Équations aux dérivées partielles - TD4

Distributions 2

Exercice 1 : Montrer le théorême suivant : Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors Pour presque tout x la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On pose $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.
On montrera d'abord le cas $p = +\infty$, puis $p = 1$ puis le cas $1 < p < +\infty$ en utilisant Hölder.

Exercice 2 : Soient $1 \leq p \leq +\infty$ et p' l'exposant conjugué. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

a) Montrer que $f * g$ est partout définie, bornée, et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ (pour cette derniére propriété, on montrera que l'opérateur de translation τ_p vérifie $\forall \alpha \in L^q(\mathbb{R}^n)$,$1 < q < +\infty$, $\tau_a\alpha \to \alpha$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ quand $a \to 0$).
b) Montrer que si de plus $p < +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f*g(x) = 0$ (On montrera d'abord cette propriété lorsqu'une des deux fonctions est continue à support compact).

Exercice 3 : On note $E(t,x) = H(t)\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$.

a) Montrer que $E \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$. Quel est le support singulier de $[E]$?
b) Montrer que $\partial_t - \Delta_x E = \delta$. (On pourra, par exemple, écrire que $E(t,x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} H(t-\epsilon)E(t,x)$ et calculer).

Exercice 4 : Soient X (resp . Y) un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X \times Y)$. On suppose qu'il existe K un compact de X tel que $\mathrm{supp}_x\varphi(.,y) \subset K$, pour tout $y \in Y$.

a) Montrer que $y \mapsto \varphi(.,y)$ est $\mathcal{C}^\infty(Y, \mathcal{C}^\infty_0(X))$ et calculer ses dérivées partielles.
b) Soit $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(X)$, montrer que $y \mapsto < T_x, \varphi(x,y) >$ est $\mathcal{C}^\infty(Y)$ et calculer ses dérivées partielles.
c) Montrer que pour $f \in L^1(Y)$ de support compact, on a $\int_Y f(y) < T_x, \varphi(x,y) > dy = < T_x, \int_Y f(y)\varphi(x,y)dy >$.

Exercice 5 : Montrer que la série de Fourier d'une distribution périodique T converge au sens des distributions vers T.
(Indication : Utiliser le résultat de l'exercice 9 feuille distribution 1)

Exercice 6 :

a) Montrer que $\varphi \to < \mathrm{vp}\frac{cos\lambda x}{x}, \varphi > = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{cos\lambda x}{x}\varphi(x)dx$ définit une distribution.
b) Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{vp}\frac{cos\lambda x}{x} = 0$

Exercice 7 : Distributions homogènes. Pour $\lambda > 0$, on pose $A_\lambda = \lambda I$. Une distribution $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ est homogène de degrés $p \in \mathbb{C}$ si $T \circ A_\lambda = \lambda^p T$

a) Vérifier que si $T = [f]$ est régulière et homogène de degrés p alors f est une fonction homogène.
b) Vérifier que si T est homogène de degrés p alors $\partial^\alpha T$ est homogène de degrés $p - |\alpha|$. Vérifier que les dérivées de δ sont homogènes dans $\mathbb{R}^n$. Application : calculer $\partial_z \frac{1}{z}$, le laplacien de r^{2-n} dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$.
c) i) On note $E = \sum_{i=1}^n x_i\partial^i$ l'opérateur d'Euler. Calculer ${}^tE$. ii)Montrer que T est homogène de degrés p ssi elle vérifie l'équation d'Euler : $\sum_i x_i\partial^i T = pT$.
Indications : On dérivera la fonction $\lambda \mapsto < T \circ A_\lambda, \varphi >$ avec φ une fonction Test.

Exercice 8 : Montrer que les distribution homogènes de degrés p sur $\mathbb{R}$ sont combinaisons linéaires de x_+^p, x_-^p si $p \neq -1, -2, \ldots$ ou $\mathrm{pf}x^{-m}$, $\delta^{(m-1)}$ si $-p = m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 : Intégrales singulières.

a) Soit u une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $u(tx) = t^{-n}u(x)$. Montrer que $< U, f >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < \|x\|} (uf)(x)dx$ existe pour toute $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ssi $\int_{\|\omega\|} u(\omega)dS(\omega) = 0$.

b) Montrer que si cette derniére condition est satisfaite alors U définit une distribution.

Exercice 10 :

a) Soit $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{x'}^{n-1})$. Montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \ni (f, g) \mapsto T(f \otimes g)$ définie à g fixé (resp. f) une distribution sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^n$).

b) Montrer que si $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\partial^1 T = 0$ alors il existe $T'_x \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})$ telle que $T = 1_{x_1} \otimes T_{x'}$.

Exercice 11 : Soient $f, g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ de supports adaptés. Montrer que $x \mapsto h(x) = f * g(x)$ existe pp, $h \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $[f] * [g] = [h]$.

Exercice 12 :

a) Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ de support inclus dans $[0, +\infty[$. Calculer $H * f$

b) Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, calculer $u * \mathbb{I}_{[a,b]}$ et sa dérivée.

c) Calculer $\mathbb{I}_{[a,b]} * \mathbb{I}_{[c,d]}$, $H(x)\sin x * H(x)\cos x = \frac{1}{2}xH(x)\sin x$, $(H(x)e^x)^{*2}$

Exercice 13 : On pose $G_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{x^2}{2a}}$, $a > 0$. Calculer $G_a * G_b$

Exercice 14 : On pose $H_\alpha^\lambda(x) = H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x}$, $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que $H_\alpha^\lambda * H_\beta^\lambda = H_{\alpha+\beta}^\lambda$

b) En déduire la puissance $n-$ieme de convolution de H_α^λ.

Exercice 15 :

a) Montrer que $(\mathcal{C}^{-\infty}_{[0,+\infty[}(\mathbb{R}), +, *)$ est une algèbre de convolution commutative d'unité δ.

b) Montrer que dans cette algèbre l'équation $A * X = B$ admet une solution pour tout B ssi A admet un inverse.

c) Calculer l'inverse de H.

d) Soit $P(D) = \partial^n + a_1\partial^{n-1} + \ldots + a_n\partial^0$ un opérateur différentiel à coefficiants constants. Écrire l'équation $P(D)u = f$ sous forme d'une convolution. En déduire qu'une solution fondamentale pour $P(D)$ est un inverse de $P(D)\delta$.

e) Soit Z une solution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de cette équation de donnée de Cauchy en 0 $Z^{(i)}(0) = 0$ $0 \leq i < n-1$ $Z^{n_1}(0) = 1$. Montrer que HZ est une solution fondamentale de $P(D)$. En déduire la solution de léquation $P(D)u = f$ de données de cauchy $f^{(i)}(0) = c_i$ $0 \leq i \leq n-1$.

f) Calculer $(\delta' - \lambda\delta)^{-1}$. En déduire $(\delta' - \lambda\delta)^{-n}$. En factorisant le polynôme P, calculer la solution fondamentale de $P(D)$.

Exercice 16 :

a) On note $F = \{p \in \mathbb{R}^2, 0 \leq |x| \leq y\}$. Montrer que F est adaptée à lui-même.

b) Calculer $\mathbb{I}_F * \mathbb{I}_F$.

Exercice 17 : On note E_n la solution fondamentale du laplacien sur $\mathbb{R}^n$.

a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ identiquement égale à 1 au voisinage de 0. Montrer que $\Delta(\varphi E_n) - \delta$ est un élément de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Montrer que $\partial_i(\varphi E_n) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

c) Soit T une distribution possédant des dérivées partielles $\partial_i T$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Montrer que T est dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 18 : Montrer que si $P(D)$, un opérateur à coefficients constants, admet une solution fondamentale de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine alors toute distribution U telle que $P(D)U$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ est représentée par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner des exemples de tels opérateurs.

Exercice 19 :

a) Trouver une solution fondamentale de ∂^n sur $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

b) En déduire une solution fondamentale de $\partial^{(l_1,\dots,l_n)}$. Supposant $l_i = k+2$, montrer qu'il existe une solution fondamentale de classe C^k.

c) En d'eduire que si T est une distribution de support compact dans $\mathbb{R}^n$ et d'ordre k alors il existe une fonction continue u sur $\mathbb{R}$ telle que $\partial^{(k+2,\dots,k+2)}u = T$.

Exercice 20 : On note $C = \{p \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq |x| \leq y\}$.

a) Soit $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ Montrer que C et $supp g(x) \otimes \delta(t)$ sont adaptés. Montrer que $\mathbb{I}_C * (g(x) \otimes \delta(t)) = H(t) \int_{x-t}^{x+t} g(y)dy = (\mathbb{I}_C \underset{x}{*} g)(x)$.

b) Résoudre $\Box u = g \otimes \delta(t) + f \otimes \delta(t)'$ avec g, f des distributions sur $\mathbb{R}$ et U de support contenu dans $t \geq 0$.

c) On suppose $g \in C^k$ et $f \in C^{k+1}$. Montrer que U est représentable par une fonction u de classe $C^{k+1}([0, +\infty[\times\mathbb{R})$, telle que $\Box u = 0$ pour $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$ et $\partial_t u(x,0) = g$. Montrer que $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy + f(x+t) + f(x-t)\right) H(t)$.

Exercice 21 : Calculer $F * (a \otimes b)$ lorsque ...