# Équations aux dérivées partielles - TD1

## Espaces vectoriels topologiques

**Exercice 1 :** Soient $E$ un espace vectoriel, et $P = \{p_i\}_{i \in I}$ une famille de semi-normes sur $E$. Une $P-$boule est un ensemble de la forme $B(a,p,r) = \{x \in E,\, p(x-a) < r\}$ pour $a \in E$, et un $p \in P$. On rappelle que pour la topologie engendrée par $P$ un ensemble $U$ est ouvert si et seulement si il est réunion d'intersections finies de $P$ boules.

a) Montrer qu'une homothétie de rapport non nul (resp. qu'une translation) est un homéomorphisme.

b) On dit que $P$ est filtrante si pour toute partie finie $F$ de $I$, il existe une semi-norme $p_i$ de $P$ telle que $\sup_{\alpha \in F} p_\alpha \leq p_i$. Montrer que si $P$ est filtrante, alors l'ensemble des boules $\{B(x,p,r)\}_{p \in P, r>0}$ forme une base de voisinage de $x$. Montrer que la famille de semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ est filtrante. Dans la suite, on supposera la famille filtrante.

c) Montrer que $E$ est séparé ssi pour tout $x \in E - \{0\}$ il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) \neq 0$.
Dans la suite on supposera toujours que $E$ est séparé.

d) Traduire la notion de convergence des suites en termes des semi-normes.

e) Soit $N$ une seminorme sur $E$. Montrer que $N$ est continue ssi $N$ est continue en 0 ssi il existe un voisinage de 0 sur lequel $N$ est bornée ssi $\exists p \in P$, $C \geq 0$ telle que $N \leq Cp$. La norme $L^1$ est-elle continue sur $\mathcal{C}^k_K$ ?

f) On se donne maintenant un autre espace vectoriel topologique (séparé) $F$ dont la topologie est engendrée par une famille de semi-normes $Q = \{q_j, j \in J\}$. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Enoncer et démontrer des critéres de continuité pour l'application linéaire $u$ (analogue aux critéres pour les espaces normés).
Soit $\Omega$ un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$ et $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Montrer que $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \ni f \mapsto hf \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est linéaire continue.

**Exercice 2 :** On suppose que la famille de semi-normes $P$ est dénombrable. Montrer alors que la topologie engendrée par $P$ est métrisable et que l'on peut choisir une métrique $d$ invariante par translation. Si l'espace métrique $(E,d)$ est complet, on dit que $(E,P)$ est un Frechet. Traduire en terme de semi-norme la notion de suite de Cauchy, et donc le fait que $(E,P)$ est un Fréchet.

**Exercice 3 :** Suite exhaustive.

a) Soit $\Omega$ un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une suite $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de $\Omega$ tel que $\Omega_j \subset \overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$ et $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$.

b) Posons $K_j = \overline{\Omega_j}$. Alors la famille de semi-normes $\{N_{K_j,k}\}$ est une base dénombrable de semi-normes continues sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

**Exercice 4 :**

a) Montrer que $\mathcal{C}^0(\Omega)$ est un espace de Fréchet. En déduire que $\mathcal{C}^k(\Omega)$ est un Fréchet.

b) Montrer que $(\mathcal{C}^k_K, N_{K,k})$ est un banach. En déduire que $\mathcal{C}^\infty_K$ est un Fréchet.

**Exercice 5 :** Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, donner un exemple de suite de $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ qui ne converge pas dans $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ mais qui converge dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

**Exercice 6 :** Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k$ et $m$ deux entiers positifs $k \geq m$ et $P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre $m$ à coefficients dans $\mathcal{C}^{k-m}(\Omega)$. Montrer que $P$ est continu de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{k-m}(\Omega)$.

**Exercice 7 :** (**) On dit qu'une partie $A$ dans un espace vectoriel topologique $E$ est bornée si elle est absorbée par tout voisinage de 0, *i.e.*, tel que si $V$ est un voisinage de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que $\lambda A \subset V$.

a) Décrire les parties bornées de $\mathcal{C}^m_K$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$.(Pour le dernier espace vectoriel topologique, on admettra qu'un ensemble $B$ de fonction est borné s'il existe un compact $K$ tel que $\forall b \in B, \operatorname{supp}(b) \subset K$ et la restriction de $B$ à $\mathcal{C}^\infty_K$ est borné).

b) Soient $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\mathcal{C}^m(\Omega_2) \to \mathcal{C}^{m-1}(\Omega_1)$ donnée par restriction à $\Omega_1$ est compacte, $i.e$ transforme les parties bornées en partie relativement compactes (on utilisera le théorème d'Ascoli).

c) En déduire que l'application $\mathcal{C}^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ est compacte (utiliser un procédé diagonal).

d) Montrer que $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ vérifie la propriété de Montel : Les parties bornées sont relativement compactes.

# Équations aux dérivées partielles - TD2

## Fonctions tests

**Exercice 1 :**

a) Soient $0 < a < b$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}}$ si $a < x < b$ et nulle ailleurs. Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et qu'il en est de même pour la fonction $F(x) = \frac{\int_x^b f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}$.

b) Montrer que $F(x) = 1$ si $x < a$ et que $F(x) = 0$ si $x > b$. Donner le support de $F$.

c) soient $I$ un intervalle compact et $\epsilon > 0$. Construire une fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty(I_\epsilon)$ identiquement égale à 1 sur $I$.

**Exercice 2 :** Propriétés élémentaires de la convolution

a) Soient $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, l'une des fonctions ayant un support compact. Montrer que $u * v$ est définie et continue, on a $u * v = v * u$ et $\text{supp}(u * v) \subset \overline{\text{supp}(u) + \text{supp}(v)}$.

b) i) Montrer que si de plus $u \in \mathcal{C}^j$ alors $u * v$ est $\mathcal{C}^j$ et $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v$ si $|\alpha| \leq j$.

ii) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^k$, $v \in \mathcal{C}^j$ alors $u * v \in \mathcal{C}^{k+j}$ et $\partial^{\alpha+\beta}(u * v) = (\partial^\alpha u) * (\partial^\beta v)$ si $|\alpha| \leq k$ et $|\beta| \leq j$.

c) On suppose maintenant $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $u*v$ existe p.p. , est intégrable et $\|u*v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^1}$.

**Exercice 3 :**

a) Montrer que l'opérateur de translation $\tau_y : f \mapsto [x \mapsto \tau_y f(x) = f(x - y)]$ est linéaire continu sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p \leq +\infty$.

b) Montrer que $\lim_{y\to 0} \tau_y f = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < +\infty$. (on montrera le résultat pour une fonction simple puis on utilisera la densité des fonctions simples dans l'espace $L^p$ si $1 \leq p < +\infty$).

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \rho_n * f = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < +\infty$, pour une suite régularisante $\rho_n$.

d) En déduire que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

**Exercice 4 :**

a) Montrer que la fonction

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-||x||^2}} & si\ ||x|| < 1 \\ 0 & si\ ||x|| \geq 1 \end{cases}$$

définit un élément de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose $\varphi = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1}\varphi_1$.

b) En déduire que pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $f_\epsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq f_\epsilon \leq 1$, $f_\epsilon = 1$ au voisinage de $K$ et $f_\epsilon$ est nulle hors de $K_\epsilon$. Donner une estimation des dérivées partielles de $f_\epsilon$ en fonction de $\epsilon$ et de l'ordre de dérivation.

c) En déduire que les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ séparent les compacts des fermés.

**Exercice 5 :** Suites régularisantes. On dit qu'une suite de fonctions $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $\rho_k \in \mathcal{C}_0^\infty$ $\text{supp}(\rho_k) \subset B(0, \frac{1}{k})$ ,$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k = 1$ et $\rho_k \geq 0$.

a) Construire une suite régularisante.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\rho_k * f \to f$ dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ (de plus, la convergence dans $\mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ est uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$).

**Exercice 6 :**

a) Montrer le théorème suivant : Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors Pour presque tout $x$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On pose $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.
On montrera d'abord le cas $p = +\infty$, puis $p = 1$ puis le cas $1 < p < +\infty$ en utilisant Hölder.

b) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (avec $\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante). On rappelle que les fonctions continues de support compact sont dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

c) En déduire que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$ pour tout ouvert non vide $\Omega$.

**Exercice 7 :** Le théorème de Rieman-Lebesgues
Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier $t \to \int e^{-ix.t}f(x)dx$ est continue et tend vers 0 à l'infini.
Indications, on le montrera d'abord pour $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$ ou $f$ une fonction simple.

**Exercice 8 :** On veut montrer le théorème de décomposition suivant :
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des ouverts (non vide )de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\cup_{i=1,\ldots,n}X_i)$. Alors il existe des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(X_i)$ telles que $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$. Si $\varphi$ est positive, alors on peut choisir $\varphi_i$ positive pour tout $1 \leq i \leq n$.
Indications : Montrer que l'on peut choisir des compacts $K_i$, $i = 1 \ldots n$ tels que $K_i \subset X_i$ et $supp\varphi \subset \cup_{i=1\ldots n}K_i$. Puis examiner le cas $n = 2$.

**Exercice 9 :**

a) On dit qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ est homogène de degrés $s \in \mathbb{C}$ si $\forall\lambda > 0$, $u(\lambda x) = \lambda^s u(x)$. Montrer qu'une fonction homogène est déterminée par sa restriction à la sphère unité. En déduire les fonctions homogènes sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $u$ homogène de degrés $s$ entraine $\partial_i u$ homogène de degrés $s-1$. Montrer qu'une fonction est homogène de degrés $s$ ssi $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}u(x) = su(x)$ (équation d'Euler) (on étudiera la fonction $0 < \lambda \to u(\lambda x)$).

c) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ homogène de degrés $s$. Montrer que si $\mathrm{Re}\,(s) < 0$ alors $f$ est nulle. En dèduire qu'une fonction homogène sur $\mathbb{R}^n$ est un polynôme.

**Exercice 10 :** Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{C}$ la fonction $\|x\|^s$ est-elle intégrable en 0, à l'infini ?(passer en coordonnées sphériques).

**Exercice 11 :** En calculant de deux manières l'intégrales $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}dx$, calculer la surface de la sphère unité $S^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ (à l'aide de la fonction $\Gamma$). En déduire la surface de la sphère de rayon $r$ et le volume de la boule de rayon $r$.

**Exercice 12 :** Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

# Équations aux dérivées partielles - TD3

## Distributions 1

**Exercice 1 :** Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$ de diamètre $D$ et $f \in \mathcal{C}^k_K(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\|f\|_\infty \leq D\|\partial_1 f\|_\infty$ et que si $k-p>0$, $N_{K,p}(f) \leq D^{k-p} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$.

**Exercice 2 :** Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. montrer que la distribution régulière associée est nulle ssi $f$ est nulle p.p.

**Exercice 3 :** Distribution de Dirac et peigne de Dirac.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'évaluation en $a$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$, notée $\delta_a$, appelée distribution de Dirac. Quel est son support ? Calculer $f\delta^{(p)}$ et $(f\delta)^{(p)}$ pour $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Soit $< W_T, \varphi >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(nT)$. Montrer que $W_T$ définit une distribution, trouver son support et montrer que $\lim_{N\to+\infty} 1_{[-N,N]} W_T = W_T$ au sens des distributions. Montrer que $W_T$ est périodique de période $T$.

**Exercice 4 :**

a) Calculer $x^k\delta^{(p)}$

b) Montrer que les distributions $\delta^{(p)}, p \in \mathbb{N}$, sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 5 :** Valeur principale et parties finies.

a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0([-M,M])$. Montrer que la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{n+1}} \left(\varphi(x) - \sum_{j=0}^n \frac{x^i}{i!} \varphi^{(j)}(0)\right) & si\ x \neq 0 \\ \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{n+1}(0) & si\ x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Majorer les dérivées de $\psi$ sur $\mathbb{R}$ en fonction des dérivées de $\varphi$.Donner une majoration analogue du reste integrale en plusieurs variables.

b) Montrer que les applications suivantes définissent des distributions et majorer leur ordre :
i) $\varphi \mapsto < \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$
ii) $\varphi \mapsto < \mathrm{pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi >= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}$

c) Calculer $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, $x\mathrm{pf}(\frac{1}{x^2})$, $x^2\mathrm{pf}(\frac{1}{x^2})$, $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})'$, $[\log|x|]'$.

d) Résoudre $xT = 1$, d'inconnue $T \in \mathcal{C}^{-\infty}$ (On étudiera d'abord l'équation homogène).

**Exercice 6 :**

a) Calculer $\mathrm{pf}(x_+^{-1}) = \mathrm{pf}(\frac{H(x)}{x})$, $\mathrm{pf}(x_+^{-2})$.

b) Calculer la dérivée de $\log(x_+)$, $\mathrm{pf}(x_+^{-1})$.

**Exercice 7 :** Soit $-1 < \lambda < 0$ Calculer la dérivée au sens des distribution de $x_+^\lambda = H(x)x^\lambda$.

**Exercice 8 :** Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $g : t \mapsto \int_0^t f(x)dx$. Calculer la dérivée de $g$ au sens des distributions.

**Exercice 9 :** Formule du saut en dimension 1.

a) On note $H$ la fonction de Heaviside. Calculer ses dérivées successives (au sens des distributions).

b) Calculer les dérivées de $[|x|]$

c) Soit $u$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I \setminus \{x_0\})$, $x_0 \in I$ intervalle ouvert. Supposons que la fonction $v$ qui est égale à $u'$ en dehors de $x_0$ soit localement intégrable en $x_0$ alors $u(x_0 \pm 0) = \lim_{x \to x \pm 0} u(x)$ existent et $[u]' = [v] + (u(x_0+0) - u(x_0-0))\delta_{x_0}$.

d) On suppose maintenant $u \in \mathcal{C}^\infty(I \setminus \{x_0\})$, et que chacune des dérivées de $u$ ait une limite à gauche et une limite à droite en $x_0$. On appelle $\sigma_m = u^m(x_0+0) - u^m(x_0-0)$ le saut de la dérivèe $m-$ème en $x_0$. Calculer $[u]^m$ en fonction des $[u^k]$, $\sigma_k$ et $\delta^k$.

e) Calculer $(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2)H(x)\frac{\sin(\omega x)}{\omega}$.

**Exercice 10 :** On se place dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et localement intégrable en l'origine telle que $\partial_1 u$ soit localement intégrable en l'origine. Montrer que $\partial_1[u] = [\partial_1 u]$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $\|x\|^s$ pour $re(s) > -n+1$.

**Exercice 11 :** Soit $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{2\pi i n x} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{-n}^{n} a_n e^{2\pi i n x}$ une série trigonométrique. Montrer qu'elle converge au sens des distribution si il existe $A > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|a_n| \leq A|n|^k$ (intégrer terme à terme suffisament de fois). Montrer que $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$.(on montrera que la distribution définie par la première somme est inchangée si on la multiplie par $e^{2\pi i x}$).

**Exercice 12 :** Résoudre $x^n T = 0$ dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$.

**Exercice 13 :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On pose $f_\epsilon(x) = (\epsilon)^{-n} f(\frac{x}{\epsilon})$.

a) Calculer $\lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon$ au sens des distributions.

b) En déduire les limites dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$ quand $\epsilon \to 0$ de $\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$ et $-\frac{1}{\pi}\frac{2x\epsilon}{(x^2+\epsilon^2)^2}$

**Exercice 14 :** Montrer la convergence vers $\delta$ des distributions suivantes :

a) $f_\epsilon = \mathbb{I}_{\|x\|<\epsilon} \frac{n}{\epsilon^n S_n}$

b) $f_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\epsilon^2}}$.

**Exercice 15 :**

a) Montrer que $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{\sin \nu t}{t} dt$ converge dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ vers la fonction de Heaviside.

b) En déduire $\lim_{\nu \to +\infty} \frac{\sin \nu x}{x}$ au sens des distributions.

**Exercice 16 :** Soit $w \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int x^\alpha w(x)dx = 0$ pour $|\alpha| < k$. Posons $u_\epsilon(x) = \epsilon^{-n-k} w(\frac{x}{\epsilon})$. Montrer que $\lim_{\epsilon \to 0}[u_\epsilon]$ existe et la calculer (On utilisera le dévelopement de Taylor à l'ordre $k$ d'une fonction test).

**Exercice 17 :** On note $S_{n-1}(r)$ la sphère de rayon $r$ de $\mathbb{R}^n$,$dS_{n-1}(r)$ l'élément de volume sur cette sphère, et $|S_{n-1}(r)|$ sa surface. Calculer $\lim_{r \to 0} \frac{1}{|S_{n-1}(r)|} \int_{S_{n-1}(r)} \varphi dS_{n-1}(r)$ pour $\varphi$ une fonction test.

**Exercice 18 :**

a) Calculer $\partial^{1,1} H(x)H(y)$.

b) On note

$$E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ t \geq |x| \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Quel est son support singulier ? On pose $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (Opérateur des ondes). Calculer $\Box E$.

c) Retrouver ce dernier résultat par changement de variable à l'aide de la question 1.

**Exercice 19 :** On travaille sur $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$.

a) Montrer que $\frac{1}{z}$ définit une distribution.

b) On pose $\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Calculer $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z}$.
On pourra passer en coordonnées polaires, ou utiliser la formule de Green.

c) On pose $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$. Calculer $\partial_z \frac{1}{z}$.

**Exercice 20 :** On pose pour $r = \|x\| \neq 0$ la norme euclidienne de $x$

$$E_n = \begin{cases} \log r & \text{si } n = 2 \\ r^{2-n} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

a) Montrer que $E_n$ appartient à $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

b) Soit $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ le Laplacien. Calculer $\Delta E_n$ au sens des distributions (indication : utiliser la formule de Green et les coordonnées polaires).

**Exercice 21 :** Le but de l'exercice est de décrire les distributions $T$ supportées par l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Une telle distribution est d'ordre fini $k$.

a) Montrer que si $T$ est d'ordre 0 alors $T = c\delta$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nulle en l'origine à l'ordre $(\geq)k$ *i.e* $\partial^\alpha f(0) = 0$ si $|\alpha| < k+1$. Montrer que si $|\alpha| < k+1$, $|\partial^\alpha f(x)| \leq \|x\|^{(k+1)-|\alpha|} N_{K,k+1}(f)$, si $x \in supp f \subset K$.

c) Montrer que $T$ est nulle sur une fonction test qui s'annulle en l'origine à l'ordre $k{+}1$. Indications : On considèrera une fonction $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0,1))$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta$ égale à 1 au voisinage de 0. Notant $\theta_\epsilon(x) = \theta(\frac{x}{\epsilon})$, montrer que $T(\theta_\epsilon f) \to 0$ si $\epsilon \to 0$.

d) En déduire que $T$ est dans l'espace vectoriel engendré par $\{\partial^\alpha \delta, \quad , |\alpha| \leq k\}$.

**Exercice 22 :** Le problème des primitives.

a) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction test $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ait une primitive à support compact est $\int_{\mathbb{R}} f = 0$.

b) Montrer qu'une solution de l'équation $S' = T$ dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$ est connue sur les fonctions tests qui admettent une primitive à support compact.

c) En déduire que toute distribution $T$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ et la calculer (unique à une constante prés).

**Exercice 23 :**

a) Calculer $\mathrm{Log}\,(x \pm i0) = \lim_{y \to 0^\pm} \mathrm{Log}\,(x+iy)$. (avec la détermination de l'argument dans $]-\pi, \pi[$).

b) En déduire les identité $\frac{1}{x \pm i0} = \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \mp i\pi\delta$.

**Exercice 24 :** Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{ixt}}{x - i0} = 2i\pi\delta$

**Exercice 25 :**

a) Calculer l'adjoint d'un opérateur différentiel à coefficients $\mathcal{C}^\infty$.

b) Calculer l'adjoint de l'opérateur d'Euler.

**Exercice 26 :** Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, homogène de degrés $n$.

a) Montrer que $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\|x\|>\epsilon} u(x)\varphi(x)dx$ existe pour toute fonction test ssi $\int_{S_{n-1}} u(\omega)dS(\omega) = 0$. (On pourra passer en coordonées sphériques et utiliser la formule de Taylor à l'ordre 1 pour $\varphi$).

b) Si cette dernière condition est satisfaite, montrer que l'on définit ainsi une distribution.

**Exercice 27 :** Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ pour lequel $\|x\|^m f(x)$ est bornée au voisinage de 0 (par exemple $f(x) = \|x\|^{-m}$). Montrer qu' il existe une distribution $T$ sur $\mathbb{R}^n$ prolongeant la distribution $[f] \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (on procédera comme pour les parties finies).

# Équations aux dérivées partielles - TD4

## Distributions 2

**Exercice 1 :** Montrer le théorême suivant : Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors Pour presque tout $x$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On pose $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.
On montrera d'abord le cas $p = +\infty$, puis $p = 1$ puis le cas $1 < p < +\infty$ en utilisant Hölder.

**Exercice 2 :** Soient $1 \leq p \leq +\infty$ et $p'$ l'exposant conjugué. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

a) Montrer que $f * g$ est partout définie, bornée, et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ (pour cette derniére propriété, on montrera que l'opérateur de translation $\tau_p$ vérifie $\forall \alpha \in L^q(\mathbb{R}^n)$,$1 < q < +\infty$, $\tau_a \alpha \to \alpha$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ quand $a \to 0$).

b) Montrer que si de plus $p < +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f * g(x) = 0$ (On montrera d'abord cette propriété lorsqu'une des deux fonctions est continue à support compact).

**Exercice 3 :** On note $E(t,x) = H(t)\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$.

a) Montrer que $E \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$. Quel est le support singulier de $[E]$ ?

b) Montrer que $\partial_t - \Delta_x E = \delta$. (On pourra, par exemple, écrire que $E(t,x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} H(t-\epsilon)E(t,x)$ et calculer).

**Exercice 4 :** Soient $X$ (resp . $Y$) un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X \times Y)$. On suppose qu'il existe $K$ un compact de $X$ tel que $\mathrm{supp}_x \varphi(.,y) \subset K$, pour tout $y \in Y$.

a) Montrer que $y \mapsto \varphi(.,y)$ est $\mathcal{C}^\infty(Y, \mathcal{C}^\infty_0(X))$ et calculer ses dérivées partielles.

b) Soit $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(X)$, montrer que $y \mapsto < T_x, \varphi(x,y) >$ est $\mathcal{C}^\infty(Y)$ et calculer ses dérivées partielles.

c) Montrer que pour $f \in L^1(Y)$ de support compact, on a $\int_Y f(y) < T_x, \varphi(x,y) > dy = < T_x, \int_Y f(y)\varphi(x,y)dy >$.

**Exercice 5 :** Montrer que la série de Fourier d'une distribution périodique $T$ converge au sens des distributions vers $T$.
(Indication : Utiliser le résultat de l'exercice 9 feuille distribution 1)

**Exercice 6 :**

a) Montrer que $\varphi \to < \mathrm{vp}\frac{cos\lambda x}{x}, \varphi >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{cos\lambda x}{x}\varphi(x)dx$ définit une distribution.

b) Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{vp}\frac{cos\lambda x}{x} = 0$

**Exercice 7 :** Distributions homogènes. Pour $\lambda > 0$, on pose $A_\lambda = \lambda I$. Une distribution $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ est homogène de degrés $p \in \mathbb{C}$ si $T \circ A_\lambda = \lambda^p T$

a) Vérifier que si $T = [f]$ est régulière et homogène de degrés $p$ alors $f$ est une fonction homogène.

b) Vérifier que si $T$ est homogène de degrés $p$ alors $\partial^\alpha T$ est homogène de degrés $p - |\alpha|$. Vérifier que les dérivées de $\delta$ sont homogènes dans $\mathbb{R}^n$. Application : calculer $\partial_{\bar{z}}\frac{1}{z}$, le laplacien de $r^{2-n}$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$.

c) i) On note $E = \sum_{i=1}^n x_i\partial^i$ l'opérateur d'Euler. Calculer ${}^tE$. ii)Montrer que $T$ est homogène de degrés $p$ ssi elle vérifie l'équation d'Euler : $\sum_i x_i\partial^i T = pT$.
Indications : On dérivera la fonction $\lambda \mapsto < T \circ A_\lambda, \varphi >$ avec $\varphi$ une fonction Test.

**Exercice 8 :** Montrer que les distribution homogènes de degrés $p$ sur $\mathbb{R}$ sont combinaisons linéaires de $x_+^p$, $x_-^p$ si $p \neq -1, -2, \dots$ ou pf$x^{-m}$, $\delta^{(m-1)}$ si $-p = m \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 9 :** Intégrales singulières.

a) Soit $u$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $u(tx) = t^{-n}u(x)$. Montrer que $< U, f >= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<\|x\|}(uf)(x)dx$ existe pour toute $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ssi $\int_{\|\omega\|} u(\omega)dS(\omega) = 0$.

b) Montrer que si cette derniére condition est satisfaite alors $U$ définit une distribution.

**Exercice 10 :**

a) Soit $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{x'}^{n-1})$. Montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \ni (f, g) \mapsto T(f \otimes g)$ définie à $g$ fixé (resp. $f$) une distribution sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^n$).

b) Montrer que si $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\partial^1 T = 0$ alors il existe $T'_x \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$ telle que $T = 1_{x_1} \otimes T_{x'}$.

**Exercice 11 :** Soient $f, g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ de supports adaptés. Montrer que $x \mapsto h(x) = f * g(x)$ existe pp, $h \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $[f] * [g] = [h]$.

**Exercice 12 :**

a) Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ de support inclus dans $[0, +\infty[$. Calculer $H * f$

b) Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, calculer $u * \mathbb{I}_{[a,b]}$ et sa dérivée.

c) Calculer $\mathbb{I}_{[a,b]} * \mathbb{I}_{[c,d]}$, $H(x)\sin x * H(x)\cos x = \frac{1}{2}xH(x)\sin x$, $(H(x)e^x)^{*2}$

**Exercice 13 :** On pose $G_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{x^2}{2a}}$, $a > 0$. Calculer $G_a * G_b$

**Exercice 14 :** On pose $H_\alpha^\lambda(x) = H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x}$, $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que $H_\alpha^\lambda * H_\beta^\lambda = H_{\alpha+\beta}^\lambda$

b) En déduire la puissance $n-$ieme de convolution de $H_\alpha^\lambda$.

**Exercice 15 :**

a) Montrer que $(\mathcal{C}^{-\infty}_{[0,+\infty[}(\mathbb{R}), +, *)$ est une algèbre de convolution commutative d'unité $\delta$.

b) Montrer que dans cette algèbre l'équation $A * X = B$ admet une solution pour tout $B$ ssi $A$ admet un inverse.

c) Calculer l'inverse de $H$.

d) Soit $P(D) = \partial^n + a_1\partial^{n-1} + \ldots + a_n\partial^0$ un opérateur différentiel à coefficiants constants. Écrire l'équation $P(D)u = f$ sous forme d'une convolution. En déduire qu'une solution fondamentale pour $P(D)$ est un inverse de $P(D)\delta$.

e) Soit $Z$ une solution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de cette équation de donnée de Cauchy en 0 $Z^{(i)}(0) = 0$ $0 \leq i < n-1$ $Z^{n_1}(0) = 1$. Montrer que $HZ$ est une solution fondamentale de $P(D)$. En déduire la solution de léquation $P(D)u = f$ de données de cauchy $f^{(i)}(0) = c_i$ $0 \leq i \leq n-1$.

f) Calculer $(\delta' - \lambda\delta)^{-1}$. En déduire $(\delta' - \lambda\delta)^{-n}$. En factorisant le polynôme $P$, calculer la solution fondamentale de $P(D)$.

**Exercice 16 :**

a) On note $F = \{p \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq |x| \leq y\}$. Montrer que $F$ est adaptée à lui-même.

b) Calculer $\mathbb{I}_F * \mathbb{I}_F$.

**Exercice 17 :** On note $E_n$ la solution fondamentale du laplacien sur $\mathbb{R}^n$.

a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ identiquement égale à 1 au voisinage de 0. Montrer que $\Delta(\varphi E_n) - \delta$ est un élément de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Montrer que $\partial_i(\varphi E_n) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

c) Soit $T$ une distribution possédant des dérivées partielles $\partial_i T$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $T$ est dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

**Exercice 18 :** Montrer que si $P(D)$, un opérateur à coefficients constants, admet une solution fondamentale de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine alors toute distribution $U$ telle que $P(D)U$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ est représentée par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner des exemples de tels opérateurs.

**Exercice 19 :**

a) Trouver une solution fondamentale de $\partial^n$ sur $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

b) En déduire une solution fondamentale de $\partial^{(l_1,\dots,l_n)}$. Supposant $l_i = k+2$, montrer qu'il existe une solution fondamentale de classe $C^k$.

c) En d'eduire que si $T$ est une distribution de support compact dans $\mathbb{R}^n$ et d'ordre $k$ alors il existe une fonction continue $u$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\partial^{(k+2,\dots,k+2)}u = T$.

**Exercice 20 :** On note $C = \{p \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le |x| \le y\}$.

a) Soit $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ Montrer que $C$ et $supp g(x) \otimes \delta(t)$ sont adaptés. Montrer que $\mathbb{I}_C * (g(x) \otimes \delta(t)) = H(t)\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy = (\mathbb{I}_C \underset{x}{*} g)(x)$.

b) Résoudre $\Box u = g \otimes \delta(t) + f \otimes \delta(t)'$ avec $g, f$ des distributions sur $\mathbb{R}$ et $U$ de support contenu dans $t \ge 0$.

c) On suppose $g \in C^k$ et $f \in C^{k+1}$. Montrer que $U$ est représentable par une fonction $u$ de classe $C^{k+1}([0,+\infty[\times\mathbb{R})$, telle que $\Box u = 0$ pour $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$ et $\partial_t u(x,0) = g$. Montrer que $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy + f(x+t) + f(x-t)\right)H(t)$.

**Exercice 21 :** Calculer $F * (a \otimes b)$ lorsque ...

# Équations aux dérivées partielles - TD5

## Transformée de Fourier

**Exercice 1 :**

a) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ssi $\forall\alpha, \forall\beta$, $\|x^\alpha\partial^\beta f(x)\|_\infty < +\infty$ ssi $\forall\alpha, \forall\beta$, $\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial^\beta f(x)|dx < +\infty$ ssi $\forall m, k$, $\sup_{|\beta|\leq m} \|(1+|x|^2)^k|\partial^\beta f(x)|\|_\infty < +\infty$.
La topologie de $\mathcal{S}$ est définie par l'une des seminormes ci-dessus, $\mathcal{S}$ est un Frechet pour cette topologie.

b) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par convolution.

**Exercice 2 :**

a) Montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Exercice 3 :**

a) Montrer que si $g \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ est à croissance lente *i.e.* il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que $\frac{|g(x)|}{(1+|x|^2)^k}$ est bornée ou intégrable alors $[g]$ définie une distribution tempérée.

b) Montrer que $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer que la multiplication par un polynôme est bien définie sur $\mathcal{S}'$ et que $\mathcal{S}'$ est stable par dérivation.

d) Montrer que $\mathcal{C}_0^{-\infty}$ est dense dans $\mathcal{S}'$.

**Exercice 4 :**

a) Montrer le théorème de Riemann Lebesgue : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{f}$ est continue bornée et tend vers 0 en l'infini.

b) Montrer que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}$.

c) Montrer que $\widehat{\tau_a f} = e^{-ia.\zeta}\hat{f}$ et $\widehat{e^{ia.x}f} = \tau_a\hat{f}$.

d) En déduire $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\zeta)g(\zeta)e^{ia.\zeta}d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+a)\hat{g}(x)dx$.

**Exercice 5 :**

a) Calculer la transformée de Fourier de $e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$ (plusieurs méthodes).

b) En déduire la transformée de Fourier de $e^{-\frac{\epsilon}{2}\|x\|^2}$.

c) En déduire que $\mathbb{F}1 = (2\pi)^n\delta$.

**Exercice 6 :** Calculer de deux manières $\mathbb{F}([1]')$. En déduire que $\mathbb{F}1 = 2\pi\delta$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 7 :**

a) Montrer qu'une distribution homogène est tempérée. Montrer que la transformée de fourier d'une distribution homogène est homogène.

b) Soit $T \in \mathcal{C}_0^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\mathbb{F}(T)(\zeta) = < T_x, e^{-ix\zeta} >$.

**Exercice 8 :** Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Montrer que si $T \in \mathcal{S}'$, $P(\partial)\mathbb{F}(T) = \mathbb{F}(P(-ix)T)$ et $\mathbb{F}(P(\partial)T) = P(+i\zeta)\mathbb{F}(T)$. Calculer $\mathbb{F}(x^\alpha)$ et $\mathbb{F}\partial^\beta\delta$.

**Exercice 9 :**

a) Calculer la transformée de Fourier de $H_\alpha^\lambda(x) = H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x}$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. On commencera par faire le calcul pour $0 < \alpha < 1$.

b) En déduire la formule $H_\alpha^\lambda * H_\beta^\lambda = H_{\alpha+\beta}^\lambda(x)$.

**Exercice 10 :** Montrer que la convolution de distributions radiales est radiales

**Exercice 11 :** Calculer la transformée de fourier de $x_+^\alpha$

**Exercice 12 :** Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{I}_{[-A,A]}$, vérifier que cette transformée se prolonge en une fonction entière.

**Exercice 13 :** Montrer que la transformée de Fourier de $(1-|x|)\mathbb{I}_{|x|<1}$ est $\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2$.

**Exercice 14 :** Calculer la transformée de Fourier de $e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$, vérifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais qu'elle n'est pas dans $\mathcal{S}$.

**Exercice 15 :**

a) Trouver les distributions impaires solutions de $xT = 1$.

b) En d'eduire la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$.

**Exercice 16 :** Calculer la transformée de Fourier de $H(x)$.

**Exercice 17 :** Calculer la transformée de Fourier de $|x|\mathbb{I}_{]-1,1[}(x)$. Vérifier qu'elle se prolonge en une fonction entière.

**Exercice 18 :** On considére la distribution tempérée $|x|$.

a) Calculer $\delta'' * |x|$.

b) En déduire que $\mathbb{F}|x|$ est de la forme $A.\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) + c.\delta$ et calculer $A$.

c) Calculer $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)'$. En déduire $\mathbb{F}\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et la constante $c$.

**Exercice 19 :**

a) Quelles sont les images de fourier des distributions suivantes :
$\delta_a$, $e^{\pm ix}$, $\cos x$, $\sin x$.

b) Calculer la transformer de Fourier de $f(x) = \frac{2\sin x - 2x\cos x}{x^3}$. Pour cela on calculera la transformée de Fourier de $x^3 f(x)$, (d'où une équation différentielle sur $\mathbb{F}f$) et on utilisera que $f$ est intégrable.

**Exercice 20 :** Soit $f$ une fonction radiale intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{F}f$ est une fonction radiale. En déduire que $\mathbb{F}f(\zeta) = \mathbb{F}(f)(|\zeta|, 0, \ldots, 0)$. Application : Calculer l'image de Fourier de $\mathbb{I}_{B(0,1)}$ dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 21 :** On considére la fonction $f_k(x) = ||x||^{-k}$, (norme euclidienne) avec $0 < k < n$.

a) Montrer que $f_k$ définit une distribution tempérée.

b) Pour $k > \frac{n}{2}$, montrer que $\mathbb{F}f_k$ est représentable par une fonction.(On ecrit $f = f\mathbb{I}_{B(0,1)} + f\mathbb{I}_{|x|>1}$).

c) Montrer que $\mathbb{F}f_k$ est la fonction radiale $c_{k,n}|x|^{k-n}$ avec $c_{k,n}$ une constante que l'on détèrminera ( $k > \frac{n}{2}$, on teste sur la gaussienne pour calculer $c_{k,n}$).

d) En déduire $\mathbb{F}f_k$ pour $0 < k < n$.

**Exercice 22 :** Calculer la transformée de Fourier de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$.

**Exercice 23 :** Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$. Montrer que toute distribution $u \in \mathcal{C}_0^{-\infty}$ solution de $P(D)u = 0$ est nulle.

**Exercice 24 :** Soit $A$ une $n \times n-$matrice symétrique définie positive. Montrer que $e^{-<Ax.x>}$ est dans $\mathcal{S}$. Calculer $\mathbb{F}(e^{-<Ax.x>})$ (Indication : On utilisera une diagonalisation en base orthonormée).

**Exercice 25 :**

a) Montrer que $\lambda \to [e^{\lambda\frac{||x||^2}{2}}]$ est continue de $\{re(\lambda) \leq 0\}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, holomorphe sur $\{re(\lambda) < 0\}$.

b) En déduire, par prolongement analytique, la transformée de Fourier de $[e^{it\frac{||x||^2}{2}}]$.

**Exercice 26 :** Formule sommatoire de Poisson Calculer la transformée de Fourier du peigne de Dirac

$$W_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}.$$

**Exercice 27 :** Transformée de Fourier partielle. Trouver, en utilisant la transformée de Fourier partielle, des solutions fondamentales des opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} C &= \partial_t - \Delta_x \text{ (Chaleur)} \\ S &= \frac{1}{i}\partial_t - \Delta_x \text{ (Schödinger)} \\ \square &= \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta_x \text{ (Ondes)} \end{aligned}$$

**Exercice 28 :** Trouver une solution fondamentale de l'opérateur

$$\partial_x^4 - \partial_x^2 + 1,$$

d'abord sous forme intégrale, puis par une formule explicite. Trouver une solution fondamentale de l'opérateur

$$\partial_x^4 - \partial_y^2 + 1.$$

**Exercice 29 :** Malgrange-Ehrenpreis (cas simple). On rappelle que le théorème de Malgrange-Ehrenpreis affirme que tout opérateur différentiel linéaire non nul à coefficients constants $P(D)$ admet une solution fondamentale $u \in \mathcal{S}'$, i.e., une distribution tempérée telle que

$$P(D)u = \delta.$$

Trouver une condition portant sur un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et sur l'ensemble de ses zéros pour que l'équation linéaire

$$P(D)u = 0$$

admette une solution fondamentale $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ facilement descriptible.

**Exercice 30 :** Soit $P$ un polynôme non nul à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ et $P(D)$ l'opérateur différentiel correspondant.

a) Montrer que si $u \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ est une distribution à support compact satisfaisant $P(D)u = 0$, alors $u = 0$.

b) Montrer que si l'ensemble

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n | \, P(\xi) = 0\} = \{0\}$$

des zéros réels de $P$ est nul alors le noyau de $P(D)$ ne contient que des polynômes.

# Équations aux dérivées partielles - TD6

## Laplacien et fonctions harmoniques

**Exercice 1 :** Montrer que les translations et les homothéties préserves les fonctions harmoniques. Montrer qu'une rotation préserve les fonctions harmoniques.

**Exercice 2 :** Soit $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\Omega)$ de laplacien de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Montrer que $T$ est $\mathcal{C}^\infty$.

**Exercice 3 :** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (par exemple). On définit
$M(f,x,r) = |S_{n-1}|^{-1} \int_{y \in S_{n-1}} f(x+ry)dS(y)$, la valeur moyenne de $f$ sur la sphère $S(x,r)$. Montrer que $x \mapsto M(f,0,\|x\|)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, radiale ; montrer que son dévelopement de Taylor en l'origine ne contient que des termes en $\|x\|^2$ (en fait, on montre que cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0). En déduire que $r \mapsto M(r,f,0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty([0,+\infty[)$.

**Exercice 4 :** Montrer qu'une fonction harmonique sur $B(0,R)$ radiale est constante ($n > 1$). Donner des exemples de fonctions harmoniques et radiales, non constantes, sur $\mathbb{R}^{n*}$.

**Exercice 5 :** Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(C(0,r_1,r_2))$ (couronne) et $g \in \mathcal{C}_0^\infty(]r_1,r_2[)$.

a) Montrer que $|S_{n-1}|^{-1} \int g(r)\Delta u(x)dx = -\int r^{n-1}g'(r)\frac{d}{dr}M(u,0,r)dr$.

b) En déduire $\int_{a<r=\|x\|<b} \Delta u = |S_{n-1}| \left[r^{n-1}\frac{d}{dr}M(u,0,r)\right]_a^b$. Montrer que $\Delta M(u,0,r) = M(\Delta u,0,r)$.

c) En déduire que si $u$ est sous harmonique sur $B(0,r_2)$ (resp. harmonique) alors la valeur moyenne sur les sphères est une fonction croissante (resp. constante) de $r$.

**Exercice 6 :** Soit $u \in C^2(\Omega)$. Montrer que $\lim_{r\to 0} \frac{M(u,x,r)-u(x)}{r^2} = \frac{\Delta u(x)}{2n}$.

**Exercice 7 :** On se donne une suite de fonctions harmoniques $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur un ouvert $\Omega$ non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $u$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, il existe $\tilde{u}$ harmonique telle que $\tilde{u} = u\,p.p.$ et la suite converge vers $\tilde{u}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

**Exercice 8 :** Montrer l'inégalité de Harnack : Soit $u \in C^0(\overline{B(0,R)})$, harmonique à l'intérieur. On suppose $u$ positive. Montrer que
$\frac{u(0)}{(R+\|x\|)^n} \leq u(x)\frac{R^{2-n}}{R^2-\|x\|^2} \leq \frac{u(0)}{(R-\|x\|)^n}$. En déduire que $|Du(0)| \leq \frac{n|u(0)|}{R}$.

**Exercice 9 :** Montrer qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$, bornée est constante. Donner des exemples de fonctions harmoniques sur le complémentaire d'un compact qui sont bornées.

**Exercice 10 :** Montrer qu'une fonction harmonique sur $\overline{B(0,1)} \setminus \{0\}$ bornée admet u prolongement harmonique à $B(0,1)$.
On montrera que $u = P[u_{|S}]$ avec $P[u_{|S}]$ la solution du problème de Dirichlet de donnée frontière $u_{|S}$. On étudiera le maximum ou le minimum de $u - P[u_{|S}] + \epsilon(|x|^{2-n} - 1)$ ($n > 2$) suivant le signe de $\epsilon$.

**Exercice 11 :**

a) Montrer qu'une fonction sous harmonique $f$ sur $\mathrm{Int}K$ continue sur $K$ vérifie : Pour toute fonction harmonique sur $\mathrm{Int}K$ continue sur $K$, $f \leq u$ sur $\partial K$ entraine $f \leq u$ partout.

b) Montrer, en utilisant la solution du problème de Dirichlet dans des boules, que $r \mapsto M(f,r,x)$ est une fonction croissante de $r$ si $f$ est sous harmonique (c'est en fait une caractérisation).

# Équations aux dérivées partielles - TD7

# Équation des ondes

**Exercice 1 :** Problème de Dirichlet pour le demi espace.

a) Soit $\beta > 0$. Montrer que $e^{-\beta} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx$.(on appliquera le théorème des résidus à $z \mapsto \frac{e^{i\beta z}}{1+z^2}$ sur des demi-cercles).

b) Utilisant que $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x^2)u}du$, en déduire l'identité de subordination $e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}}du$.

c) En déduire, pour $y > 0$, $\mathbb{F}(e^{-y\|x\|})(\zeta) = 2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\frac{y}{(y^2+\|\zeta\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$.

**Exercice 2 :** Montrer qu'une fonction harmonique sur le demi-espace $\{y > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ continue jusqu'au bord, bornée, nulle sur $y = 0$ est identiquement nulle.

**Exercice 3 :** On s'intéresse au problème suivant pour les fonctions harmoniques dans le demi-espace $\{y > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\} = E^+_{n+1}$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \Delta_x u(x,y) = 0 & y > 0 \\ u(0,x) = f(x) & \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

a) Montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, bornée comme fonction de $y$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telle que $\mathbb{F}_x u$ est continue sur $\overline{\mathbb{R}^+}\times\mathbb{R}^n$ ; lorsqu'on se restreint au distribution tempérée $f$ telle que $\mathbb{F}f$ est continue. Cette solution est donnée par $u(y,x) = \mathbb{F}_x^{-1}(e^{-y\|\zeta\|}) *_x f$

b) Calculer la solution fondamentale.

**Exercice 4 :** Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, montrer que l'équation $\Box U = 0$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ de données de cauchy $u(0) = f$, $u'(0) = g$.

**Exercice 5 :**

a) Montrer que l'opérateur des ondes $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ admet une unique solution fondamentale $E_+$ de support dans $\{t \geq 0\}$.

b) Montrer que pour toute distribution $T$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, de support $\{t \geq 0\}$ il existe une unique solution de $\Box U = T$ de même support.

c) Soient $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. Montrer qu'une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ de $\Box u = f$ de données de Cauchy $u(o,x) = \varphi_0(x)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = \varphi_1(x)$ est unique et vérifie $\Box H(t)u = H(t)f + \delta' \otimes \varphi_0 + \delta \otimes \varphi_1$.

d) Construire $u$.

**Exercice 6 :** Pour l'exercice précédent, lorsque $f = 0$, montrer que $supp_x u(x,t) \subset (supp\varphi_0 \cup supp\varphi_1) + B(0,t)$. Qu'en est-il pour l'équation de la chaleur ?

**Exercice 7 :**

a) Calculer la solution élémentaire avancée en dimensions $1+1$ et $1+3$. On calculera la transformée de Fourier de $\mathbb{I}_{[-1,1]}$ sur $\mathbb{R}$ et de la distribution $\theta \mapsto \int_{S(0,1)} \theta(\omega)d\omega$ sur $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire la forme des solutions pour le problème de Cauchy.

**Exercice 8 :** Calcul de la solution fondamentale en dimension $1+2$ : partiel du 29 janvier 2001

**Exercice 9 :** Un calcul pour la transformée de Fourier de $\zeta \mapsto \frac{\sin t\|\zeta\|}{\|\zeta\|}$ pour $n \geq 2$.

a) Montrer que pour $Re(y) > 0$, on a $\mathbb{F}_\zeta^{-1}(e^{-y\|\zeta\|})(\zeta) = \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\frac{y}{(y^2+\|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$.

b) En écrivant que ($\epsilon > 0$), $\frac{\sin t\|\zeta\|}{\|\zeta\|}e^{-\epsilon\|\zeta\|} = \frac{1}{2i}\int_{\epsilon-it}^{\epsilon+it} e^{-s\|\zeta\|}ds$, montrer que
$\mathbb{F}^{-1}\frac{\sin t\|\zeta\|}{\|\zeta\|} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})IM(\frac{1}{(1-n)(\|x\|^2-(t-i\epsilon)^2)^{\frac{n-1}{2}}})$.

c) En déduire que $\mathbb{F}^{-1}\frac{\sin t\|\zeta\|}{\|\zeta\|}$ est de support contenu dans la boule fermée de rayon $t$, et que si $n \geq 3$ est impair alors cette distribution est de support contenu dans la sphère de rayon $t$.

d) Calculer cette limite pour $n = 2$.

**Exercice 10 :** Principe de descente

a) Soit $E_n$ la solution élémentaire avancée de $\square_n$ à support dans le cone d'onde d'avenir de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$. Montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}) \ni \theta \to L(\theta) =< E_n, \theta \otimes 1_{x_n} >$ définit une distibution qui est soluton élémentaire de $\square_{n-1}$ de support dans $\{t \geq \|x\|_{\mathbb{R}^{n-1}}\}$.

b) retrouver ce résultat par transformation de Fourier.

c) En déduire la solution fondamentale avancée de $\square_2$.

**Exercice 11 :** Soit $P(\partial)$ un opérateur à coefficients constants.

a) Montrer que $P(\partial)\theta = 0$ avec $\theta \in \mathbb{C}_0^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ entraine $\theta = 0$.

b) Montrer que$P(\partial)$ n'admet pas de solution fondamentale de support compact.

# Équations aux dérivées partielles - TD8

## Prolongement méromorphe

**Exercice 1 :**

a) Soit $f \in \mathbb{C}^k([0,1])$. Montrer que $\lambda \mapsto \int_{[0,1]} x^\lambda f(x)dx$ se prolonge en fonction méromorphe sur $\{\lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(\lambda+k) > -1\}$. Pour cela, on soustrait le polynôme de Taylor à l'ordre $k-1$. Donner les poles et les rèsidus.

b) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que $\lambda \mapsto \int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$ est une fonction entière de $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lambda \mapsto [x^\lambda \mathbb{I}_{x>1}]$ définit une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

c) En déduire que la distribution tempérée $x_+^\lambda : f \mapsto \int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$, définie pour $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, se prolonge en fonction méromorphe de $\lambda \in \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On note encore $x_+^\lambda$ ce prolongement. Montrer que si $\mathrm{Re}\,(\lambda+n) > -1$ alors
$< x_+^\lambda, f >= \int_{[0,1]} x^\lambda (f(x) - P_{n-1}(x))\, dx + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!(\lambda+i+1)} + \int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$ avec $P_{n-1}$ le polynôme de taylor de $f$ en l'origine de degrés $n-1$. En déduire les poles et les résidus de $\lambda \mapsto x_+^\lambda$.

d) Montrer que dans la bande $\{-n > \mathrm{Re}\,\lambda > -n-1\}$, on a
$< x_+^\lambda, f >= \int_{[0,+\infty]} x^\lambda (f(x) - P_{n-1}(x))\, dx$

e) Montrer que $(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}$ en dehors des poles.

**Exercice 2 :**

a) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que si $\mathrm{Re}\,(\lambda) > -1$ alors
$< x_+^\lambda, f >= (-1)^k \int_{[0,+\infty]} \frac{x^{\lambda+k}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)} f^{(k)}(x)dx$.

b) Montrer que

$$\lambda \mapsto (-1)^k \int_{[0,+\infty]} \frac{x^{\lambda+k}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)} f^{(k)}(x)dx$$

définit une fonction méromorphe sur $\{\mathrm{Re}\,(\lambda+k > -1\}$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et détèrminer les poles et les résidus. Montrer que cette distribution est le prolongement méromorphes de $x_+^\lambda$.

**Exercice 3 :** on étudie maintenant $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(\lambda,x)dx$ avec $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $(\lambda,x)$, holomorphe en $\lambda$ et $supp f(\lambda,.) \subset ]-\infty,a]$ avec $0 < a < 1$.

a) Montrer en intégrant par partie que cette fonction ce prolonge en fonction méromorphe de $\lambda$ de poles simples (éventuels) $\lambda = -1,-2,\ldots$ de résidus $\frac{f^{(k-1)x}(k,0)}{k-1!}$.

b) Etudier l'exemple de la distribution $\varphi \mapsto \int_{-1}^1 (1-x^2)^\lambda \varphi(x)dx$.

**Exercice 4 :** Examen de Janvier 2003.

**Exercice 5 :** Examen de janvier 2002.

# Équations aux dérivées partielles - TD9

## Hypoellipticité

**Exercice 1 :** Un opérateur différentiel $P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)(i\partial)^\alpha$ est dit $\mathcal{C}^\infty-$hypoelliptique si $\forall T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\Omega)$, $PT \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ entraine $T \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
Soit $P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(i\partial)^\alpha$ un opérateur à coefficients constants. On suppose que $P$ admet une solution fondamentale $E \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathrm{suppsing}(E) = \{0\}$.

a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ identiquement égale à 1 au voisinage de 0. Montrer que $P(\varphi E) - \delta$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) En déduire que si $T \in \mathcal{C}_0^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $PT \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) En déduire que si $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\Omega)$ vérifie $PT \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors $T \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

**Exercice 2 :** On dit que $P$ opérateur à coefficients constants, $P(i\partial) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(i\partial)^\alpha$, est elliptique si $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \zeta^\alpha \neq 0$ si $\zeta \neq 0$ (on note $\zeta$ la variable duale).

a) Montrer que $P$ est elliptique ssi $\exists K, R > 0$ tels que $|P(\zeta)| \geq K\|\zeta\|^k$ sur $\|\zeta\| \geq R$.

b) Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n_\zeta)$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de $B(0,R)$. Montrer que $\frac{1-\chi}{P}(\zeta) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\zeta)$. En déduire qu'il existe $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ telle que $PE = \delta - \omega$. On dit que $E$ est une paramétrixe pour $P$

c) Montrer que $|\partial^\alpha \frac{1-\chi}{P}(\zeta)| \leq C(\alpha)\|\zeta\|^{-(k+|\alpha|)}$. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha| \geq n_0$ entraine $x^\alpha E \in C^m(\mathbb{R}^n)$. En déduire que $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

d) En déduire qu'un opérateur elliptique à coefficients constants est $\mathcal{C}^\infty-$hypoelliptique.

**Exercice 3 :** Examen de septembre 2002

**Exercice 4 :** Examen de septembre 2003