Équations aux dérivées partielles - TD6

Laplacien et fonctions harmoniques

Exercice 1 : Montrer que les translations et les homothéties préserves les fonctions harmoniques. Montrer qu'une rotation préserve les fonctions harmoniques.

Exercice 2 : Soit $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\Omega)$ de laplacien de classe $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$. Montrer que T est $\mathcal{C}^{\infty}$.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ (par exemple). On définit
$M(f, x, r) = |S_{n-1}|^{-1} \int_{y \in S_{n-1}} f(x + ry)dS(y)$, la valeur moyenne de f sur la sphère $S(x, r)$. Montrer que $x \mapsto M(f, 0, \|x\|)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, radiale ; montrer que son dévelopement de Taylor en l'origine ne contient que des termes en $\|x\|^2$ (en fait, on montre que cette fonction est $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage de 0). En déduire que $r \mapsto M(r, f, 0)$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}([0, +\infty[)$.

Exercice 4 : Montrer qu'une fonction harmonique sur $B(0, R)$ radiale est constante ($n > 1$). Donner des exemples de fonctions harmoniques et radiales, non constantes, sur $\mathbb{R}^{n*}$.

Exercice 5 : Soit $u \in \mathcal{C}^{\infty}(C(0, r_1, r_2))$ (couronne) et $g \in \mathcal{C}_0^{\infty}(]r_1, r_2[)$.

a) Montrer que $|S_{n-1}|^{-1} \int g(r)\Delta u(x)dx = -\int r^{n-1} g'(r) \frac{d}{dr} M(u, 0, r)dr$.

b) En déduire $\int_{a<r=\|x\|<b} \Delta u = |S_{n-1}| \left[r^{n-1} \frac{d}{dr} M(u, 0, r) \right]_a^b$. Montrer que $\Delta M(u, 0, r) = M(\Delta u, 0, r)$.

c) En déduire que si u est sous harmonique sur $B(0, r_2)$ (resp. harmonique) alors la valeur moyenne sur les sphères est une fonction croissante (resp. constante) de r.

Exercice 6 : Soit $u \in C^2(\Omega)$. Montrer que $\lim_{r \to 0} \frac{M(u,x,r) - u(x)}{r^2} = \frac{\Delta u(x)}{2n}$.

Exercice 7 : On se donne une suite de fonctions harmoniques $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sur un ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction u dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, il existe $\tilde{u}$ harmonique telle que $\tilde{u} = u$ *p.p.* et la suite converge vers $\tilde{u}$ dans $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$.

Exercice 8 : Montrer l'inégalité de Harnack : Soit $u \in C^0(\overline{B(0, R)})$, harmonique à l'intérieur. On suppose u positive. Montrer que
$\frac{u(0)}{(R + \|x\|)^n} \leq u(x) \frac{R^{2-n}}{R^2 - \|x\|^2} \leq \frac{u(0)}{(R - \|x\|)^n}$. En déduire que $|Du(0)| \leq \frac{n|u(0)|}{R}$.

Exercice 9 : Montrer qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$, bornée est constante. Donner des exemples de fonctions harmoniques sur le complémentaire d'un compact qui sont bornées.

Exercice 10 : Montrer qu'une fonction harmonique sur $\overline{B(0, 1)} \setminus \{0\}$ bornée admet u prolongement harmonique à $B(0, 1)$.
On montrera que $u = P[u_{|S}]$ avec $P[u_{|S}]$ la solution du problème de Dirichlet de donnée frontière $u_{|S}$. On étudiera le maximum ou le minimum de $u - P[u_{|S}] + \epsilon(|x|^{2-n} - 1)$ ($n > 2$) suivant le signe de ϵ.

Exercice 11 :

a) Montrer qu'une fonction sous harmonique f sur Int$K$ continue sur K vérifie : Pour toute fonction harmonique sur Int$K$ continue sur K, $f \leq u$ sur ∂K entraine $f \leq u$ partout.

b) Montrer, en utilisant la solution du problème de Dirichlet dans des boules, que $r \mapsto M(f, r, x)$ est une fonction croissante de r si f est sous harmonique (c'est en fait une caractérisation).