L'OEUVRE DE FOURIER ET LES MATHÉMATIQUES CONTEMPORAINES.

EMMANUEL FERRAND

1. Une citation.

"L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques." Joseph Fourier, Discours préliminaire à la théorie analytique de la chaleur.

2. Introduction.

Aujourd'hui, le grand public perçoit souvent les mathématiques comme une activité essentiellement formelle sans lien direct avec la nature. En réalité, la citation ci-dessus est dans une très large mesure toujours d'actualité.

Les contributions scientifiques de Joseph Fourier concernent de nombreux domaines, mais la postérité a surtout retenu ses travaux en physique et en mathématiques. Dans ce dernier domaine, Jospeh Fourier a essentiellement inventé deux théories qui ont pris un essor considérable après lui: La *programmation linéaire*, et l'analyse dite *"de Fourier"*. Nous verrons que c'est cette dernière théorie qui a durablement inscrit le nom de Fourier dans l'ensemble des mathématiques.

3. Programmation linéaire.

Pour être honnête, il faut dire que Fourier n'a que brièvement effleuré ce sujet, lors de son séjour en Egypte. Il n'en reste pas moins, qu'a posteriori, on ne peut que constater la pertinence de son approche. De quoi s'agit-il précisément? Dans de nombreuses applications, par exemple en micro-économie, on doit déterminer le maximum d'une fonction linéaire de variables soumises à des contraintes déterminées par des inégalités linéaires. Pour cela, on utilise un algorithme, dit "du simplexe", qui est véritablement une des contributions les plus importantes des mathématiques du point de vue des applications. Cet algorithme fut découvert puis oublié de nombreuses fois jusqu'en 1947, date à laquelle le mathématicien américain G.B. Dantzig en a montré l'importance considérable en conjonction avec le développement des méthodes de calcul informatiques. Joseph Fourier est semble-t-il le premier à avoir considéré ce genre de problèmes, et, de manière visionnaire, il a suggéré une méthode qui préfigure le principe de l'algorithme du simplexe.

4. L'analyse de Fourier.

Il s'agit d'une théorie exemplaire pour comprendre ce que sont les mathématiques aujourd'hui. En effet, nous sommes en présence d'une théorie inventée pour la résolution de problèmes très spécifiques, issus de la théorie physique de la chaleur. Or elle se révèle

Date: 7 janvier 2003.

en fait bien plus universelle puisque, convenablement généralisée, elle se retrouve dans quasiment toutes les mathématiques, aussi bien pures qu'appliquées.

Identifier des structures issues de domaines a priori très différents, c'est choses très commune en mathématiques. Et c'est certainement l'une des plus grandes gratifications pour le mathématicien.

L'analyse de Fourier résulte d'un phénomène de *dualité* très général, qui se formule dans le cadre de la *théorie des groupes*. Le cas classique des *séries de Fourier* correspondant au groupes des entiers relatifs. L'analyse de Fourier apparaît d'une manière ou d'une autre dans presque tous les domaines des mathématiques : *probabilités, statistiques, équations aux dérivées partielles*, mais aussi *théorie de nombres, combinatoire, théorie de graphes...* C'est aussi le bon cadre pour formuler le principe d'incertitude de Heisenberg en mécanique quantique.

Les applications de l'analyse de Fourier sont un des plus grand succès des mathématiques. Elle ne se limitent pas à la résolution des équations de la physique mathématique, comme l'équation de la chaleur étudiée par Fourier. En fait, nous en profitons tous tous les jours, souvent sans le savoir : télécommunications, compression du son (MP3) ou compression d'image, imagerie médicale... Toutes ces technologies utilisent des élaborations de l'analyse de Fourier.

Mais l'analyse de Fourier se cache aussi derrière les algorithmes de multiplication rapide, nécessaires pour les calculs informatiques. En fait, cette liste des applications de l'analyse de Fourier est certainement loin d'être exhaustive!

5. Un exemple musical

On peut comprendre l'idée de la transformation de Fourier en considérant l'exemple du son musical. Dans ce cas précis, la théorie de Fourier permet de mieux saisir la structure des sons complexes, en les interprétant comme superposition de sons simples, ou "purs". Mathématiquement, un son pur est une onde sinusoidale. Il suffit de savoir que le son correspondant n'est pas très éloigné de celui d'une flûte très douce.

Un son tenu, comme une voyelle que l'on chante à une hauteur fixée, correspond en première approximation à un phénomène périodique: c'est une vibration de l'air qui se répète dans le temps avec une certaine période T. Notre perception de la hauteur d'un son (grave / aigu) dépend de la période de ce phénomène. Les sons graves correspondent aux "longues" périodes (T est de l'ordre de 1/50 ème de seconde), les sons aigus correspondent aux courtes périodes (T est de l'ordre de 1/10000 ème de seconde).

D'après la théorie de Fourier, un tel son tenu peut être réalisé comme la superposition d'un son "pur" de même période T, (appelé *harmonique fondamental*), et de sons "purs" de périodes T/2, T/3, T/4, T/5, T/6, T/7, etc... Le k-ième harmonique est la composante "pure" de période T/k du son. L'analyse de Fourier consiste à extraire les contributions relatives de chacun des harmoniques. Ce sont ces contributions relatives qui caractérisent le timbre d'un son tenu. Ainsi deux voyelles, chantées à la même hauteur (ayant donc le même fondamental) seront distinguées par l'analyse de Fourier. Cette analyse peut être réalisée en temps réel à l'aide d'un banal ordinateur. Notons que le second harmonique est perçu une octave au dessus du fondamental, le troisième une quinte au dessus du second, le quatrième, une quarte au dessus du troisième, etc... On comprend ainsi que la série des harmoniques et l'arithmétique interviennent de manière primordiale dans la théoorie musicale. L'histoire de la constitution des gammes et des tempéraments fut en fait riche en controverses et, depuis Pythagore, les musiciens sont en quelque sorte tous des mathématiciens.

La théorie ne s'applique pas aux sons brefs, ou percussifs. Notons que notre oreille a plus de mal à leur attribuer une hauteur précise. Il existe en mathématiques des élaborations de la théorie de Fourier permettant de palier à cet inconvénient.

Un son musical est en général constitué d'une partie brève et percusive (l'attaque), et d'une partie tenue. Ainsi, lorsqu'on déploie au cours du temps l'analyse de Fourier d'un morceau musical (spectrogramme), on voit apparaître une sorte de partition comportant non seulement la durée et la hauteur des notes, mais aussi des indications de timbre. Alors que l'étude directe de l'enregistrement de l'onde sonore ne montrera qu'une fonction extrêmement complexe, l'analyse de Fourier permet de mettre en lumière la structure musicale du morceau.

6. Conclusion.

Ainsi les travaux de Fourier incarnent-ils l'unité des mathématiques, de ses versants les plus abstraits jusqu'aux applications les plus concrètes. L'analyse de Fourier montre de manière exemplaire comment l'étude de la nature peut venir féconder les mathématiques et donner le jour à de nouvelles théories qui auront leur intérêt propre, et dont les retombées pratiques, sensibles dans la vie de tous les jours, peuvent être très éloignées du problème concret initial.

Notons que, de nos jours, les interactions entre la physique et les mathématiques sont plus importantes que jamais. Il est frappant de voir comment, dans les vingt dernières années, les problématiques suggérées par la physique théorique (particules, gravitation quantique...) ont fait considérablement progresser les mathématiques.

Institut Fourier, BP 74, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France.
E-mail address: emmanuel.ferrand@ujf-grenoble.fr