LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

(Séance du 4 février 1939)

Deux thèses de la plus haute portée ont été récemment soutenues devant la Faculté des Lettres de l'Université de Paris sur la philosophie des Mathématiques considérées au point de développement qu'elles ont actuellement atteint. La Société de Philosophie a estimé qu'il y avait intérêt à les discuter simultanément ; elle remercie leurs auteurs d'avoir bien voulu se prêter à cette initiative.

M. Cavaillès part du problème du fondement des Mathématiques tel qu'il est actuellement posé et en partie résolu. La Crise de la Théorie des Ensembles a en effet pour résultat, après les travaux autour de Bertrand Russell et de Hilbert, de transformer le problème épistémologique en problème mathématique soumis aux sanctions habituelles de la technique. Ainsi se trouvent aujourd'hui éliminées deux conceptions des Mathématiques :

1. Le logicisme («les Mathématiques sont une partie de la Logique»), car la formalisation effective des Mathématiques a fait apparaître :

a. Qu'en réalité, il n'était pas fait appel à des notions ou des opérations purement logiques (le problème du sens de telles notions et opérations étant laissé de côté), mais que les considérations utilisées, toutes homogènes, appartiennent au calcul combinatoire ou à d'autres théories mathématiques (le sens d'un symbole est son mode d'emploi dans un système formel) ;

b. Qu'il est impossible, en vertu d'un théorème de Gödel, d'insérer les Mathématiques dans un système formel unique : tout système contenant l'Arithmétique est nécessairement non saturé (c'est-à-dire qu'il est possible d'y construire une proposition qui n'est ni démontrable, ni réfutable dans le système).

2. La conception hypothético-déductive, présentée avec le maximum de précision par le formalisme radical de von Neumann. En effet, on ne peut caractériser une théorie mathématique, – système d'axiomes et de règles arbitrairement posées (d'après cette conception), – comme système déductif, que par l'utilisation de théories mathématiques constituées et non préalablement caractérisées de la sorte (exemple, pour la théorie des Nombres, la démonstration de la non-contradiction de Gentzen faisant appel à la récurrence transfinie). Autrement dit : solidarité essentielle entre les parties des Mathématiques, avec impossibilité d'une régression procurant un commencement absolu.

M. Cavaillès est alors conduit aux affirmations suivantes :

1° Les Mathématiques constituent un devenir singulier. Non seulement il est impossible de les réduire à autre chose qu'elles-mêmes, mais toute définition, à une époque donnée, est relative à cette époque, c'est-à-dire à l'histoire dont elle est l'aboutissement : il n'y a pas de définition éternelle. Parler des mathématiques ne peut être que les refaire. Ce devenir semble autonome : il apparaît possible à l'épistémologue de retrouver sous les accidents historiques un enchaînement nécessaire ; les notions introduites sont exigées par la solution d'un problème, et, en vertu de leur seule présence parmi les notions antérieures, elles posent à leur tour de nouveaux problèmes. Il y a vraiment devenir : le mathématicien est embarqué dans une aventure qu'il ne peut arrêter qu'arbitrairement et dont chaque instant lui procure une nouveauté radicale.

2° La résolution d'un problème possède tous les caractères d'une *expérience* : construction soumise à la sanction d'un échec possible, mais accomplie conformément à une règle (c'est-à-dire *reproduisible*, donc *non événement*), enfin se déroulant dans le sensible. Opérations et règles n'ont de sens que relativement à un système mathématique antérieur : il n'y a pas de représentation effectivement pensée (distincte du pur vécu) qui ne soit système mathématique dans la mesure où elle est pensée, – c'est-à-dire organisation réglée du sensible (en vertu de la continuité entre gestes mathématiques depuis les plus élémentaires).

3° L'existence des objets est corrélative de l'actualisation d'une méthode, et comme telle, non catégorique, mais toujours dépendante de l'expérience fondamentale d'une pensée effective. L'illusion d'une possibilité de description exhaustive (ou d'engendrement *ex nihilo*) par des axiomes, démasquée par le paradoxe de Skolem, s'explique par le décalage nécessaire entre exposition et pensée authentique. Celle-ci, ou intuition centrale d'une méthode, pour être exprimée, exigerait des Mathématiques achevées (explicitation de toutes les exigences successives). Les objets figurent les projections dans la représentation des étapes d'un développement dialectique : il y a chaque fois pour eux un critère d'évidence conditionné par la méthode même (exemple : l'évidence propre à l'induction transfinie). Ils ne sont donc ni en soi ni dans le monde du vécu, mais la réalité même de l'acte de connaissance.

M. Lautman est entièrement d'accord avec M. Cavaillès sur la solidarité qui unit la nature de l'objet mathématique à l'expérience singulière de son élaboration dans le temps. Il n'y a de détermination du vrai et du faux qu'au sens des Mathématiques effectives, et la vérité est immanente à la démonstration rigoureuse. Mais, à partir de ce point, M. Lautman s'écarte de M. Cavaillès. Si l'on admet que la manifestation d'un existant en acte ne prend tout son sens que comme réponse à un problème préalable concernant la possibilité de cet existant, l'établissement des relations mathématiques effectives apparaît, en effet, comme rationnellement postérieur au problème de la possibilité de pareilles liaisons en général. L'étude du développement des Mathématiques contemporaines montre, du reste, comment les résultats obtenus s'organisent sous l'unité de certains thèmes, que le philosophe interprète en termes de liaison possible entre les notions d'une Dialectique idéale : la pénétration des méthodes topologiques en Géométrie différentielle répond au problème des rapports du local et du global, du *tout* et de la *partie* ; les théorèmes de dualité en Topologie étudient la réduction des propriétés *extrinsèques* de situation en propriétés *intrinsèques* de structure ; le calcul des variations détermine l'*existence* d'un être mathématique par les propriétés exceptionnelles qui en permettent la *sélection* ; la théorie analytique des Nombres montre le rôle du *continu* dans l'étude du *discontinu*, etc.

Il se trouve alors que des affinités de structure logique permettent de rapprocher des théories mathématiques différentes, du fait qu'elles apportent chacune une esquisse de solution différente à un même problème dialectique. C'est ainsi, par exemple, que la théorie des Champs où se réalise un système d'axiomes, en logique mathématique, et la théorie de la Représentation des Groupes abstraits, permettent l'une et l'autre d'observer comment s'opère, en Mathématiques, le passage d'un système *formel* à ses réalisations *matérielles*. On voit en quel sens on peut parler de la participation de théories mathématiques distinctes à une Dialectique commune qui les domine.

Les Idées de cette Dialectique doivent être conçues comme Idées des relations éventuelles entre notions abstraites, et leur connaissance n'est affirmative d'aucune situation effective. Comme délimitation du champ du possible, la Dialectique est problématique pure, ébauche de schémas dont le dessin a besoin, pour s'affirmer, de prendre corps sur une matière mathématique particulière. Seulement cette indétermination de la Dialectique, par où se manifeste son insuffisance essentielle, assure en même temps son extériorité par rapport au devenir temporel des concepts scientifiques.

On peut, en conclusion, préciser les liens de la Dialectique et des Mathématiques. Les Mathématiques se présentent tout d'abord comme exemples d'incarnation, domaines où s'actualise l'attente idéale de relations possibles, mais ce sont des exemples privilégiés et dont la venue est comme nécessaire. Tout effort pour approfondir la connaissance des Idées se prolonge, en effet, naturellement, et par cela seul que cet effort est souci d'analyse, en constructions mathématiques effectives. La pensée mathématique a donc le rôle éminent d'offrir au philosophe le spectacle constamment recommencé de la genèse du Réel à partir de l'Idée.

COMPTE RENDU DE LA SÉANCE

M. Cavaillès.– Les réflexions que je voudrais présenter se situent à un moment donné du développement des Mathématiques, c'est-à-dire au moment où nous sommes. Elles comportent, en raison de la singularité même de ce moment, deux parties, que j'ai distinguées d'ailleurs dans le résumé qui vous a été communiqué : une première partie comporte les résultats que nous ont donnés les Mathématiques elles-mêmes sur le problème philosophique de l'essence de la pensée mathématique ; cette première partie, nous n'avons qu'à la traduire, à l'expliciter ; on pourra peut-être discuter sur la portée des résultats, mais je crois que c'est là la partie incontestable que je propose.

Mais cette partie incontestable se trouve être négative, et alors je me propose, après l'avoir brièvement résumée, d'introduire quelques réflexions positives qui se greffent sur les résultats obtenus, comme sur le développement actuel des Mathématiques tel que nous le voyons se faire sous nos yeux.

Sur la première partie, j'insisterai peu : je ne veux pas, en particulier, la lier aussi précisément que je le devrais avec les étapes antérieures de la Philosophie mathématique, spécialement au XIX^e^ siècle. J'indique seulement d'un mot que, dans les Mathématiques du XIX^e^ siècle, on a été amené, en raison même du développement des différentes branches des Mathématiques et de la nécessité d'abandonner l'évidence intuitive à laquelle on avait recours antérieurement, à mettre l'accent sur la notion de démonstration. L'évidence le cédait à la démonstrabilité. D'où cette idée, qui s'est répandue à peu près chez tous les mathématiciens et que nous retrouvons chez des chercheurs aussi différents que Frege et que Dedekind, que les Mathématiques sont une partie de la Logique. Ce qui assure, en effet, les résultats, c'est le caractère rigoureux des enchaînements de raisonnements par lesquels on les a établis.

Il y a donc, à cette époque, un effort pour réduire, non seulement toutes les démarches des mathématiciens, mais les notions auxquelles ils font appel, à des démarches et à des notions purement logiques ; effort qui s'est trouvé aidé par le développement de la théorie des Ensembles, et qui, d'ailleurs, l'a en partie provoqué.

On voit par là comment le rapprochement a été possible, puisque la notion d'ensemble elle-même semblait le plus loin d'une intuition quelconque, et puisque, d'autre part, elle pouvait se confondre avec la notion de classe, ou d'extension. Encore en 1907, Zermelo, en tête de son «Axiomatisation de la Théorie des Ensembles», écrivait : «La Théorie des Ensembles est la branche des Mathématiques à laquelle il revient d'étudier mathématiquement les concepts fondamentaux de nombre, d'ordre et de fonction dans leur simplicité primitive, et, par là, de développer les bases logiques de l'Arithmétique tout entière et de l'Analyse.»

On voit par là encore comment jusqu'en 1907, c'est-à-dire après l'apparition des plus grands paradoxes, l'espoir subsistait chez un théoricien des Ensembles comme Zermelo, de fonder les Mathématiques – c'est-à-dire l'Arithmétique et l'Analyse – sur une notion purement logique.

Cet espoir s'est trouvé déçu, non pas tant par suite des difficultés que la Théorie des Ensembles a rencontrées à cette époque par la découverte des antinomies, mais par suite de l'effort que les mathématiciens ont fait eux-mêmes pour décider si cet espoir pouvait être réalisé ou non, c'est-à-dire grâce à l'effort par lequel ils ont transformé une conception philosophique des mathématiques en un problème technique de mathématiciens.

En effet, quand on a voulu préciser la notion d'ensemble et la théorie consécutive, on s'est heurté à la nécessité d'axiomatiser cette théorie, c'est-à-dire de recenser les notions fondamentales et les procédés employés. On s'est donc trouvé en présence de problèmes techniques qui pouvaient recevoir une réponse précise. Ce sont des travaux qui se sont accomplis dans l'école réunie autour de Russell, dans celle de Hilbert, et dont, en France, un des initiateurs a été, avec une vigueur géniale, Jacques Herbrand : son absence, pour ceux qui l'ont connu, aussi bien philosophes que mathématiciens, se fait tous les jours, aujourd'hui encore, cruellement sentir.

Les résultats, je les ai indiqués dans mon résumé : comme nous avions affaire à un problème qui pouvait être résolu d'une façon mathématique, deux conceptions fondamentales des Mathématiques se sont trouvées rejetées :

1° La conception que je citais en commençant, ce fameux espoir de réduire les Mathématiques à la Logique ; le logicisme est éliminé. Je n'insiste pas sur les raisons, je les note dans mon résumé et je me permets également de renvoyer, pour les détails, à mon livre : *Méthode axiomatique et formalisme*.

En essayant de formaliser intégralement les Mathématiques, on est arrivé à ce résultat que les procédés auxquels on fait appel ne peuvent raisonnablement pas être tous appelés logiques. Je crois qu'il serait imprudent d'engager ici le débat sur l'essence même de la pensée logique, cela nous entraînerait trop loin : mais je peux indiquer au moins que, si on formalise l'Arithmétique, il faut faire intervenir le principe d'induction complète, qui peut difficilement se ramener à un système de notions logiques.

2° Il est impossible d'insérer toutes les Mathématiques dans un système formel unique. Ceci est le résultat donné par un théorème qui figure dans le mémoire publié par Gödel en 1931.

Reste une autre conception possible : la fameuse et vieille conception du système hypothético-déductif. Il ne s'agit plus là d'un seul système formel, mais d'un assemblage de systèmes formels qui sont arbitrairement construits et peuvent être juxtaposés, et constituer l'ensemble des Mathématiques.

Cette conception hypothético-déductive se trouve également rendue impossible par un autre théorème publié par Gödel dans le même mémoire : «La non-contradiction d'un système formel mathématique contenant la théorie des Nombres ne se démontre que par des moyens mathématiques non représentables dans ce système.» Il est par conséquent absurde de définir les Mathématiques comme un ensemble de systèmes hypothético-déductifs, puisque, pour caractériser en tant que systèmes déductifs ces systèmes formels, il faut déjà employer les mathématiques.

Je rappelle en particulier que, si on considère le système formel qui représente la théorie des Nombres, nous possédons une caractérisation de ce système comme système déductif : caractériser un système comme système déductif, c'est montrer qu'on ne peut pas démontrer tout en lui, c'est démontrer sa non-contradiction. Nous avons maintenant une démonstration due à Gentzen, qui emploie l'induction transfinie, c'est-à-dire un procédé mathématique extérieur à la théorie des nombres.

J'ai indiqué que la conception la plus précise de la représentation hypothético-déductive était due à von Neumann. L'idée de l'école de Hilbert était celle-ci : évidemment, nous avons besoin de notions mathématiques pour caractériser un système formel, mais ces notions sont très élémentaires. Dans le système hypothético-déductif des axiomes de Hilbert, pour la Géométrie euclidienne, les notions sont très simples : nombre entier fini, mise en correspondance. Cela est illusoire, car la non-contradiction des axiomes de Hilbert dans la Géométrie euclidienne n'était démontrable que par la construction d'un système emprunté à la théorie des Nombres, et pour celle-ci à son tour, nous sommes obligés de faire appel à cette induction transfinie.

Voilà donc les résultats. Le philosophe maintenant peut se demander, en présence aussi du développement actuel des Mathématiques, quelles conclusions positives il peut énoncer.

J'indique tout de suite que je ne prétends pas donner à ces conclusions une forme définitive ; c'est un travail très difficile, sur lequel je ne présente, pour le moment, que des réflexions, que je vous soumets, réflexions qui sont encore un peu imprégnées de l'effort du travail, et je n'indique maintenant que les points sur lesquels je crois être arrivé au maximum de certitude.

Premier point : l'idée de définir les Mathématiques me semble à rejeter, aussi bien à cause des résultats que je viens de signaler, que par suite de la réflexion même sur le travail du mathématicien.

Les Mathématiques constituent un devenir, c'est-à-dire une réalité irréductible à autre chose qu'elle-même. Que peut signifier l'entreprise : définir les Mathématiques ? C'est : ou bien dire les Mathématiques sont ceci qui n'est pas mathématique, et alors c'est absurde – ou bien recenser les procédés employés par les mathématiciens.

Je laisse de côté la première solution, quoi qu'elle ait eu et ait encore des défenseurs. Reste la seconde. Je crois qu'aucun mathématicien n'accepterait que l'on recense, d'une façon définitive et exhaustive, les procédés qu'il emploie. On peut les recenser à un moment donné, mais il est absurde de dire : ceci est uniquement mathématique, et, hors de l'utilisation de ces procédés, nous ne ferons plus de Mathématiques. Je crois que je suis ici en accord, d'une part, avec les résultats obtenus, comme par exemple le caractère nécessairement non saturé de toute théorie mathématique, qui prouve l'exigence de l'intervention de nouvelles règles de raisonnement chaque fois qu'une théorie se développe, et, d'autre part, avec la conception des Mathématiques telle qu'elle se trouve dans l'intuitionnisme, et Heiting, par exemple, écrivait récemment que les Mathématiques constituent un système organique en plein développement, auquel il est inadmissible de vouloir assigner des bornes.

Les Mathématiques sont un devenir. Tout ce que nous pouvons faire, c'est essayer d'en comprendre l'histoire, c'est-à-dire, pour situer les Mathématiques parmi d'autres activités intellectuelles, de trouver certaines caractéristiques de ce devenir. j'en citerai deux :

1° Ce devenir est autonome, c'est-à-dire que, s'il est impossible de se placer hors de lui, on peut, en étudiant le développement historique, contingent, des Mathématiques, tel qu'il se présente à nous, apercevoir des nécessités sous l'enchaînement des notions et des procédés. Ici, évidemment, le mot «nécessité» ne peut pas être précisé d'une autre façon. On note des problèmes, et on s'aperçoit que ces problèmes exigeaient l'apparition d'une nouvelle notion ; c'est tout ce qu'on peut faire, et il est certain que cet emploi du mot «exiger» nous est trop facile, puisque nous sommes de l'autre côté, nous voyons les réussites. Nous pouvons pourtant dire que les notions qui sont apparues ont vraiment apporté une solution à des problèmes qui se posaient effectivement.

Je crois qu'il est possible, sous la contingence pittoresque de l'enchaînement des théories, de se livrer à ce travail. J'ai essayé, pour ma part, de le faire pour la théorie des Ensembles ; je ne prétends pas avoir réussi, mais, justement dans le développement de cette théorie qui semblerait pourtant l'exemple même d'une théorie géniale, faite à coups d'inventions radicalement imprévisibles, il m'a semblé apercevoir une nécessité interne : ce sont certains problèmes d'analyse qui ont donné naissance aux notions essentielles, et ont engendré certains procédés devinés déjà par Bolzano ou Lejeune-Dirichlet et devenus les procédés fondamentaux mis au point par Cantor. Autonomie, donc nécessité.

2° Ce devenir se développe comme un devenir véritable, c'est-à-dire qu'il est imprévisible. Il n'est peut-être pas imprévisible pour les intuitions du mathématicien en pleine activité qui devine de quel côté il faut chercher, mais il est imprévisible originairement, d'une façon authentique. C'est ce que l'on pourrait appeler la Dialectique fondamentale des Mathématiques : si les nouvelles notions apparaissent comme nécessitées par les problèmes posés, cette nouveauté même est vraiment une nouveauté complète. C'est-à-dire qu'on ne peut pas, par une simple analyse des notions déjà employées, trouver à l'intérieur d'elles les nouvelles notions : les généralisations, par exemple, qui ont engendré de nouveaux procédés.

Cette nouveauté, je la caractériserai par le deuxième point de ma conclusion : à savoir que l'activité des mathématiciens est une activité expérimentale.

Par expérience, j'entends un système de gestes, régi par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes. Je reconnais le vague d'une semblable définition, je crois qu'il est impossible d'y pallier tout à fait sans prendre des exemples effectifs ; je veux dire par là que chaque procédé mathématique se définit par rapport à une situation mathématique antérieure dont il dépend partiellement, par rapport à laquelle aussi il entretient une indépendance telle que le résultat de ce geste doit être constaté dans son accomplissement. C'est, je crois, par là qu'on peut définir l'expérience mathématique.

Est-ce à dire que cette expérience ait un rapport avec ce que l'on appelle habituellement ainsi ? Je crois qu'il est préférable de réserver pour elle le mot même d'expérience ; en particulier, l'expérience physique me semble un complexe de beaucoup d'éléments hétérogènes, sur lequel je ne voudrais pas insister aujourd'hui – cela nous entraînerait trop loin – mais qui, en particulier, ne possède pas ce caractère que les gestes sont accomplis conformément à une règle, ni que, d'autre part, le résultat ait une signification dans le système même, ce qui est le cas de l'expérience mathématique. C'est-à-dire que, la situation mathématique étant donnée, le geste accompli nous donne un résultat qui, par le fait même qu'il apparaît, prend place dans un système mathématique prolongeant le système antérieur (le contenant comme cas particulier).

Comment peut-on réaliser ces expériences ? J'ai essayé de le faire, dans mon livre sur la Méthode axiomatique, d'une manière très incomplète, mais que j'espère préciser plus tard ; j'ai indiqué quelques-uns des procédés employés par les mathématiciens. C'est, bien entendu, une description grossière, car, à chaque instant, il y a certains procédés qui se situent dans une atmosphère mathématique, un état des Mathématiques à un moment donné qui peut n'être pas transportable. J'ai indiqué cependant quelques-uns de ces procédés, en m'inspirant d'ailleurs à la fois des analyses de Hilbert et de celle de Dedekind, dans son discours prononcé en 1857 devant Gauss, discours qui fut approuvé par Gauss et publié récemment par Melle Nœther, en 1931.

J'ai appelé un premier procédé, en général : thématisation, c'est-à-dire que les gestes accomplis sur un modèle ou un champ d'individus peuvent, à leur tour, être considérés comme des individus sur lesquels le mathématicien travaillera en les considérant comme un nouveau champ. Par exemple, topologie des transformations topologiques ; et on pourrait trouver bien d'autres exemples. Ce procédé permet la superposition de réflexions mathématiques, et il a aussi l'intérêt de nous montrer que la liaison ne cesse pas entre l'activité concrète du mathématicien dès les premiers moments de son développement – mettre deux objets symétriques à côté l'un de l'autre, les faire changer de place – et les opérations les plus abstraites, car chaque fois la liaison se trouve dans le fait que le système d'objets considérés est un système d'opérations qui, elles-mêmes, sont des opérations sur d'autres opérations qui, finalement, se retrouvent sur des objets concrets.

Deuxième procédé, nommé par Hilbert : idéalisation ou adjonction d'éléments idéaux ; il consiste simplement à exiger qu'une opération, qui se trouvait d'une manière accidentelle limitée à certaines circonstances extrinsèques à l'accomplissement même de cette opération, soit libérée de cette limitation extrinsèque, et ceci par la position d'un système d'objets qui ne coïncide plus avec les objets de l'intuition. C'est par exemple ainsi que se sont faites les différentes généralisations de la notion de nombre.

Quelle va être la conséquence, pour la notion même d'objet mathématique ? J'ai essayé de l'indiquer, d'une façon qui n'est peut-être pas satisfaisante, je le reconnais, elle ne me satisfait pas complètement moi-même, mais c'est une approximation.

L'objet mathématique se trouve ainsi, à mon avis, toujours corrélatif de gestes effectivement accomplis par le mathématicien dans une situation donnée. Est-ce à dire que cet objet possède un mode d'existence particulier ? Il y aurait, par exemple, des objets idéaux existant en soi ? Dans les discussions proprement mathématiques qui avaient lieu entre tenants de l'école de Vienne et de l'école de Hilbert, on se posait la question de savoir s'il y avait – on appelait cela un platonisme, je crois que l'expression ne correspond pas très bien à la chose, mais peu importe le mot – une région d'objets idéaux auxquels pourraient se référer les Mathématiques ; c'est ce que, dans un article qui a paru cet été, Gentzen appelle : la mathématisation en soi.

Je crois pouvoir, de ce point de vue, aller plus loin que Gentzen qui essaie une conciliation entre la mathématique en soi et l'exigence constructionniste de l'intuitionnisme ; je crois qu'une conception des systèmes d'objets mathématiques existant en soi n'est nullement nécessaire pour garantir le raisonnement mathématique : par exemple, quand il s'agit du continu, cette conception d'objets mathématiques doit être rejetée, pour une raison assez simple, c'est qu'elle est totalement inutile, aussi bien pour le développement même des Mathématiques que pour une intelligence de ce développement.

En effet, si elle répondait à quelque chose de précis, cela voudrait dire que, si ces objets auxquels se réfère le mathématicien ne sont pas saisissables dans une intuition quelconque, du moins leurs propriétés, leur présence simultanée sont exigées à un moment du raisonnement du mathématicien. Non seulement ceci n'a pas lieu, mais encore, si l'on veut préciser ce que cela veut dire, nous nous heurtons à des difficultés qui nous obligent à rejeter cette conception; je fais ici allusion au paradoxe de Skolem.

Je ne veux pas développer ce paradoxe, d'autant plus que, pour l'expliciter avec précision, il faudrait utiliser une formalisation. En gros, cela signifie ceci : si nous avons un modèle, que nous supposons satisfaire à un système d'axiomes, il est toujours possible de construire un modèle dénombrable satisfaisant à ce même système d'axiomes. En particulier, on peut satisfaire au système des axiomes de la théorie des Ensembles avec un modèle dénombrable.

Ce paradoxe, sur lequel Skolem lui-même, et bien d'autres, cet été Gentzen, ont réfléchi longuement, revient à dire ceci : c'est qu'une caractérisation exhaustive d'un modèle satisfaisant à un système d'axiomes se trouve être impossible. Si nous supposons les axiomes posés, c'est-à-dire l'énumération des propriétés dont nous avons besoin pour les objets, nous ne pouvons pas exiger que ces axiomes en même temps engendrent les objets, nous sommes obligés de supposer une existence d'un champ d'objets, et alors des propriétés de ces objets dans ce champ nous pouvons déduire d'autres propriétés. Ce que nous ne pouvons pas dire, c'est que notre champ d'objets peut être caractérisable d'une façon uniforme, par notre système d'axiomes.

Ceci a l'intérêt, non seulement d'éliminer cette conception idéaliste, pour ainsi dire, de l'existence des objets mathématiques, mais encore de marquer la solidarité intime par laquelle sont liés les moments du développement mathématique.

Il n'y a pas de départ à zéro. On peut, historiquement, voir apparaître les Mathématiques dans le groupe de déplacements de la Géométrie élémentaire, mais, si nous voulons préciser ce que nous entendons par là, – soit par l'activité de la numération où se trouve déjà impliqué ce que Poincaré appelait l'intuition du nombre pur, soit le début de la Géométrie élémentaire, – nous sommes obligés, en réalité, de développer toutes les Mathématiques ; nous pouvons bien nous arrêter arbitrairement, dire : cet état-ci nous satisfait, mais, si nous sommes fidèles à l'exigence même qui a présidé à la naissance de ces notions et à leur développement, alors il faudra que nous soulevions des problèmes qui naissent, par exemple, du refus de nous arrêter dans des circonstances qui sont extérieures au problème posé et, à ce moment, apparaîtront de nouvelle notions et s'engendreront non seulement les Mathématiques jusqu'à nos jours, mais les exigences de développement, les problèmes non résolus qui provoquent leurs transformations actuelles.

En conclusion, je dirai donc que la notion même d'une existence des objets mathématiques nous intéresse, nous autres philosophes, parce qu'elle pose le problème de la notion même d'existence d'objets de pensée.

Qu'est-ce, pour un objet, qu'exister ? Ici, nous nous trouvons en présence du fait que le type même de la connaissance certaine, rigoureuse, qui est justement la connaissance mathématique, nous empêche de poser des objets comme existant indépendamment du système accompli sur ces objets et même indépendamment d'un enchaînement nécessaire à partir du début même de l'activité humaine.

De sorte que nous ne pouvons jamais ni les poser en soi, ni dire exactement : ici est le monde, – un monde que nous décririons –. Chaque fois nous sommes obligés de dire : ce sont là des corrélats d'une activité. Tout ce que nous pensons en eux, ce sont les règles de raisonnement mathématique qui sont exigées par les problèmes qui se posent, et il y a même un débordement, une exigence de dépassement qui se trouve dans les problèmes non résolus, qui nous oblige à poser à nouveau d'autres objets ou à transformer la définition des objets primitivement posés.

Telles sont les réflexions que je voulais présenter ; je n'en cache pas le caractère incomplet, insuffisant, qui éclate même à mes yeux, mais je crois que l'état des Mathématiques actuellement en nécessite au moins l'essentiel.

COMMUNICATION DE M. LAUTMAN

Après avoir entendu M. Cavaillès, je suis encore plus convaincu que je ne suis pas d'accord avec lui et je vais m'efforcer, pendant les quelques instants où j'ai la parole, de préciser les points sur lesquels nos conceptions divergent. M. Cavaillès me paraît, dans ce qu'il appelle l'expérience mathématique, attribuer un rôle considérable à une activité de l'esprit, déterminant dans le temps l'objet de son expérience. Il n'existerait donc pas, d'après lui, de caractères généraux constitutifs de la réalité mathématique ; celle-ci s'affirmerait au contraire, à chaque moment de l'histoire des Mathématiques, comme un événement à la fois nécessaire et singulier. De là les critiques que M. Cavaillès adresse au platonisme en Mathématiques, au sens où le platonisme s'identifierait avec une théorie de l'existence «en soi» des Mathématiques.

Je reconnais avec M. Cavaillès l'impossibilité d'une pareille conception d'un Univers immuable d'êtres mathématiques idéaux. C'est une vision extrêmement séduisante, mais d'une consistance vraiment trop faible. Les propriétés d'un être mathématique dépendent essentiellement des axiomes de la théorie où ces êtres apparaissent, et cette dépendance leur retire l'immutabilité qui doit caractériser un Univers intelligible. Je n'en considère pas moins les nombres et les figures comme possédant une objectivité aussi certaine que celle à laquelle l'esprit se heurte dans l'observation de la nature physique ;

mais cette objectivité des êtres mathématiques, qui se manifeste de façon sensible dans la complexité de leur nature, ne révèle son sens véritable que dans une théorie de la participation des Mathématiques à une réalité plus haute et plus cachée, qui constitue, à mon avis, un véritable monde des Idées.

Pour bien faire comprendre comment l'étude du développement récent des Mathématiques peut justifier l'interprétation platonicienne que j'ai proposée, il me faut insister tout d'abord sur ce que l'on a appelé l'aspect structural des Mathématiques contemporaines. Il s'agit là de structures mathématiques, mais nous verrons ensuite comment il est facile de remonter de ces structures mathématiques à la considération de structures dialectiques incarnées dans les théories mathématiques effectives.

L'aspect structural des Mathématiques contemporaines se manifeste dans l'importance du rôle que jouent, dans toutes les branches des Mathématiques, la Théorie des Ensembles due à Cantor, la Théorie des Groupes de Galois, la Théorie des Corps de Nombres algébriques de Dedekind (**bourdon**). Ce qui caractérise ces différentes théories, c'est que ce sont des théories *abstraites* ; elles étudient les modes d'organisation possible d'éléments dont la nature est indifférente. C'est ainsi, par exemple, qu'il est possible de définir des propriétés globales d'ordonnance, d'achèvement, de division en classes, d'irréductibilité, de dimension, de fermeture, etc., qui caractérisent de façon qualitative les collections auxquelles elles s'appliquent. Un nouvel esprit anime les Mathématiques ; les longs calculs cèdent la place aux raisonnements plus intuitifs de la Topologie et de l'Algèbre. Considérons par exemple ce que les mathématiciens appellent des théorèmes d'existence ; c'est-à-dire des théorèmes qui établissent, sans la construire, l'existence de certaines fonctions ou de certaines solutions. Dans un très grand nombre de cas, l'existence de la fonction cherchée peut être déduite des propriétés topologiques globales d'une surface convenablement définie. C'est ainsi, en particulier, que s'est développée, depuis Riemann, toute une théorie géométrique des fonctions analytiques qui permet de déduire l'existence de nouveaux êtres transcendants à partir de la considération presque intuitive de la structure topologique de certaines *surfaces de Riemann*. Dans ce cas, la connaissance de la structure mathématique de la surface se prolonge en affirmation d'existence relative à la fonction cherchée.

Si l'on réfléchit sur le mécanisme interne de la théorie à laquelle nous venons de faire allusion, on se rend compte qu'elle établit une liaison entre le degré d'achèvement de la structure interne d'un certain être mathématique (une surface) et l'existence d'un autre être mathématique (une fonction), c'est-à-dire en somme entre l'*essence* d'un être et l'*existence* d'un autre être. Ces notions d'*essence* et d'*existence* comme celles de *forme* et *matière*, du *tout* et de la *partie*, du *contenant* et du *contenu*, etc., ne sont pas des notions mathématiques, et pourtant c'est vers elles que conduit la considération des théories mathématiques effectives. Je les appelle des *Notions* dialectiques et propose d'appeler *Idées* dialectiques le problème de la liaison possible entre notions dialectiques ainsi définies. La raison des rapports de la Dialectique et des Mathématiques réside alors dans le fait que les problèmes de la Dialectique sont concevables et formulables indépendamment des Mathématiques, mais que toute ébauche de solution apportée à ces problèmes s'appuie nécessairement sur quelque exemple mathématique destiné à supporter de façon concrète la liaison dialectique étudiée.

Considérons pour cela, par exemple, le problème des rapports de la forme et de la matière. Il est possible de se demander dans quelle mesure une forme détermine l'existence et les propriétés de la matière à laquelle elle est susceptible de s'appliquer. C'est là un problème philosophique capital pour toute théorie des Idées, puisqu'il ne suffit pas de poser la dualité du sensible et de l'intelligible ; il faut encore expliquer la participation, c'est-à-dire, de quelque nom qu'on l'appelle, la déduction, la composition, ou la genèse du sensible à partir de l'intelligible. Or, les Mathématiques fournissent justement, dans certains cas, des exemples remarquables de détermination de la matière à partir de la forme : toute la théorie de la représentation des groupes abstraits a pour but de déterminer *a priori* le nombre des transformations concrètes différentes susceptibles de réaliser, de façon effective, un groupe abstrait de structure donnée. De même, la Logique mathématique contemporaine montre la liaison étroite qui existe entre les propriétés intrinsèques d'une axiomatique formelle et l'extension des champs d'individus où cette axiomatique se réalise. Nous avons donc là le spectacle de deux théories aussi distinctes que possible l'une de l'autre, la théorie de la Représentation des Groupes et la Logique mathématique, qui présentent néanmoins entre elles d'étroites analogies de structure dialectique ; celles qui leur viennent d'être, l'une et l'autre, des solutions particulières d'un même problème dialectique, celui de la détermination de la matière à partir de la forme.

J'ai indiqué plus haut que la distinction d'une Dialectique idéale et d'une Mathématique effective devait surtout être interprétée du point de vue de la genèse des Mathématiques à partir de la Dialectique. Voici ce que j'entends par là : la Dialectique, en elle-même, est problématique pure, antithétique fondamentale relative à des couples de notions qui paraissent, de prime abord, s'opposer, et à propos desquelles se pose néanmoins le problème d'une synthèse ou d'une conciliation possible. C'est ainsi par exemple que j'ai envisagé dans ma thèse le problème des rapports du local et du global, de l'extrinsèque et de l'intrinsèque, du continu et du discontinu, etc. Il se trouve alors, exactement comme dans le *Sophiste* de Platon, que les contraires ne s'opposent pas, mais qu'ils sont susceptibles de se composer entre eux, pour constituer ces mixtes que sont les Mathématiques. De là, la nécessité de ces subtilités si compliquées, de ce pittoresque imprévisible, de ces obstacles que tantôt l'on surmonte et tantôt l'on contourne, de tout ce devenir historique et contingent qui constitue la vie des Mathématiques, et qui se présente néanmoins au métaphysicien comme le prolongement nécessaire d'une Dialectique initiale. On passe insensiblement de la compréhension d'un problème dialectique à la genèse d'un univers de notions mathématiques et c'est à la reconnaissance de ce moment où l'Idée donne naissance au réel que doit, à mon sens, viser la Philosophie mathématique. J'ai essayé de montrer, dans un fascicule qui a paru à la Librairie Hermann depuis ma thèse, l'analogie de ces conceptions et de celles de Heidegger. Le prolongement de la Dialectique en Mathématique correspond, me semble-t-il, à ce que Heidegger appelle la genèse de la réalité ontique à partir de l'analyse ontologique de l'Idée. On introduit ainsi, au niveau des Idées, un ordre de l'avant et de l'après qui n'est pas le temps, mais plutôt un modèle éternel du temps, schéma d'une genèse constamment en train de se faire, ordre nécessaire de la création.

Il me semble que le problème des rapports de la théorie des Idées et de la Physique pourrait être étudié de la même façon. Considérons par exemple le problème de la *coexistence* de deux ou de plusieurs corps ; c'est là un problème purement philosophique dont nous dirons que Kant l'a plutôt posé que résolu dans la troisième catégorie de la relation. Il se trouve néanmoins que, dès que l'esprit essaie de penser ce que peut être la coexistence de plusieurs corps dans l'espace, il s'engage nécessairement dans les difficultés encore insurmontées du problème des *n* corps. Considérons encore le problème des rapports du *mouvement* et du *repos*. On peut poser abstraitement le problème de savoir si la notion de mouvement n'a de sens que par rapport à un repos absolu ou si, au contraire, il n'y a de repos que par rapport à certains changements ; mais tout effort pour résoudre de pareilles difficultés donne naissance aux subtilités de la théorie de la Relativité restreinte. On peut également se demander à laquelle des deux notions de mouvement et de repos il faut attacher un sens physique, et c'est un point où s'opposent la Mécanique classique et la Mécanique ondulatoire. Celle-là envisage l'onde comme un mouvement physique réel ; pour celle-ci au contraire, l'équation d'onde n'apparaît plus que comme un artifice destiné à mettre en lumière l'invariance physique de certaines expressions par rapport à certaines transformations. Il apparaît ainsi que les théories de Hamilton, de Einstein, de Louis de Broglie, prennent tout leur sens par référence aux notions de mouvement et de repos dont elles constitueraient la véritable dialectique. Il se peut même que ce que les physiciens appellent une crise de la Physique contemporaine, aux prises avec les difficultés des rapports du continu et du discontinu, ne soit crise que par rapport à une certaine conception assez stérile de la vie de l'esprit, où le rationnel s'identifie avec l'unité. Il semble au contraire plus fécond de se demander si la raison dans les sciences n'a pas plutôt pour objet de voir dans la complexité du réel en Mathématiques comme en Physique, un mixte, dont la nature ne pourrait s'expliquer qu'en remontant aux Idées auxquelles ce réel participe.

On voit ainsi quelle doit être la tâche de la Philosophie mathématique et même de la Philosophie des sciences en général. Il y a à édifier la théorie des Idées, et ceci exige trois sortes de recherches : celles qui ressortissent à ce que Husserl appelle l'eidétique descriptive, c'est-à-dire ici la description de ces structures idéales, incarnées dans les Mathématiques et dont la richesse est inépuisable. Le spectacle de chacune de ces structures est à chaque fois plus qu'un exemple nouveau apporté à l'appui d'une même thèse, car il n'est pas exclu qu'il soit possible, et c'est la seconde des tâches assignables à la Philosophie mathématique, d'établir une hiérarchie des Idées et une théorie de la genèse des Idées les unes à partir des autres, comme l'avait envisagé Platon. Il reste enfin, et c'est la troisième des tâches annoncées, à refaire le *Timée*, c'est-à-dire à montrer, au sein des Idées elles-mêmes, les raisons de leurs applications à l'Univers sensible.

Tels me paraissent être les buts principaux de la Philosophie mathématique.

DISCUSSION

M. Cartan. – Je suis assez embarrassé, parce que je suis un peu dans la situation de M. Jourdain qui avait l'habitude de parler en prose sans s'en douter. Les mathématiciens – au moins un certain nombre d'entre eux, parmi lesquels je me place – n'ont guère coutume de réfléchir aux principes philosophiques de leur science ; quand ils entendent un philosophe en parler, cela les intéresse, mais ils ne savent pas trop comment répondre aux considérations qu'il développe.

Évidemment, je connais la thèse de M. Cavaillès et la thèse de M. Lautman, puisque je faisais partie du jury de l'une et de l'autre, mais ma situation est différente : auparavant j'étais du bon côté de la barricade, tandis qu'aujourd'hui, je suis de l'autre côté…

Je n'ai pas bien compris quelle opposition il y avait entre les deux points de vue de M. Cavaillès et de M. Lautman, points de vue qui me semblent différents plutôt qu'opposés. J'ai l'impression que les considérations de M. Cavaillès portent sur le fond même de la pensée mathématique, tandis que les considérations de M. Lautman portent plutôt sur l'état actuel, non pas de l'ensemble des Mathématiques, mais d'un certain nombre de théories mathématiques et, à cet égard, il y a évidemment un certain nombre d'affirmations de M. Lautman qui m'intéressent particulièrement : celles qui concernent les relations entre le local et le global, par exemple. Certainement, ces relations se posent dans une partie importante des mathématiques. La théorie des fonctions, en particulier des fonctions de variables réelles, telle qu'on la conçoit depuis cinquante ans, ne peut se poser le problème du rapport entre le local et le global ; les fonctions envisagées sont trop générales pour qu'on puisse déduire leurs propriétés globales de leurs propriétés locales ; mais il y a une classe de fonctions pour lesquelles le rapport du local et du global est au fond la partie essentielle du problème : ce sont les fonctions analytiques de variables complexes dont les propriétés globales sont déterminées par les propriétés locales ; pour les fonctions quasi analytiques, qui ont été introduites récemment, il se passe quelque chose d'analogue : lorsqu'on connaît en un point les valeurs de la fonction et celles de ses dérivées successives, elle est complètement déterminée dans tout son champ d'existence.

En Géométrie – c'est surtout à la Géométrie que M. Lautman pensait – il y a aussi des problèmes extrêmement importants pour lesquels se pose la relation entre le local et le global : si nous prenons par exemple, dans un espace, un petit morceau de cet espace, est-il possible, par la connaissance de ce petit morceau, de déduire la connaissance de tout l'espace ? Bien entendu, il faut supposer que cet espace jouit de propriétés globales assez simples, sans lesquelles ce problème n'aurait pas de sens. Ce sont là, en apparence, des problèmes de Géométrie pure, mais en réalité ce sont aussi des problèmes d'analyse. Soit, par exemple, une portion d'espace riemannien ; si vous supposez que les fonctions qui interviennent pour définir cet espace sont analytiques, vous allez avoir un problème, extrêmement intéressant, qui est le suivant : connaissant un petit morceau d'espace riemannien défini analytiquement par sa forme différentielle, jusqu'à quel point peut-on en déduire les propriétés globales de cet espace ? Il peut arriver que ce petit morceau ne puisse pas être prolongé jusqu'à former un espace complet ; en général, c'est ce qui arrive. S'il peut être prolongé de manière à former un espace complet, il le peut d'une seule manière, avec certaines restrictions.

Voilà donc un problème des rapports du global et du local qui n'est pas défini simplement par son énoncé géométrique, mais qui est lié à l'existence de propriétés purement analytiques dans la définition du morceau d'espace.

On pourrait développer des considérations analogues au sujet des relations entre l'intrinsèque et l'extrinsèque. Étant donnée une surface plongée dans un certain espace, les propriétés intrinsèques supposées connues de la surface entraînent-elles des limitations des propriétés de l'espace qui la contient ? Il y a là des problèmes extrêmement intéressants ; mais on doit remarquer qu'ils dépendent, non seulement de la position géométrique du problème, mais de sa position analytique.

M. Lautman a donné un certain nombre d'autres exemples de tels problèmes : la Forme et la Matière ; la Théorie des Groupes. Tout cela est très intéressant, mais je ne sais pas jusqu'à quel point cela justifie la thèse générale de M. Lautman, car je ne comprends pas très bien ce que c'est que la Dialectique, et je suis obligé de me maintenir sur un terrain purement technique.

Je n'ai pas l'impression que les considérations de M. Lautman soient en contradiction avec celles de M. Cavaillès. J'ai l'impression que M. Lautman considère certains problèmes particuliers des Mathématiques actuelles, et un certain nombre de problèmes philosophiques. Je crois être, dans l'ensemble, d'accord avec lui, mais, malheureusement, je suis incapable de discuter avec lui sur ce terrain.

En tout cas, en ce qui concerne le caractère des Mathématiques d'avoir un développement autonome et imprévisible, je crois qu'on ne peut pas aller contre cette affirmation. Cependant l'histoire nous apprend qu'il y a eu dans l'histoire des Mathématiques – que je connais, que j'ai vécue – certaines prévisions d'avenir : il y a eu, en 1900, une conférence de Hilbert sur les problèmes futurs des Mathématiques, conférence extraordinairement remarquable, car précisément, il a mis le doigt sur les problèmes qui devaient se poser dans le développement des Mathématiques pendant cinquante ans au moins ; et il a prévu justement les problèmes les plus importants qui se sont effectivement posés.

Par contre, on pourrait trouver des conférences de savants éminents, sur l'avenir de telle ou telle branche des Mathématiques, dans lesquelles ces savants n'ont pas prévu du tout ce qui allait se passer.

Certainement le développement des Mathématiques a en lui-même quelque chose d'imprévisible et, quand on a un certain âge, on se rend compte que certaines théories, au bout de vingt, trente ou quarante ans, prennent un développement tout à fait inattendu, et que le point de vue d'où on arrive à les envisager est tout à fait différent du point de vue initial. Cependant on est bien obligé de reconnaître que ce sont des nécessités internes qui se sont révélées dans le développement ultérieur de ces théories. Je pense, par exemple, à la Topologie, cette science qui existait à peine il y a un demi-siècle, et qui prend chaque jour un aspect nouveau et un développement tout à fait inattendu, pénétrant de plus en plus profondément dans toutes les branches des Mathématiques.

M. Paul Lévy. – Je pourrais d'abord répéter ce que M. Cartan a dit tout à l'heure : je suis un peu déconcerté quand j'entends les philosophes parler de la science que j'étudie dans un langage dont je n'ai pas l'habitude ; je les suis avec un peu d'effort et je ne suis pas sûr de comprendre tout ce qu'ils disent. Je crois être à peu près sûr d'en avoir compris une partie ; mais je suis également sûr de n'avoir pas bien compris certaines choses.

Je ne peux donc pas émettre d'opinion sur l'ensemble des questions qui ont été exposées ; je ne peux que présenter quelques réflexions qui m'ont été suggérées par la conférence de M. Cavaillès, et je crois qu'elle ne sont pas à côté de la question ; si je me trompe, vous voudrez bien m'excuser.

Je crois être un peu en opposition avec M. Cavaillès ; pourtant sa conclusion m'a rassuré, lorsqu'il a dit qu'il y avait dans le devenir des Mathématiques quelques nécessités intérieures qui se révélaient.

Je crois que le développement des Mathématiques – tout en ayant une grande contingence, cela va sans dire – suppose des nécessités intérieures beaucoup plus profondes. Naturellement, il était impossible de prévoir que tel théorème devait faire son apparition à telle date de l'histoire, mais les nécessités intérieures jouent un très grand rôle, et il y a des théorèmes dont je peux vous dire : si tel savant n'avait pas trouvé telle théorie à telle époque, et si tel théorème n'avait pas été démontré telle année, il aurait été découvert dans les cinq ou dix années suivantes. Je donne, comme preuve, qu'un très grand nombre de théorèmes ont été, à très peu d'intervalle, découverts séparément par différents savants, parce qu'ils répondaient à une nécessité du développement de la pensée mathématique à cette époque.

Par conséquent, cela me permet de penser que, lorsqu'une certaine théorie mathématique a commencé, un esprit supérieur peut prévoir un peu dans quel sens elle va se développer. Je prends, comme exemple concret, une des théories mathématiques dont l'aspect philosophique a le plus attiré l'attention : la théorie de l'Intégrale, telle que la théorie moderne des Ensembles a permis de la construire. C'est M. Lebesgue qui a donné à la notion d'intégrale sa forme définitive, et, actuellement, vous savez tous que cette intégrale est un outil essentiel des Mathématiques. Il est à ce point indispensable que, sans aucun doute, si M. Lebesgue n'avait pas existé, son intégrale serait tout de même, actuellement, depuis longtemps découverte. je ne pense pas diminuer le mérite de M. Lebesgue, je crois, au contraire, que je ne fais que l'augmenter, en disant qu'il a mis en évidence une notion qui était nécessaire au progrès ultérieur de la science. Est-ce que M. Émile Borel, qui travaillait déjà dans cet ordre d'idées, aurait mis cette théorie au point ? Est-ce à un autre de ses élèves qu'il aurait été donné de le faire ? Je n'en sais rien. Mais, après les travaux de Jordan et de M. Borel, étant donné le niveau actuel atteint par l'ensemble de l'humanité et le nombre de chercheurs spécialisés dans le domaine des Mathématiques, je crois qu'il était nécessaire et fatal que, dans un délai de dix ou quinze ans, la théorie de l'Intégrale de Lebesgue fût mise au pont. Et, dans cet ordre d'idées, je crois, dans une certaine mesure, que le développement des Mathématiques est prévisible.

Bien entendu, il ne faut pas nier que, d'autre part, certaines découvertes constituent dans le développement de la science un bond imprévisible ; venues avant l'heure, il arrive que leur importance ne soit reconnue qu'après un temps plus ou moins long. D'autre part, il est certain qu'il y a, parmi les mathématiciens, des géomètres et des algébristes ; les uns évoluent dans une branche des mathématiques, les autres dans une autre ; il eût été concevable que l'espèce humaine ne contienne que des géomètres, et non des algébristes, ou inversement. Il est de même possible qu'un développement ultérieur de l'humanité permette à certains cerveaux de se consacrer à certaines branches des Mathématiques que nous ne pouvons pas concevoir actuellement.

D'autre part, il y a un point sur lequel les deux conférenciers se sont trouvés d'accord, et, dans la mesure où je les ai compris, j'en suis un peu surpris. Pour moi, les mathématiques n'auraient pas de raison d'être si leur objet était considéré comme inexistant. Lorsque je dis que le produit de deux nombres est indépendant de leur ordre, c'est quelque chose qui est vrai, indépendamment du fait que je l'énonce ; ce n'est pas vrai seulement dans ma pensée.

Je prends un exemple simple, qui peut être vérifié objectivement : j'ai des cases rectangulaires comprenant un certain nombre de rangées et de colonnes ; j'ai un certain nombre de billes et je veux en mettre une dans chaque case : eh bien, le même nombre de billes suffira, suivant que je remplirai les cases par rangées, ou par colonnes. Je prends cet exemple très simple, car, dans d'autres, il serait difficile de trouver une interprétation matérielle permettant de vérifier l'exactitude d'un théorème.

Pour moi, le théorème préexiste : quand je cherche à démontrer si tel énoncé est vrai ou faux, je suis convaincu qu'il est à l'avance vrai ou faux, indépendamment des chances que j'ai de le découvrir.

Prenons un autre problème : l'hypothèse de Riemann sur sa fonction *ksi* [lettre grecque] (*s*) est-elle exacte ou fausse ? Je crois que la plupart des mathématiciens sont convaincus qu'elle est exacte, bien que nul ne l'ait démontrée ; et je pense que tous les mathématiciens qui sont dans cette salle seront d'accord pour dire que nous n'y arriverons peut-être jamais, mais que cette hypothèse est en elle-même vraie ou fausse, même si nous n'arrivons pas à savoir si elle est vraie ou fausse.

Si je comprends bien votre langage, vous exprimerez ma position en disant que je suis platonicien ; mais je n'arrive pas à concevoir ce qui pourrait me faire abandonner ce point de vue.

M. Fréchet. – Je commencerai par m'associer à une observation qui vient d'être faite avant moi successivement par MM. Cartan et Lévy : pour un mathématicien qui consacre le principal de son activité aux Mathématiques, il est extrêmement difficile de suivre dans toutes leurs nuances les exposés, pourtant si instructifs, de MM. Lautman et Cavaillès. La difficulté pour les discuter n'est peut-être pas tant dans ce qu'ils ont dit que dans la nécessité préalable de comprendre exactement ce qu'ils ont voulu dire.

Avant d'entrer dans quelques détails, je tiens cependant à dire que, de toute façon, j'admire la virtuosité avec laquelle ils manient non seulement le langage philosophique, mais aussi le langage mathématique. Nous sommes, nous, plongés dans les Mathématiques, et, – tout au moins en ce qui me concerne, – tout à fait ignorants des subtilités du langage philosophique et des nuances qui différencient certaines théories philosophiques : tandis que nos distingués collègues semblent, au contraire, évoluer tous deux avec aisance, non seulement dans la Philosophie, mais dans la Mathématique. Enfin, ils savent, sur la technique, sur les résultats de certaines parties des Mathématiques, beaucoup de choses que, personnellement, j'ignore.

Précisément pour les raisons que j'ai indiquées plus haut, je ne voudras pas reprendre un par un les différents sujets qu'ils ont traités. Mais il y a deux ou trois points sur lesquels j'ai peut-être compris leur thèse, et sur lesquels je voudrais dire un mot.

Il s'agit d'abord de deux questions qui sont connexes, au moins dans mon esprit, et pour lesquelles je pourrais peut-être apporter une réponse : M. Cavaillès a indiqué qu'à son avis les Mathématiques sont une science autonome. Personnellement, je ne le crois pas. Tout dépend d'abord, évidemment, de ce qu'on appelle «les Mathématiques» ; beaucoup de personnes appellent «Mathématiques» l'ensemble des théories déductives qui permettent de passer d'un ensemble de propriétés et d'axiomes à certains théorèmes; C'est, sans doute, la partie la plus spécifique des Mathématiques ; mais il semble que, si l'on s'arrêtait là, non seulement les mathématiques se réduiraient à une machine à transformations, et dans ce cas leur rôle serait encore très utile, mais qu'elles se borneraient à transformer, pour ainsi dire, du vide en du vide. Je crois que, pour justifier l'existence des Mathématiques, il est indispensable de faire voir en elles un instrument qui a été inventé pour aider l'homme à connaître la nature, à la comprendre et à prévoir le cours des phénomènes. Les notions qui me paraissent les plus fondamentales en Mathématiques sont toutes des notions qui ne proviennent pas, à mon avis, de notre intelligence, de notre esprit, mais qui nous sont imposées par le monde extérieur.

Je citerai, par exemple, le nombre entier, la droite, le plan, les idées de vitesse, de force, certaines transformations comme la symétrie, la similitude. Ce sont des notions qui n'étaient pas présentes dans notre esprit, mais qui nous ont été imposées par la considération du monde qui nous entoure. Nous avons traduit ces réalités extérieures par des mots, des axiomes, des définitions, – qui ne les représentaient qu'approximativement, bien entendu, qui étaient plus simples, pour être plus maniables, – mais qui avaient tout de même leur source dans le monde extérieur.

À ces notions fondamentales que l'on trouve à l'origine des Mathématiques s'en ajoutent constamment d'autres, introduites par le développement des sciences physiques. Les notions de travail, de moment, d'une force, par exemple, n'ont été définies, à ma connaissance, que depuis deux ou trois siècles. Beaucoup d'autres notions que je pourrais indiquer, comme les équations différentielles, n'ont été introduites qu'à l'époque moderne, par suite du développement de la physique, de la mécanique, de l'astronomie, etc.

À côté de ces notions dont l'étude nous est, pour ainsi dire, imposée, d'autres notions, d'une nature différente, ont été introduites en Mathématiques : ce sont celles qui sont dues à «l'activité interne» de cette science. Elles me paraissent beaucoup moins fondamentales que les autres, ayant été imaginées pour faciliter la tâche du mathématicien, en vue de la résolution des problèmes posés du dehors.

Pour donner des exemples élémentaires, citons la transformation par inversion, la transformation par polaires réciproques ; voilà deux transformations qui, autant que je sache, n'ont pas été imposées par des exemples pris dans la nature, ce sont des artifices de mathématiciens qui fournissent des moyens d'investigation.

De même, je pense que l'introduction des nombres complexes a fourni un instrument extrêmement puissant qui permet d'obtenir beaucoup plus rapidement certaines propositions concernant les nombres réels.

On pourrait citer bien d'autres exemples : en Géométrie élémentaire, on introduit la considération des trièdres supplémentaires. Là encore, je ne crois pas qu'il y ait de phénomène réel qui nous impose la considération de ces trièdres supplémentaires, mais elle fournit un moyen commode dont on use en Géométrie élémentaire pour transformer une proposition dans une autre.

Je vois, par conséquent, dans les exemples que je viens de citer, deux catégories de notions : les unes qui entrent bien dans le cadre d'une Mathématique autonome, et d'autres, au contraire, qui ne me paraissent pas conciliables avec l'idée d'une autonomie des Mathématiques.

Et ceci me conduit, au contraire, à me trouver d'accord avec M. Cavaillès, pour des raisons différentes des siennes, il est vrai, sur le caractère imprévisible des mathématiques, en me plaçant à un point de vue qui, du reste, est tout à fait conciliable avec celui présenté par M. Paul Lévy et qui paraîtrait conduire à une conclusion contraire.

M. Lévy a indiqué de nombreux exemples où des problèmes ne pouvaient manquer d'être résolus par les Mathématiques ; et, en ce sens, les Mathématiques étaient prévisibles, parce qu'il s'agissait de problèmes que les mathématiciens s'étaient posés *pour le développement interne* des Mathématiques.

Mais il y a constamment, dans le développement des sciences extérieures aux Mathématiques, des problèmes qui se posent, qui s'imposent aux mathématiciens, que l'on demande aux mathématiciens de résoudre et qui leur donnent de nouvelles idées, les contraignant à introduire de nouvelles notions. Et celles-là sont imprévisibles. Nous ne savons pas, nous ne pouvons même pas imaginer de quelle nature seront les problèmes que, dans cinquante ans, la technique ou la physique pourra poser aux mathématiciens ; peut-être aurons-nous les moyens de résoudre ces problèmes en puisant dans l'arsenal existant des théories mathématiques, peut-être faudra-t-il créer de nouveaux outils mathématiques ; il y a là une impulsion venue du dehors, et dont les interventions sont de nature imprévisible.

Voilà ce que je voulais dire au sujet de l'autonomie et de la non-prévisibilité des Mathématiques[1].

Quant à la thèse de M. Lautman, j'ai un peu d'hésitation pour en commenter la plus grande partie, car j'y trouve différentes interprétations possibles : certaines me paraissent tout à fait immédiates et acceptables, mais ne me semblent pas conciliables avec la conclusion. Cela tient probablement à ce que je n 'ai pas bien compris.

Je vois, au début, des phrases comme celle-ci : «L'établissement des relations mathématiques effectives m'apparaît, en effet, comme rationnellement postérieur au problème de la possibilité de pareilles liaisons en général.»

M. Lautman a, du reste, eu soin d'indiquer que, pour lui, il ne s'agit pas d'un point de vue historique. Et, en effet, au point de vue historique, la réponse n'est pas douteuse : l'établissement des relations mathématiques effectives est au contraire certainement *antérieur* au problème de la possibilité de pareilles liaisons.

Alors, que veut dire exactement : «Rationnellement postérieur ?» Je pose la même question pour la phrase : «On voit en quel sens on peut parler de la participation de théories mathématiques distinctes à une dialectique commune qui les domine.»

Considérant ces deux phrases et le texte qui les entoure, il me semble qu'il y a une réponse à laquelle on arriverait tout naturellement : c'est que les différentes théories mathématiques (surtout les démonstrations contenues dans ces théories) consistent en raisonnements appliqués à certaines circonstances particulières, mais qu'elles relèvent toutes d'une même théorie générale, que M. Lautman désigne, je crois, sous le nom de théorie des Idées, et que les mathématiciens appelleraient probablement : Logique.

S'il en était ainsi, je crois que tout le monde serait d'accord, mais ce serait tellement évident que je ne crois pas que M. Lautman ait voulu dire précisément cela. En tout cas, ce serait inconciliable avec la fin

---

[1]. J'ai développé entre autres ces deux points dans un rapport présenté à Zurich en décembre 1938 sur «la question *des fondements des Mathématiques* et l'Analyse générale» à un colloque organisé par l'*Institut international de coopération intellectuelle* et dont les débats seront publiés par les soins de cet Institut.

de son exposé : «La pensée mathématique a donc le rôle éminent d'offrir au philosophe le spectacle constamment recommencé de la genèse du Réel à partir de l'Idée.»

Je ne sais pas exactement ce que cela veut dire, mais d'après les réflexions que j'ai faites tout à l'heure, il me semble que c'est le réel qui a engendré l'idée, tout au moins en ce qui concerne les Mathématiques ; ce sont les exigences du réel qui ont posé des problèmes mathématiques, qui ont amené les mathématiciens à se servir de la logique et à formuler certaines définitions, certains axiomes.

Je vois bien, par conséquent, la genèse de l'Idée à partir du réel, mais j'avoue que je ne comprends pas la position inverse. Peut-être la suite de la discussion élucidera-t-elle ce point[2] ?

M. Ehresmann. – J'ai noté quelques réflexions qui se rapportent à la thèse de M. Lautman. Il me paraît extrêmement intéressant d'y voir dégagés des problèmes généraux que l'on retrouve dans plusieurs théories mathématiques. Mais je cite une des phrases les plus caractéristiques : «Une des thèses essentielles de cet ouvrage affirme la nécessité de séparer la conception supra-mathématique du problème des liaisons que soutiennent entre elles certaines notions, et la découverte mathématique de ces liaisons effectives au sein d'une théorie.»

Si j'ai bien compris, il ne serait pas possible, dans ce domaine d'une dialectique supra-mathématique, de préciser et d'étudier la nature de ces relations entre les idées générales. Le philosophe pourrait seulement mettre en évidence l'urgence du problème.

Il me semble que, si nous avons le souci de parler de ces idées générales, nous concevons déjà d'une façon vague l'existence de certaines relations générales entre ces idées ; dès lors, nous ne pouvons pas nous arrêter à mi-chemin ; nous devons nous poser le

---

[2]. Au moment de corriger la sténographie de mon intervention, je constate qu'en effet la difficulté principale, pour moi, était bien decomprendre d'une façon précise et exacte le langage de M. Lautman. Comme celui-ci l'a indiqué dans sa réponse, ce qu'il entend par le réel ne correspod nullement au concret, au sensible, avec lesquels j'avais identifié le réel.

Faute de cette identification, mon objection tombe ; mais elle n'a pas été inutile pour donner une fois de plus un exemple précis de l'importance d'une interprétation univoque du langage employé. Je me suis laissé dire par des philosophes que cette difficulté – qui apparaît plus clairement dans les débats entre philosophes et mathématiciens – n'est pas absente des discussions où se rencontrent seulement des philosophes de profession.

problème vraiment mathématique qui consiste à formuler explicitement ces relations générales entre les idées considérées.

Je crois qu'on peut donner de ce problème une solution satisfaisante en ce qui concerne les relations entre le tout et ses parties; le global et le local, l'intrinsèque et l'extrinsèque, etc.… Ainsi, les relations entre un ensemble fondamental et ses parties forment précisément l'objet d'un chapitre de la théorie abstraite des Ensembles. Entre les parties d'un ensemble, on a les relations suivantes : *inclusion* d'une partie dans une autre, *intersection* de deux parties, *réunion* de deux parties, partie *complémentaire* d'une partie. Dans l'ensemble des parties d'un ensemble fondamental, ces relations donnent lieu à tout un calcul, à savoir l'Algèbre de Boole. Voilà un certain nombre de relations générales qu'on retrouve dans n'importe quelle théorie mathématique.

Étant donné un ensemble fondamental muni d'une structure mathématique *particulière*, par exemple une structure de groupe ou une structure d'espace topologique, le rapport entre cet Ensemble fondamental et une de ses parties se traduit par la notion *mathématique* de structure induite sur la partie. Je ne peux pas préciser davantage, parce qu'il faudrait d'abord définir la notion générale de structure mathématique. Le problème des relations entre propriétés intrinsèques et extrinsèques et le problème des propriétés de situation d'une partie dans un ensemble fondamental, ce n'est pas autre chose que le problème des relations entre la structure de l'ensemble fondamental et les structures induites sur une partie et sur la partie complémentaire.

En ce qui concerne les notions de *local* et de *global*, il me semble que la notion de local n'a de sens que pour une structure d'espace topologique : comme on a alors la notion de voisinage d'un point, la notion de propriété locale en un point pourra se déduire de la notion de structure induite sur un voisinage *quelconque* du point. Nous arrivons de nouveau à une notion purement mathématique.

On pourrait multiplier les exemples. Je pense que les problèmes généraux soulevés par M. Lautman peuvent s'énoncer en termes mathématiques. Et ceci rejoint la pensée exprimée dans le résumé de la thèse de M. Cavaillès : «Parler des Mathématiques ne peut être que les refaire.»

M. Hyppolite. – Je dois tout d'abord avouer que, si j'ai parfaitement compris la thèse de M. Cavaillès, j'ai beaucoup moins bien compris celle de M. Lautman.

Ce qui m'a frappé dans l'exposé de M. Lautman, c'est l'ambiguïté du mot «dialectique»; et les sens différents dans lesquels ce mot a été employé. Il me semble que – appliqué aux Mathématiques – le mot «dialectique» a été utilisé dans trois sens différents ou, du moins, j'ai cru discerner trois sens assez différents du terme.

Avec le premier sens du terme, M. Lautman rejoindrait la thèse de Cavaillès – leurs deux conceptions, sur ce point, seraient voisines : la dialectique serait l'expérience même de la vie des Mathématiques, elle concilierait, en quelque sorte, une nécessité de développement dont on a déjà parlé, et la contingence apparente de ce développement.

Dans un autre sens, la dialectique de M. Lautman est une sorte de problématique, au sens moderne du terme, quelque chose de tout à fait différent ; je crois que c'est surtout dans ce sens, d'ailleurs, qu'il emploie le mot ; cette dialectique est une problématique, une sorte d'ouverture sur des problèmes théoriques que le mathématicien viendrait incarner dans ses recherches.

Et, dans un troisième sens, – c'est justement là que l'ambiguïté me paraît la plus forte, – M. Lautman reprend le mot «dialectique» dans le sens où les philosophes l'ont pris le plus souvent. Il s'agit en effet d'une dialectique de «la forme et de la matière, du local et du global», etc. Il me semble, pour ma part, que, si on voulait à tout prix employer le mot «dialectique» dans la philosophie des Mathématiques, il faudrait l'employer uniquement dans le premier sens, c'est-à-dire dans le sens d'une vie de l'expérience mathématique au cours de son histoire.

Je prends un exemple qui m'a beaucoup frappé : c'est le développement de la théorie des Équations, de Viète à Galois. Je pense que, s'il y a une nécessité – comme le disait M. Cartan – dans le développement des Mathématiques, cette nécessité apparaît très nettement dans le développement de cette théorie de Viète à Descartes, mais elle n'apparaît plus du tout quand il s'agit des découvertes de Galois. Il semble qu'il y a, dans la théorie mathématique, quelque chose de tout à fait nouveau, quelque chose d'inattendu qui a été introduit et qui ne se laisse pas prévoir exactement par le développement antérieur des Mathématiques. C'est une chose qui m'a beaucoup frappé, en étudiant la décomposition d'un groupe en sous-groupes invariants chez Galois, et l'application de ce problème à la résolution algébrique des équations après avoir étudié le problème de la théorie des Équations algébriques chez Descartes. Il me semble que dans ce cas nous pouvons à la fois apercevoir un développement nécessaire, puis l'apparition d'une méthode tout à fait nouvelle dans le problème, une création imprévisible, sinon après coup.

Il y a une autre remarque que m'inspire ce problème de l'évolution de la théorie des Équations de Viète à Galois : on pourrait exprimer vulgairement la chose en disant que nous ne savons pas défaire ce que nous savons faire ou que l'activité intellectuelle se dépasse elle-même dans ce qu'elle engendre. Les équations données paraissent des êtres mathématiques énigmatiques d'une certaine façon. Nous savons les construire, par les produits de binômes, comme le fit Harriot ; nous pouvons arriver ainsi à construire des équations d'un degré quelconque ; mais nous sommes incapables ensuite – le problème de la division après celui de la multiplication – de défaire toute équation donnée.

Il a fallu, pour tenter cette analyse en général, introduire des notions nouvelles qui, d'ailleurs, se laissent comprendre d'une certaine façon, ainsi par exemple les imaginaires prévues par Descartes : Descartes, en 1637, disait explicitement qu'il y avait n racines de l'équation du n^e degré positives, négatives ou imaginaires ; ce qui est une prévision de ce qui est apparu beaucoup plus tard.

Je crois, en résumé, que je serais plutôt d'accord avec M. Cavaillès qui veut voir dans les Mathématiques une vie autonome essentielle ; on pourrait penser aussi que la nécessité du développement des Mathématiques et la contingence historique doivent se concilier dans cette «vie des Mathématiques».

Quant à la thèse de M. Lautman, on pourrait craindre en l'adoptant, de voir les notions mathématiques s'évaporer, d'une certaine façon, dans de purs problèmes théoriques qui les dépassent : comme la forme et la matière, le local et le global. L'originalité même de ces «Mathématiques» risquerait de disparaître.

Je n'ai pas très bien compris dans la thèse de M. Lautman si le mathématicien finissait par retrouver ces problèmes ou si c'était au contraire – et ce serait la problématique – une exigence idéale de ces problèmes, qui donnée d'abord viendrait s'incarner ensuite dans les Mathématiques.

Il y a là une ambiguïté ; mais peut-être ai-je mal compris la thèse de M. Lautman.

M. Schrecker. – Après tant de considérations mathématiques, il sera peut-être permis à un philosophe de présenter quelques réflexions qui ne respectent pas absolument l'autonomie dans laquelle se cantonnent nécessairement les mathématiciens. Elles ont pour objet l'impossibilité affirmée par M. Cavaillès, de définir les Mathématiques. D'après lui, toute définition des Mathématiques aboutirait à une absurdité, parce qu'il serait impossible de définir les Mathématiques par quelque chose qu'elles ne sont pas. Mais il me semble que cette même difficulté se trouve dans toutes les sciences : aucune science n'est susceptible d'une définition par ses propres moyens et méthodes, toujours faut-il se mettre au-dehors d'une science pour pouvoir arriver à une définition de son domaine.

Mais cela ne veut pas dire qu'on définirait nécessairement les Mathématiques par quelque chose qu'elles ne sont pas. Les Mathématiques sont une science : voilà le premier élément d'une définition et qui n'est certainement pas hétéronome. Elles sont une science hypothético-déductive : voilà un deuxième élément. Mais il est vrai qu'on ne peut pas les définir tout en restant dans le formalisme mathématique et, en respectant, dans la définition, l'autonomie du domaine mathématique. Le formalisme et l'autonomie valent pour tous les problèmes mathématiques ; cependant la définition des Mathématiques n'est pas elle-même un problème mathématique ; c'est un problème qui se pose à la théorie des sciences, qui n'est nullement obligée de s'insérer dans la cohérence du formalisme mathématique même.

Aussi la réfutation du caractère hypothético-déductif des Mathématiques me semble-t-elle tourner dans un cercle, parce que cette réfutation se sert elle-même de la méthode hypothético-déductive. On s'efforce de donner cette réfutation par le moyen d'un raisonnement qui, étant déductif, est nécessairement aussi hypothétique, parce qu'il suppose l'efficacité du formalisme par lequel il opère. En niant donc le caractère hypothético-déductif des Mathématiques, on tourne dans un cercle fermé ou dans un système clos qui n'a ni entrée ni sortie…

M. Cavaillès. – Je n'ai jamais nié ce caractère, j'ai seulement dit qu'on ne pouvait le définir que par là, parce qu'il faut employer des théories mathématiques.

M. Schrecker. – Mais il est évident que, si l'on essaye de définir les Mathématiques en employant les théories mathématiques, on n'y arrivera jamais. Si, au contraire, on se décide à les définir par d'autres moyens, en s'émancipant du formalisme et en employant des méthodes historiques ou philosophiques, il paraît possible d'aboutir. Et cela d'autant plus que, sans aucun doute, nous savons distinguer la Mathématique des autres sciences, lorsque nous entreprenons son histoire ou lorsque nous la considérons comme objet de la Philosophie.

Certains grands mathématiciens ont proposé une définition qui, si elle n'est pas absolument satisfaisante, me paraît cependant être sur la bonne voie. Ainsi Bolzano a défini les Mathématiques comme la science des lois générales que toutes les choses possibles suivent nécessairement. Et H. Weyl a proposé une définition qui n'en diffère pas essentiellement. Il ne semble donc pas que le philosophe soit obligé, en face du problème de la définition des Mathématiques, à la résignation que lui demande M. Cavaillès.

M. Chabauty revient sur la remarque de M. Cartan, que les thèmes dialectiques envisagés par M. Lautman ne se rencontrent que dans certaines parties des Mathématiques modernes. On en trouverait peu d'exemples dans les travaux des «ensemblistes». Quand on a effectivement reconnu un de ces thèmes dans certaines démarches des Mathématiques, il serait peut-être intéressant de voir quelles conditions initiales, quels axiomes imposés aux ensembles considérés ont permis ce caractère commun des théories considérées.

M. Dubreil. – J'ai été particulièrement intéressé par ce qu'a dit M. Cavaillès sur l'effort qu'on fait les mathématiciens pour réfléchir sur leur propre science, et sur une des difficultés qu'ils ont alors rencontrées : pour étudier la non-contradiction d'un système d'axiomes, il faut faire intervenir des théories mathématiques qui sont d'un niveau plus élevé. Par exemple, pour établir la non-contradiction de l'Arithmétique, on utilise l'induction transfinie.

Je me demande si cette difficulté n'est pas plus apparente que réelle et si la puissance des moyens nécessaires pour établir la non-contradiction d'un système d'axiomes ne met pas plutôt en lumière la nature profonde et la portée véritable de ces axiomes. Reprenons l'exemple des nombres entiers : il n'est peut-être pas excessif de dire que, si on veut épuiser le contenu *mathématique* de cette notion, on est conduit à la rattacher à celle d'ensemble bien ordonné.

Portons en effet notre attention non pas sur les entiers naturels considérés individuellement, mais sur l'*ensemble* de ces nombres. Cet ensemble est ordonné, et même bien ordonné ; de plus, chaque élément y admet un antécédent. Comme les notions d'ensemble, d'ordre, de bon ordre et d'antécédent sont logiquement indépendantes de celle d'entier naturel, considérons *a priori* les ensembles bien ordonnée où chaque élément admet un antécédent : deux possibilités se présentent, suivant que l'ensemble admet ou non un dernier élément ; nous le dirons fini dans le premier cas, dénombrable dans le second. En partant de ces définitions, on voit sans peine que deux ensembles dénombrables quelconques ont même puissance et que tout ensemble fini a même puissance qu'un certain segment d'un ensemble dénombrable. L'ensemble des entiers naturels apparaît ainsi comme un ensemble dénombrable choisi une fois pour toutes , mais quelconque, aux segments duquel on compare les ensembles finis. Des notions de réunion et de produit d'ensembles, découlent immédiatement, avec leurs propriétés, les opérations sur les entiers naturels.

On voit qu'un petit nombre de propriétés remarquables caractérisent les ensembles finis et les ensembles dénombrables, en particulier l'ensemble des entiers naturels, dans la classe plus générale des ensembles bien ordonnés. Nous avons aussi mis en évidence un fait qui, si l'on y réfléchit, semble assez naturel : comme tant d'autres ensembles considérés en Algèbre, l'ensemble des entiers n'est en réalité défini qu'à un isomorphisme près.

M. Cavaillès. – Je répondrai, si vous voulez bien, dans l'ordre inverse des interventions.

À Dubreil, je répondrai d'une façon très simple : Dubreil n'est pas le seul à dire que ce qu'a découvert Gödel devait fatalement être trouvé. Oui, mais, quand Gödel a présenté son Mémoire, personne ne se doutait qu'une pareille chose était possible. On a travaillé, autour de Hilbert, de von Neumann, que j'ai cités, on a travaillé pendant des années pour tâcher de démontrer avec des moyens finis la non-contradiction de l'Arithmétique, sans faire appel à l'induction transfinie. Von Neumann lui-même a été très surpris du résultat de Gödel.

Quant à la priorité entre notions de nombres entiers et ensembles bien ordonnés ou dénombrables, c'est une question de mathématicien, je ne me permettrai pas de la résoudre moi-même ; mon humble opinion est que la notion de nombre entier est la première, et ceci me semble confirmé également par les travaux, par exemple, de von Neumann sur l'axiomatisation de la théorie des Ensembles où, préalablement à la notion d'ensemble bien ordonné, se trouve ce qu'il appelle la notion de nombrement, c'est-à-dire une extension de la notion d'entier, par mise en correspondance chaque fois d'un objet avec le système des objets déjà numérotés ; en prolongeant ainsi, on arrive à la notion de nombrement transfini.

Cela n'a qu'un rapport très vague avec le résultat de Gödel. Il s'agissait de démontrer s'il était possible, en utilisant l'Arithmétique finie, l'axiome d'induction complète ordinaire (et non l'induction complète générale) ; de faire apparaître une certaine propriété dans les symboles : la non-contradiction arithmétique. Gödel a réussi à démontrer que c'était impossible. C'est un résultat considérable. Il y a un mois environ, Gödel a introduit un nouveau résultat considérable : la possibilité de démontrer, en utilisant les axiomes de la théorie des Ensembles – sans l'axiome de choix – la non-contradiction avec ces axiomes de l'axiome de choix et même de l'hypothèse du continu.

Si je cite ce nouvel exemple, c'est pour montrer que l'élargissement de ces procédés méta-mathématiques permet d'assurer – si on se donne des procédés radicalement nouveaux – des théories de plus en plus vastes.

Pour M. Schrecker, je ne sais pas s'il est satisfait par sa définition des Mathématiques, il faudrait demander aux mathématiciens ce qu'ils en pensent. Si quelqu'un n'a jamais fait de Mathématiques et qu'on lui dise : c'est une science déductive, je ne crois pas que cela lui donnera l'idée des mathématiques.

Ce que je veux dire est ceci : qu'est-ce que nous pensons effectivement quand nous parlons de science, et de science déductive ? Il n'y a qu'un moyen de penser quelque chose déductivement, c'est de faire des Mathématiques. Ici, je touche un peu au problème que je voulais écarter, et vous allez me dire que la définition d'une science déductive est une question logique. Je ne veux pas entrer dans ce débat, mais, si nous voulons savoir ce qu'est une déduction, nous n'avons qu'un moyen : faire des Mathématiques; et les processus logiques qu'on appelle déductifs sont une combinatoire mathématique très élémentaire.

J'ajoute que ceci est très important ; je peux invoquer le témoignage de Carnap, qui était partisan de la réduction de toute notion mathématique à une notion logique ; il a pourtant dû préciser, dans sa *Logische Syntax der Sprache*, que maintenant il disait : le sens d'un signe, c'est son mode d'emploi. Il est impossible de donner un sens complet à la notion de déduction indépendamment du développement mathématique. De plus, si vous vous bornez, par déduction, au calcul des propositions ou des prédicats, vous n'aurez pas l'axiome d'induction complète, et cela ne voudra rien dire de dire : «les Mathématiques sont une science déductive», puisque l'axiome d'induction complète, comme le disait Poincaré, comme l'a repris Hilbert, c'est l'essence même de la vie mathématique.

Avec ce que m'a dit M. Fréchet, je regrette d'être en complet désaccord.

Je ne cherche pas à définir les Mathématiques, mais, au moyen des Mathématiques, à savoir ce que cela veut dire que connaître, penser ; c'est au fond, très modestement repris, le problème que posait Kant. La connaissance mathématique est centrale pour savoir ce qu'est la connaissance.

M. Fréchet me dit : «il y a des notions qui sont qui sont prises au monde réel et d'autres notions qui sont ajoutées par le mathématicien». Je réponds que je ne comprends pas ce qu'il veut dire, parce que je ne sais pas ce que c'est que connaître le monde réel, si ce n'est faire des Mathématiques sur le monde réel.

Qu'appelez-vous monde réel ? Je ne suis pas idéaliste, je crois à ce qui est vécu. Pour penser un plan, est-ce que vous le vivez ? Qu'est-ce que je pense, quand je dis que je pense cette salle ? Ou bien je parlerai d'impressions vécues, rigoureusement intraduisibles, rigoureusement inutilisables au moyen d'une règle, ou bien je ferai la Géométrie de cette salle et je ferai des Mathématiques. Que pensez-vous lorsque vous pensez un plan ? Les propriétés géométriques de ce plan, la symétrie ?

Notre désaccord vient de ce que je n'ai pas assez exprimé ma pensée, je sens toute mon insuffisance.

J'ai parlé d'une solidarité à partir des gestes sensibles. Il n'y a pas, d'une part, un monde sensible qui serait donné, et, d'autre part, le monde du mathématicien au-dehors. La symétrie du plan, par exemple, coïncide avec ce caractère de permutation qui est une des propriétés que j'expérimente dans le monde sensible.

M. Fréchet. – Ce caractère m'est révélé par le monde sensible.

M. Cavaillès. – Hilbert disait qu'il n'y a jamais de pensée mathématique sans usage de signes, sans travail sensible sur les signes. Je m'excuse de dire cela, je suppose que les mathématiciens sont d'accord avec moi pour dire qu'ils expérimentent sur les signes qu'ils ont : il y a, dans une formule, une sorte d'appel. «Qui pourrait se passer du cercle avec son centre, de la croix des axes de coordonnées ? Les signes arithmétiques sont des figures écrites, les figures géométriques des formules dessinées et il serait aussi impossible à un mathématicien de s'en passer que d'ignorer les parenthèses en écrivant.»

Je cite de mémoire le très bel article de Hilbert là-dessus – antérieur à la guerre, c'est du premier Hilbert. – Cet article étudie les expériences inconscientes sur les relations possibles, l'usage possible de certains signes : je sais l'usage que je peux en faire, il y a une possibilité d'expérimentation ; nous ne pouvons pas définir exhaustivement l'objet mathématique indépendamment de la mise en œuvre de l'objet dans le monde sensible.

Je crois que ce point de départ n'est jamais quitté, en ce sens qu'il y a une solidarité interne et que, chaque fois que nous substituons à un objet mathématique moins bien pensé des objets plus pensés, c'est-à-dire que nous séparons ce qui était uni simplement accidentellement, par le processus que j'ai indiqué, dans cette mesure-là tout de même, nous ne quittons pas le monde sensible.

Mais il y a autonomie. En effet : 1° Les questions que pose la pratique directe en son unification (Physique théorique) ne prennent sens et forme qu'en se transformant en questions mathématiques, c'est-à-dire en s'insérant dans le devenir de la Mathématique pure. 2° Cette insertion ne provoque pas de rupture : la Physique n'agit que comme révélateur occasionnel : en réalité le problème était latent – difficultés internes, exigence de dépassement d'un système de notions trop sommaires – dans le tissu de la substance mathématique. Ici encore je peux invoquer l'histoire : une étude assez fine montrerait toujours, pour tous les exemples de services rendus par la Physique aux mathématiques, qu'il y a une nécessité interne, que la Physique n'est là que l'occasion. Je crois qu'il est essentiel, si on veut comprendre – et là-dessus il me semble que le désaccord est complet, mais ceci a au moins un avantage, c'est qu'on peut décider : bien entendu, nous ne le ferons pas ici – je crois qu'il est essentiel de voir, dans les notions utilisées par le mathématicien pour résoudre les problèmes, le résultat d'une exigence qui se trouvait déjà dans le système antérieur.

Il est possible, parce que le mathématicien est paresseux, ou pour des raisons extrinsèques, qu'il ne résolve pas certains problèmes, qu'il cohabite avec des difficultés, mais je ne crois pas que l'on puisse, pour cela, nier le rôle de la nécessité interne.

Il me semble que M. Paul Lévy me faisait à peu près la même objection.

M. Paul Lévy. – J'ai voulu exprimer l'idée qu'il y avait quelque chose d'existant *a priori*, indépendamment de la manière dont on le découvre.

M. Cavaillès. – Ici encore, je me suis exprimé d'une façon insuffisante : je ne dis pas du tout que ces notions soient dépendantes d'un ordre historique, je crois qu'elles sont exigées par les problèmes.

Lorsque nous avons utilisé des nombres entiers, il est évident que nous poserons le produit comme commutatif ; il y aura d'autres cas où nous emploierons des produits non commutatifs.

Par suite, quand vous dites : «Étant donné un problème, il y a une solution» – «Cherche, tu la trouveras», comme disait Hilbert ; c'est ce que j'ai indiqué comme la projection du système des gestes mathématiciens. Le mathématicien historique, contingent, peut s'arrêter, être fatigué, mais l'exigence d'un problème impose le geste qui le résoudra.

C'est, si vous voulez, ce que j'avais indiqué en disant que c'est la réalité de la connaissance, ce qui du point de vue même d'une anthropologie ou d'une philosophie de la constitution humaine, est le miracle extraordinaire de la destinée humaine ; indépendamment de la vie dans le monde vécu, il se présente des problèmes qui exigent des solutions et entraînent au-dehors de ce qui est par un enchaînement nécessaire.

Ici, je ne serais pas très loin de Lautman, sauf le mot de «réel» qui me gêne ; il s'agira de distinguer si c'est le réel sensible, et là je ne suis pas d'accord, ou si c'est le réel effectif des êtres, et là je suis d'accord avec lui, et peut-être aussi avec M. Paul Lévy. C'est-à-dire que cette solution se trouve évidemment exigée par le problème qui est posé : vous dites qu'elle est quelque part, c'est affaire de goût.

M. Paul Lévy. – Le mot de «quelque part» indique que ce n'est pas localisé.

M. Fréchet. – Personnellement, je suis tout à fait d'accord avec M. Paul Lévy, je vois cette proposition comme existant en dehors de nous.

M. Cavaillès. – Lautman se sépare de moi ; ce que je trouve de très intéressant, dans ce qu'il fait, ce sont les liaisons justement qu'il fait apparaître entre certaines théories. L'avenir nous montrera qui a raison : personnellement, je répugne beaucoup à poser autre chose qui dominerait la pensée effective du mathématicien, je vois une exigence dans les problèmes eux-mêmes. C'est peut-être cela qu'il appelle la Dialectique qui domine ; sinon je crois que l'on n'arrive, par cette Dialectique, qu'à des relations très générales, ou bien à des relations comme celles qu'a indiquées M. Cartan. Il y a sans doute intérêt à chercher de ce côté ; mais transformer cela en position philosophique, cela ne me semble pas possible.

M. Lautman. – Je veux tout d'abord remercier M. Cartan de la bienveillance avec laquelle il a justifié l'interprétation logique que j'ai donnée de certaines théories mathématiques contemporaines, parmi lesquelles quelques-unes des plus belles émanent de lui. Je lui suis également reconnaissant de vouloir bien admettre que des notions comme celles de local et de global, de matière et de forme ne sont pas liées à une théorie déterminée, mais peuvent se retrouver dans des théories bien différentes, comme l'Analyse ou la Géométrie. En somme, si M. Cartan n'éprouve pas pour lui-même le besoin d'une référence à une Dialectique, il reconnaît aux philosophes le droit de le faire et nul encouragement ne peut leur être plus précieux.

Je serai beaucoup moins d'accord avec M. Fréchet. J'ai parlé de la genèse du Réel à partir de l'Idée. M. Fréchet déclare ne comprendre que l'inverse ; c'est-à-dire la genèse de l'Idée à partir du Réel, par abstraction évidemment. Il me paraît à cet égard qu'il faut distinguer entre l'ordre historique de la réflexion humaine et l'ordre logique ou ontologique de dépendance des notions. Les théories mathématiques me paraissent recevoir tout leur sens lorsqu'on les interprète comme des réponses à un problème ou une question dialectique. Il est clair que ce n'est que par un effort d'analyse régressive que l'on remonte de la théorie à l'Idée qu'elle incarne, mais il n'en est pas moins vrai qu'il est de la nature d'une réponse d'être réponse à une question logiquement antérieure, même si la conscience de la question est postérieure à la connaissance de la réponse. Le genèse dont j'ai parlé est donc transcendantale et non empirique, pour reprendre le vocabulaire de Kant.

En ce qui concerne les objections de M. Ehresmann, j'ai la conviction d'être en accord avec lui, bien qu'il ne veuille pas le reconnaître. M. Ehersmann me dit que les problèmes que j'appelle dialectiques restent vagues tant que je ne précise pas l'énoncé, et qu'à ce moment ils deviennent de purs problèmes mathématiques. J'ai moi-même écrit que la Dialectique n'étant affirmative d'aucune situation effective et étant problématique pure, se prolongeait nécessairement en théories mathématiques effectives. Le tout est de savoir s'il est possible de concevoir l'énoncé d'un problème logique ou métaphysique indépendamment de toute solution mathématique concrète. La réponse à cette question est dans l'histoire de la Philosophie. Je n'en prends que deux exemples. L'un est celui de la monade leibnizienne. Est-il possible de concevoir comme inscrites dans les propriétés internes d'un être l'ensemble des relations qu'il soutient avec tout l'univers ? Cette conception de la monade est purement métaphysique et j'ai montré, je crois, dans ma thèse les liens qui l'unissent aux théories actuelles de l'*Analysis situs*, qui sont également du reste d'inspiration leibnizienne. Comme deuxième exemple, je prends celui que j'ai donné plus haut, c'est le problème de la réciprocité d'action entre deux ou plusieurs corps, problème assurément distinct de la théorie newtonienne, et dont Kant croyait pourtant qu'il trouvait sa solution définitive dans la fameuse loi d'attraction universelle. L'histoire de la Philosophie montre ainsi l'autonomie de la conception des problèmes de structure par rapport à l'élaboration contingente des solutions mathématiques particulières.

M. Chabauty me fait remarquer que j'ai attaché une grande importance aux théorèmes qui établissent l'existence de certaines fonctions sur certaines surfaces ou certains ensembles, mais que ce résultat peut paraître moins surprenant si l'on se rend compte que les ensembles en question ont été «truqués», de telle sorte qu'il soit prestement possible de trouver sur eux les fonctions cherchées. Il semblerait donc qu'on ne trouve sur un ensemble que ce qu'on y a mis au préalable. Une pareille manière de présenter les choses ne me paraît pas mettre suffisamment en évidence le fait qu'il peut exister deux sortes de «truquages», au sens de M. Chabauty, ceux qui sont féconds et ceux qui ne le sont pas. Un ensemble ne possède jamais, en fait de propriétés, que celles qu'on lui donne *a priori* par axiomes, mais il se trouve que certaines de ces définitions artificielles aient pour conséquence d'amener un ensemble ou une surface à un tel état d'achèvement ou de perfection que cette perfection interne s'épanouisse en affirmations d'existence de nouvelles fonctions définies sur cet ensemble. Cette fécondité de certaines propriétés structurales, qui se prolonge en genèse de nouveaux êtres mathématiques, me paraît justement distinguer, au sein des possibilités de la définition axiomatique, les conceptions créatrices de celles qui ne mènent à rien de véritablement nouveau.

M. Hyppolite me reproche d'employer le terme de Dialectique en trois sens différents au moins. Il y en a un que je n'accepte pas. C'est celui d'après lequel il pourrait exister une Dialectique du local et du global qui se suffirait à elle-même indépendamment des Mathématiques ; par contre les deux autres manières me paraissent se compléter et non se détruire. Les Mathématiques constituent une véritable Dialectique du local et du global, du repos et du mouvement, au sens où la Dialectique étudie la manière dont on peut composer entre elles les notions abstraites en question ; cela n'empêche pas qu'on puisse concevoir une Dialectique antérieure aux mathématiques, conçue comme problématique. M. Hyppolite me dit que poser un problème, c'est ne rien concevoir ; je lui réponds, après Heidegger, que c'est déjà délimiter le champ de l'existant

M. Schrecker s'est surtout adressé à M. Cavaillès, mais je crois que nous nous rencontrons pour admettre la légitimité d'une théorie des structures abstraites, indépendantes des objets reliés entre eux par ces structures.

Il en me reste qu'à répondre à M. Cavaillès. Le point précis de notre désaccord porte, non pas sur la nature de l'expérience mathématique, mais sur son sens et sa portée. Que cette expérience soit la condition *sine qua non* de la pensée mathématique, cela est certain, mais je crois qu'il faut trouver dans l'expérience autre chose et plus que l'expérience ; il faut saisir, au-delà des circonstances temporelles de la découverte, la réalité idéale qui est seule capable de donner son sens et sa valeur à l'expérience mathématique. Je conçois cette réalité idéale comme indépendante de l'activité de l'esprit, qui n'intervient à mon avis que lorsqu'il s'agit de créer des Mathématiques effectives ; les Mathématiques appartiennent bien au domaine de l'action, mais la

Dialectique est avant tout un univers à contempler, dont le spectacle admirable justifie et récompense les longs efforts de l'esprit.