Équations aux dérivées partielles - TD2

Fonctions tests

Exercice 1 :

a) Soient $0 < a < b$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}}$ si $a < x < b$ et nulle ailleurs. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et qu'il en est de même pour la fonction $F(x) = \frac{\int_x^b f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}$.

b) Montrer que $F(x) = 1$ si $x < a$ et que $F(x) = 0$ si $x > b$. Donner le support de F.

c) soient I un intervalle compact et $\epsilon > 0$. Construire une fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty(I_\epsilon)$ identiquement égale à 1 sur I.

Exercice 2 : Propriétés élémentaires de la convolution

a) Soient $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, l'une des fonctions ayant un support compact. Montrer que $u * v$ est définie et continue, on a $u * v = v * u$ et $\mathrm{supp}(u * v) \subset \overline{\mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(v)}$.

b) i) Montrer que si de plus $u \in \mathcal{C}^j$ alors $u * v$ est $\mathcal{C}^j$ et $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v$ si $|\alpha| \leq j$.

ii) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^k$, $v \in \mathcal{C}^j$ alors $u * v \in \mathcal{C}^{k+j}$ et $\partial^{\alpha+\beta}(u * v) = (\partial^\alpha u) * (\partial^\beta v)$ si $|\alpha| \leq k$ et $|\beta| \leq j$.

c) On suppose maintenant $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $u*v$ existe p.p. , est intégrable et $\|u*v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^1}$.

Exercice 3 :

a) Montrer que l'opérateur de translation $\tau_y : f \mapsto [x \mapsto \tau_y f(x) = f(x-y)]$ est linéaire continu sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p \leq +\infty$.

b) Montrer que $\lim_{y\to 0} \tau_y f = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < +\infty$. (on montrera le résultat pour une fonction simple puis on utilisera la densité des fonctions simples dans l'espace L^p si $1 \leq p < +\infty$).

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \rho_n * f = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < +\infty$, pour une suite régularisante ρ_n.

d) En déduire que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Exercice 4 :

a) Montrer que la fonction

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-||x||^2}} & si\ ||x|| < 1 \\ 0 & si\ ||x|| \geq 1 \end{cases}$$

définit un élément de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose $\varphi = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1}\varphi_1$.

b) En déduire que pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $f_\epsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq f_\epsilon \leq 1$, $f_\epsilon = 1$ au voisinage de K et f_ϵ est nulle hors de K_ϵ. Donner une estimation des dérivées partielles de f_ϵ en fonction de ϵ et de l'ordre de dérivation.

c) En déduire que les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ séparent les compacts des fermés.

Exercice 5 : Suites régularisantes. On dit qu'une suite de fonctions $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $\rho_k \in \mathcal{C}_0^\infty$ $\mathrm{supp}(\rho_k) \subset B(0, \frac{1}{k})$,$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k = 1$ et $\rho_k \geq 0$.

a) Construire une suite régularisante.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\rho_k * f \to f$ dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$ (de plus, la convergence dans $\mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ est uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$).

Exercice 6 :

a) Montrer le théorème suivant : Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors Pour presque tout x la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On pose $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.
On montrera d'abord le cas $p = +\infty$, puis $p = 1$ puis le cas $1 < p < +\infty$ en utilisant Hölder.

b) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (avec $\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante). On rappelle que les fonctions continues de support compact sont dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

c) En déduire que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$ pour tout ouvert non vide Ω.

Exercice 7 : Le théorème de Rieman-Lebesgues
Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier $t \to \int e^{-ix.t} f(x)dx$ est continue et tend vers 0 à l'infini.
Indications, on le montrera d'abord pour $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$ ou f une fonction simple.

Exercice 8 : On veut montrer le théorème de décomposition suivant :
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des ouverts (non vide)de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\cup_{i=1,\ldots,n} X_i)$. Alors il existe des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(X_i)$ telles que $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$. Si φ est positive, alors on peut choisir φ_i positive pour tout $1 \leq i \leq n$.
Indications : Montrer que l'on peut choisir des compacts K_i, $i = 1 \ldots n$ tels que $K_i \subset X_i$ et $supp\varphi \subset \cup_{i=1\ldots n} K_i$. Puis examiner le cas $n = 2$.

Exercice 9 :

a) On dit qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ est homogène de degrés $s \in \mathbb{C}$ si $\forall \lambda > 0$, $u(\lambda x) = \lambda^s u(x)$. Montrer qu'une fonction homogène est déterminée par sa restriction à la sphère unité. En déduire les fonctions homogènes sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que u homogène de degrés s entraine $\partial_i u$ homogène de degrés $s-1$. Montrer qu'une fonction est homogène de degrés s ssi $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) = su(x)$ (équation d'Euler) (on étudiera la fonction $0 < \lambda \to u(\lambda x)$).

c) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ homogène de degrés s. Montrer que si $\mathrm{Re}\,(s) < 0$ alors f est nulle. En dèduire qu'une fonction homogène sur $\mathbb{R}^n$ est un polynôme.

Exercice 10 : Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{C}$ la fonction $\|x\|^s$ est-elle intégrable en 0, à l'infini ?(passer en coordonnées sphériques).

Exercice 11 : En calculant de deux manières l'intégrales $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx$, calculer la surface de la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ (à l'aide de la fonction Γ). En déduire la surface de la sphère de rayon r et le volume de la boule de rayon r.

Exercice 12 : Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.