Équations aux dérivées partielles - TD7

Équation des ondes

Exercice 1 : Problème de Dirichlet pour le demi espace.

a) Soit $\beta > 0$. Montrer que $e^{-\beta} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx$.(on appliquera le théorème des résidus à $z \mapsto \frac{e^{i\beta z}}{1+z^2}$ sur des demi-cercles).

b) Utilisant que $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x^2)u} du$, en déduire l'identité de subordination $e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} du$.

c) En déduire, pour $y > 0$, $\mathbb{F}(e^{-y\|x\|})(\zeta) = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2}) \frac{y}{(y^2+\|\zeta\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Exercice 2 : Montrer qu'une fonction harmonique sur le demi-espace $\{y > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ continue jusqu'au bord, bornée, nulle sur $y = 0$ est identiquement nulle.

Exercice 3 : On s'intéresse au problème suivant pour les fonctions harmoniques dans le demi-espace $\{y > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\} = E_{n+1}^+$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \Delta_x u(x, y) = 0 & y > 0 \\ u(0, x) = f(x) & \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

a) Montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, bornée comme fonction de y à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telle que $\mathbb{F}_x u$ est continue sur $\overline{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}^n$; lorsqu'on se restreint au distribution tempérée f telle que $\mathbb{F}f$ est continue. Cette solution est donnée par $u(y, x) = \mathbb{F}_x^{-1}(e^{-y\|\zeta\|}) *_x f$

b) Calculer la solution fondamentale.

Exercice 4 : Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, montrer que l'équation $\Box U = 0$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ de données de cauchy $u(0) = f$, $u'(0) = g$.

Exercice 5 :

a) Montrer que l'opérateur des ondes $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ admet une unique solution fondamentale E_+ de support dans $\{t \geq 0\}$.

b) Montrer que pour toute distribution T sur $\mathbb{R}^{n+1}$, de support $\{t \geq 0\}$ il existe une unique solution de $\Box U = T$ de même support.

c) Soient $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. Montrer qu'une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ de $\Box u = f$ de données de Cauchy $u(o, x) = \varphi_0(x)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(0, x) = \varphi_1(x)$ est unique et vérifie $\Box H(t)u = H(t)f + \delta' \otimes \varphi_0 + \delta \otimes \varphi_1$.

d) Construire u.

Exercice 6 : Pour l'exercice précédent, lorsque $f = 0$, montrer que $supp_x u(x, t) \subset (supp\varphi_0 \cup supp\varphi_1) + B(0, t)$. Qu'en est-il pour l'équation de la chaleur ?

Exercice 7 :

a) Calculer la solution élémentaire avancée en dimensions $1+1$ et $1+3$. On calculera la transformée de Fourier de $\mathbb{I}_{[-1,1]}$ sur $\mathbb{R}$ et de la distribution $\theta \mapsto \int_{S(0,1)} \theta(\omega) d\omega$ sur $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire la forme des solutions pour le problème de Cauchy.

Exercice 8 : Calcul de la solution fondamentale en dimension $1+2$: partiel du 29 janvier 2001

Exercice 9 : Un calcul pour la transformée de Fourier de $\zeta \mapsto \frac{\sin t\|\zeta\|}{\|\zeta\|}$ pour $n \geq 2$.

a) Montrer que pour $Re(y) > 0$, on a $\mathbb{F}_\zeta^{-1}(e^{-y\|\zeta\|})(\zeta) = \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\frac{y}{(y^2+\|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$.

b) En écrivant que $(\epsilon > 0)$, $\frac{\sin t\|\zeta\|}{\|\zeta\|}e^{-\epsilon\|\zeta\|} = \frac{1}{2i}\int_{\epsilon-it}^{\epsilon+it} e^{-s\|\zeta\|}ds$, montrer que $\mathbb{F}^{-1}\frac{\sin t\|\zeta\|}{\|\zeta\|} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})IM(\frac{1}{(1-n)(\|x\|^2-(t-i\epsilon)^2)^{\frac{n-1}{2}}})$.

c) En déduire que $\mathbb{F}^{-1}\frac{\sin t\|\zeta\|}{\|\zeta\|}$ est de support contenu dans la boule fermée de rayon t, et que si $n \geq 3$ est impair alors cette distribution est de support contenu dans la sphère de rayon t.

d) Calculer cette limite pour $n = 2$.

Exercice 10 : Principe de descente

a) Soit E_n la solution élémentaire avancée de $\Box_n$ à support dans le cone d'onde d'avenir de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$. Montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{n-1}) \ni \theta \to L(\theta) =< E_n, \theta \otimes 1_{x_n} >$ définit une distibution qui est soluton élémentaire de $\Box_{n-1}$ de support dans $\{t \geq \|x\|_{\mathbb{R}^{n-1}}\}$.

b) retrouver ce résultat par transformation de Fourier.

c) En déduire la solution fondamentale avancée de $\Box_2$.

Exercice 11 : Soit $P(\partial)$ un opérateur à coefficients constants.

a) Montrer que $P(\partial)\theta = 0$ avec $\theta \in \mathbb{C}_0^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ entraine $\theta = 0$.

b) Montrer que$P(\partial)$ n'admet pas de solution fondamentale de support compact.