ est par définition le *front d'onde* de L . On peut montrer qu'il est bien décrit localement par une formule du type 1.2. Comme ci-dessus, la donnée d'un front d'onde générique détermine la legendrienne plongée qui vit au dessus. Une sous-variété $N \subset M$ est toujours le front d'onde de la legendrienne L constituée de tous les éléments de contact tangents à N (L est la projectivisation du fibré conormal de N). Si N est réduite à un point dans M , L est la fibre de π au dessus de ce point.

4.1. Dualité projective

Ce cadre est le bon pour formuler la dualité projective. On suppose que M est l'espace projectif réel de dimension n . Notons M^\vee l'espace projectif dual, l'ensemble des hyperplans projectifs de M . Un élément de contact de M détermine un hyperplan projectif, donc un point de M^\vee , et réciproquement. Ainsi il existe une bijection naturelle entre les ensembles des éléments de contact E et E^\vee de M et M^\vee . On peut se convaincre que cette bijection préserve les structures de contact naturelles, et donc on peut identifier E et E^\vee . Autrement dit, il existe deux projections $\pi : E \rightarrow M$ et $\pi^\vee : E \rightarrow M^\vee$, dont les fibres sont des espaces projectifs

² et plus généralement, une variété de contact est une variété munie d'un champ d'hyperplans localement modelé sur cette construction, ce qui explique et justifie la terminologie « de contact »

(de dimension $n - 1$) legendriens, et en chaque point de E , l'hyperplan de contact est engendré par les espaces tangents des deux fibres correspondantes.

Par construction, pour obtenir le dual projectif d'une sous-variété N de M , i.e. l'ensemble des hyperplans projectifs tangents à N , il suffit de relever N à E (i.e. considérer son conormal projectivisé) puis de projeter par π^\vee . *Le dual projectif d'une sous-variété est donc un front d'onde*, en général singulier. Par exemple, si M est le plan projectif, la dualité échange points d'inflexion et points de rebroussement. Si N est une surface immergée dans l'espace projectif de dimension 3, les lignes de points de rebroussement du front dual correspondent aux courbes paraboliques sur la surface (voir [Ar2], [Ur]).

4.2. Éléments de contact coorientés et propagation de fronts

Si au lieu de projectiviser fibre à fibre le cotangent d'une variété M on se contente de le sphériser, on obtient *l'ensemble des éléments de contact coorientés de M* . Si l'on fixe de plus une métrique riemannienne sur M , l'ensemble des éléments de contact coorientés s'identifie avec le fibré tangent unitaire T_1M , qui est muni d'une 1-forme (dite « de contact ») α naturelle. Notons encore $\pi : T_1M \rightarrow M$ la projection naturelle. Soit $v \in T_1M$, et V un vecteur tangent à T_1M en v . Alors $D\pi_v(V)$ est un vecteur tangent à M en $\pi(v)$, on peut donc l'évaluer contre v à l'aide de la métrique, et c'est là ce qui définit notre forme. Par exemple, dans le cas du plan euclidien muni de coordonnées (x, y) , un vecteur unitaire s'identifie avec un angle θ et α avec la forme $\cos(\theta)dx + \sin(\theta)dy$.

Le flot géodésique de la variété riemannienne M habite naturellement sur T_1M . On peut vérifier qu'il préserve la structure de contact [Ar1]. Dans ce contexte, la propagation de fronts évoquée en 1 se reformule et se généralise ainsi :

Étant donné une hypersurface coorientée N de M , on la relève dans T_1M en considérant l'ensemble (legendrien) L formé par tous les éléments de contact tangents à N et dont les coorientations sont compatibles. Propager N au temps t dans la direction de la coorientation revient à transporter L par le flot géodésique jusqu'au temps t , puis à projeter sur M la sous-variété legendrienne L_t ainsi obtenue. Le front $\pi(L_t)$ est en général singulier.

4.3. Singularités nécessaires

Il me reste à évoquer des résultats non-élémentaires dans cette théorie. Je vais me limiter à un exemple, qui rentre dans le cadre plus large des résultats de singularités « globalement nécessaires » en topologie symplectique ou de contact, dans lequel on peut ranger la conjecture d'Arnold sur l'intersection lagrangienne. Il s'agit d'une question posée par Arnold à la fin du siècle dernier [Ar2], et résolue par Chekanov et Pushkar en 2002 [CP].

Reprenons l'exemple de la propagation de l'ellipse. Nous avons observé que ce processus fait apparaître des fronts d'onde singuliers, et qu'à un moment de la propagation, 2, puis 4 singularités coexistent. Elles finissent par disparaître, et à la fin le front d'onde reprend une forme convexe et se propage vers l'extérieur.

Arnold demande si ce phénomène (coexistence de 4 singularités) persiste pour un phénomène de propagation dans un milieu (métrique riemannienne) quelconque. En fait il demande si ces singularités sont nécessaires pour des raisons topologiques,

et formule une question indépendante de toute métrique : *On considère le relevé legendrien $L_0 \subset T_1\mathbb{R}^2$ de l'ellipse coorientée vers le centre (correspondant au front d'onde initial), le relevé legendrien $L_1 \subset T_1\mathbb{R}^2$ d'une courbe convexe coorientée vers l'extérieur (représentant le front d'onde « retourné »), et une famille L_t quelconque de plongements legendriens reliant L_0 à L_1 . Est-il vrai qu'il existe alors un instant t tel que 4 singularités (comptées avec multiplicité) coexistent sur le front d'onde $\pi(L_t)$?*

Je ne connais pas de preuve élémentaire de ce résultat pourtant très concret. La théorie, assez technique, de Chekanov et Pushkar de « décomposition des fronts d'onde » [CP], permet de répondre par l'affirmative à la question d'Arnold. Elle fournit par ailleurs des invariants puissants (dans l'esprit de l'homologie de contact d'Eliashberg [EGH]) pour le problème de la classification des entrelacs legendriens.

5. Références

- [AFV] Aicardi, F. Ferrand, E. Valentin, P. *On the classification of generic phenomena in one-parameter families of thermodynamic binary mixtures*, Phys. Chem Chem Phys, 6, 2002.
- [Ar1] Arnold V.I., *Contact geometry and wave propagation*, Enseign. Math. (2) 36 (1990), no. 3-4, 215-266.
- [Ar2] Arnold V.I., *Arnold's problems*, Springer, 2004.
- [AGV] Arnold, V. I. ; Gusein-Zade, S. M. ; Varchenko, A. N. *Singularities of differentiable maps. Vol. I. The classification of critical points, caustics and wave fronts. Monographs in Mathematics, 82.* Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [CP] Chekanov, Y., Pushkar, P., *Combinatorics of fronts of Legendrian links, and Arnold's 4-conjectures*, Russian Math. Surveys 60 (2005), no. 1, 95-149.
- [EGH] Eliashberg, Y., Givental, A., Hofer, H., *Introduction to symplectic field theory*, Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560–673.
- [Fe] Ferrand, E. *Apparent contours and their Legendrian deformations* Mosc. Math. J. 3 (2003), no. 3, 889–898.
- [FP] E. Ferrand, P. Pushkar, *Morse theory and global coexistence of singularities on wave fronts.* *J. London Math. Soc.* 74 (2006), 527–544
- [Li] Litvinov, G.L.. *The Maslov Dequantization, Idempotent and Tropical Mathematics : A Very Brief Introduction* in Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, AMS « Contemporary Mathematics », 2005.
- [Ng] Ng, L. *Computable Legendrian invariants* Topology 42 (2003), no. 1, 55–82.
- [NT] Ng, L. Thurston, D., *Grid diagrams, braids, and contact geometry*, Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2008, 120–136 (Gökova Geometry-Topology Conference (GGT), Gökova, 2009).
- [Th] Thom, R., *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Interéditions, Paris, 1972.
- [Ur] Uribe, R. A *Projective Invariant for Swallowtails and Godrons, and Global Theorems on the Flecnodal Curve*, Moscow Mathematical Journal 6 :4 (2006) 731-768.
- [Wh] Whitney, H., *On singularities of mappings of euclidean spaces, I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374–410.

Epreuve Gazette
date : 15/12/2009