Équations aux dérivées partielles - TD5

Transformée de Fourier

Exercice 1 :

a) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ssi $\forall \alpha, \forall \beta$, $\|x^\alpha \partial^\beta f(x)\|_\infty < +\infty$ ssi $\forall \alpha, \forall \beta$, $\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| dx < +\infty$ ssi $\forall m, k$, $\sup_{|\beta| \leq m} \|(1+|x|^2)^k |\partial^\beta f(x)|\|_\infty < +\infty$.
La topologie de $\mathcal{S}$ est définie par l'une des seminormes ci-dessus, $\mathcal{S}$ est un Frechet pour cette topologie.

b) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par convolution.

Exercice 2 :

a) Montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3 :

a) Montrer que si $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ est à croissance lente *i.e.* il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que $\frac{|g(x)|}{(1+|x|^2)^k}$ est bornée ou intégrable alors $[g]$ définie une distribution tempérée.

b) Montrer que $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer que la multiplication par un polynôme est bien définie sur $\mathcal{S}'$ et que $\mathcal{S}'$ est stable par dérivation.

d) Montrer que $\mathcal{C}_0^{-\infty}$ est dense dans $\mathcal{S}'$.

Exercice 4 :

a) Montrer le théorème de Riemann Lebesgue : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{f}$ est continue bornée et tend vers 0 en l'infini.

b) Montrer que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g}$.

c) Montrer que $\widehat{\tau_a f} = e^{-ia.\zeta} \hat{f}$ et $\widehat{e^{ia.x} f} = \tau_a \hat{f}$.

d) En déduire $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\zeta) g(\zeta) e^{ia.\zeta} d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+a) \hat{g}(x) dx$.

Exercice 5 :

a) Calculer la transformée de Fourier de $e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$ (plusieurs méthodes).

b) En déduire la transformée de Fourier de $e^{-\frac{\epsilon}{2}\|x\|^2}$.

c) En déduire que $\mathbb{F}1 = (2\pi)^n \delta$.

Exercice 6 : Calculer de deux manières $\mathbb{F}([1]')$. En déduire que $\mathbb{F}1 = 2\pi\delta$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 :

a) Montrer qu'une distribution homogène est tempérée. Montrer que la transformée de fourier d'une distribution homogène est homogène.

b) Soit $T \in \mathcal{C}_0^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\mathbb{F}(T)(\zeta) = < T_x, e^{-ix\zeta} >$.

Exercice 8 : Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Montrer que si $T \in \mathcal{S}'$, $P(\partial)\mathbb{F}(T) = \mathbb{F}(P(-ix)T)$ et $\mathbb{F}(P(\partial)T) = P(+i\zeta)\mathbb{F}(T)$. Calculer $\mathbb{F}(x^\alpha)$ et $\mathbb{F}\partial^\beta\delta$.

Exercice 9 :

a) Calculer la transformée de Fourier de $H_\alpha^\lambda(x) = H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x}$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. On commencera par faire le calcul pour $0 < \alpha < 1$.

b) En déduire la formule $H_\alpha^\lambda * H_\beta^\lambda = H_{\alpha+\beta}^\lambda(x)$.

Exercice 10 : Montrer que la convolution de distributions radiales est radiales

Exercice 11 : Calculer la transformée de fourier de x_+^α

Exercice 12 : Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{I}_{[-A,A]}$, vérifier que cette transformée se prolonge en une fonction entière.

Exercice 13 : Montrer que la transformée de Fourier de $(1-|x|)\mathbb{I}_{|x|<1}$ est $\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2$.

Exercice 14 : Calculer la transformée de Fourier de $e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$, vérifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais qu'elle n'est pas dans $\mathcal{S}$.

Exercice 15 :

a) Trouver les distributions impaires solutions de $xT = 1$.

b) En d'eduire la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$.

Exercice 16 : Calculer la transformée de Fourier de $H(x)$.

Exercice 17 : Calculer la transformée de Fourier de $|x|\mathbb{I}_{]-1,1[}(x)$. Vérifier qu'elle se prolonge en une fonction entière.

Exercice 18 : On considére la distribution tempérée $|x|$.

a) Calculer $\delta'' * |x|$.

b) En déduire que $\mathbb{F}|x|$ est de la forme $A.\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) + c.\delta$ et calculer A.

c) Calculer $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)'$. En déduire $\mathbb{F}\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et la constante c.

Exercice 19 :

a) Quelles sont les images de fourier des distributions suivantes :
δ_a, $e^{\pm ix}$, $\cos x$, $\sin x$.

b) Calculer la transformer de Fourier de $f(x) = \frac{2\sin x - 2x\cos x}{x^3}$. Pour cela on calculera la transformée de Fourier de $x^3 f(x)$, (d'où une équation différentielle sur $\mathbb{F}f$) et on utilisera que f est intégrable.

Exercice 20 : Soit f une fonction radiale intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{F}f$ est une fonction radiale. En déduire que $\mathbb{F}f(\zeta) = \mathbb{F}(f)(|\zeta|, 0, \dots, 0)$. Application : Calculer l'image de Fourier de $\mathbb{I}_{B(0,1)}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 21 : On considére la fonction $f_k(x) = ||x||^{-k}$, (norme euclidienne) avec $0 < k < n$.

a) Montrer que f_k définit une distribution tempérée.

b) Pour $k > \frac{n}{2}$, montrer que $\mathbb{F}f_k$ est représentable par une fonction.(On ecrit $f = f\mathbb{I}_{B(0,1)} + f\mathbb{I}_{|x|>1}$).

c) Montrer que $\mathbb{F}f_k$ est la fonction radiale $c_{k,n}|x|^{k-n}$ avec $c_{k,n}$ une constante que l'on détèrminera ($k > \frac{n}{2}$, on teste sur la gaussienne pour calculer $c_{k,n}$).

d) En déduire $\mathbb{F} f_k$ pour $0 < k < n$.

Exercice 22 : Calculer la transformée de Fourier de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Exercice 23 : Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$. Montrer que toute distribution $u \in \mathcal{C}_0^{-\infty}$ solution de $P(D)u = 0$ est nulle.

Exercice 24 : Soit A une $n \times n-$matrice symétrique définie positive. Montrer que $e^{-<Ax.x>}$ est dans $\mathcal{S}$. Calculer $\mathbb{F}(e^{-<Ax.x>})$ (Indication : On utilisera une diagonalisation en base orthonormée).

Exercice 25 :

a) Montrer que $\lambda \to [e^{\lambda \frac{||x||^2}{2}}]$ est continue de $\{re(\lambda) \leq 0\}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, holomorphe sur $\{re(\lambda) < 0\}$.

b) En déduire, par prolongement analytique, la transformée de Fourier de $[e^{it\frac{||x||^2}{2}}]$.

Exercice 26 : Formule sommatoire de Poisson Calculer la transformée de Fourier du peigne de Dirac

$$W_T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}.$$

Exercice 27 : Transformée de Fourier partielle. Trouver, en utilisant la transformée de Fourier partielle, des solutions fondamentales des opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} C &= \partial_t - \Delta_x \text{ (Chaleur)} \\ S &= \frac{1}{i}\partial_t - \Delta_x \text{ (Schödinger)} \\ \Box &= \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta_x \text{ (Ondes)} \end{aligned}$$

Exercice 28 : Trouver une solution fondamentale de l'opérateur

$$\partial_x^4 - \partial_x^2 + 1,$$

d'abord sous forme intégrale, puis par une formule explicite. Trouver une solution fondamentale de l'opérateur

$$\partial_x^4 - \partial_y^2 + 1.$$

Exercice 29 : Malgrange-Ehrenpreis (cas simple). On rappelle que le théorème de Malgrange-Ehrenpreis affirme que tout opérateur différentiel linéaire non nul à coefficients constants $P(D)$ admet une solution fondamentale $u \in \mathcal{S}'$, i.e., une distribution tempérée telle que

$$P(D)u = \delta.$$

Trouver une condition portant sur un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ et sur l'ensemble de ses zéros pour que l'équation linéaire

$$P(D)u = 0$$

admette une solution fondamentale $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ facilement descriptible.

Exercice 30 : Soit P un polynôme non nul à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ et $P(D)$ l'opérateur différentiel correspondant.

a) Montrer que si $u \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ est une distribution à support compact satisfaisant $P(D)u = 0$, alors $u = 0$.

b) Montrer que si l'ensemble

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n | \, P(\xi) = 0\} = \{0\}$$

des zéros réels de P est nul alors le noyau de $P(D)$ ne contient que des polynômes.