Équations aux dérivées partielles - TD9

Hypoellipticité

Exercice 1 : Un opérateur différentiel $P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)(i\partial)^\alpha$ est dit $\mathcal{C}^\infty-$hypoelliptique si $\forall T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\Omega)$, $PT \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ entraine $T \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
Soit $P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(i\partial)^\alpha$ un opérateur à coefficients constants. On suppose que P admet une solution fondamentale $E \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que suppsing$(E) = \{0\}$.

a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ identiquement égale à 1 au voisinage de 0. Montrer que $P(\varphi E) - \delta$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) En déduire que si $T \in \mathcal{C}_0^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $PT \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) En déduire que si $T \in \mathcal{C}^{-\infty}(\Omega)$ vérifie $PT \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors $T \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Exercice 2 : On dit que P opérateur à coefficients constants, $P(i\partial) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(i\partial)^\alpha$, est elliptique si $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\zeta^\alpha \neq 0$ si $\zeta \neq 0$ (on note ζ la variable duale).

a) Montrer que P est elliptique ssi $\exists K, R > 0$ tels que $|P(\zeta)| \geq K\|\zeta\|^k$ sur $\|\zeta\| \geq R$.

b) Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n_\zeta)$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de $B(0, R)$. Montrer que $\frac{1-\chi}{P}(\zeta) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\zeta)$. En déduire qu'il existe $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ telle que $PE = \delta - \omega$. On dit que E est une paramétrixe pour P

c) Montrer que $|\partial^\alpha \frac{1-\chi}{P}(\zeta)| \leq C(\alpha)\|\zeta\|^{-(k+|\alpha|)}$. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha| \geq n_0$ entraine $x^\alpha E \in C^m(\mathbb{R}^n)$. En déduire que $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

d) En déduire qu'un opérateur elliptique à coefficients constants est $\mathcal{C}^\infty-$hypoelliptique.

Exercice 3 : Examen de septembre 2002

Exercice 4 : Examen de septembre 2003