# Équations aux dérivées partielles - TD3

## Distributions 1

**Exercice 1 :** Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$ de diamètre $D$ et $f \in \mathcal{C}^k_K(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\|f\|_\infty \leq D\|\partial_1 f\|_\infty$ et que si $k - p > 0$, $N_{K,p}(f) \leq D^{k-p} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$.

**Exercice 2 :** Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. montrer que la distribution régulière associée est nulle ssi $f$ est nulle p.p.

**Exercice 3 :** Distribution de Dirac et peigne de Dirac.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'évaluation en $a$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$, notée $\delta_a$, appelée distribution de Dirac. Quel est son support ? Calculer $f\delta^{(p)}$ et $(f\delta)^{(p)}$ pour $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Soit $< W_T, \varphi >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(nT)$. Montrer que $W_T$ définit une distribution, trouver son support et montrer que $\lim_{N\to+\infty} 1_{[-N,N]} W_T = W_T$ au sens des distributions. Montrer que $W_T$ est périodique de période $T$.

**Exercice 4 :**

a) Calculer $x^k\delta^{(p)}$

b) Montrer que les distributions $\delta^{(p)}, p \in \mathbb{N}$, sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 5 :** Valeur principale et parties finies.

a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0([-M, M])$. Montrer que la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{n+1}} \left(\varphi(x) - \sum_{j=0}^n \frac{x^i}{i!} \varphi^{(j)}(0)\right) & si\ x \neq 0 \\ \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{n+1}(0) & si\ x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Majorer les dérivées de $\psi$ sur $\mathbb{R}$ en fonction des dérivées de $\varphi$.Donner une majoration analogue du reste integrale en plusieurs variables.

b) Montrer que les applications suivantes définissent des distributions et majorer leur ordre :
i) $\varphi \mapsto < \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$
ii) $\varphi \mapsto < \mathrm{pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi >= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}$

c) Calculer $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, $x\mathrm{pf}(\frac{1}{x^2})$, $x^2\mathrm{pf}(\frac{1}{x^2})$, $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})'$, $[\log|x|]'$.

d) Résoudre $xT = 1$, d'inconnue $T \in \mathcal{C}^{-\infty}$ (On étudiera d'abord l'équation homogène).

**Exercice 6 :**

a) Calculer $\mathrm{pf}(x_+^{-1}) = \mathrm{pf}(\frac{H(x)}{x})$, $\mathrm{pf}(x_+^{-2})$.

b) Calculer la dérivée de $\log(x_+)$, $\mathrm{pf}(x_+^{-1})$.

**Exercice 7 :** Soit $-1 < \lambda < 0$ Calculer la dérivée au sens des distribution de $x_+^\lambda = H(x)x^\lambda$.

**Exercice 8 :** Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $g : t \mapsto \int_0^t f(x)dx$. Calculer la dérivée de $g$ au sens des distributions.

**Exercice 9 :** Formule du saut en dimension 1.

a) On note $H$ la fonction de Heaviside. Calculer ses dérivées successives (au sens des distributions).

b) Calculer les dérivées de $[|x|]$

c) Soit $u$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I \setminus \{x_0\})$, $x_0 \in I$ intervalle ouvert. Supposons que la fonction $v$ qui est égale à $u'$ en dehors de $x_0$ soit localement intégrable en $x_0$ alors $u(x_0 \pm 0) = \lim_{x \to x \pm 0} u(x)$ existent et $[u]' = [v] + (u(x_0+0) - u(x_0-0))\delta_{x_0}$.

d) On suppose maintenant $u \in \mathcal{C}^\infty(I \setminus \{x_0\})$, et que chacune des dérivées de $u$ ait une limite à gauche et une limite à droite en $x_0$. On appelle $\sigma_m = u^m(x_0+0) - u^m(x_0-0)$ le saut de la dérivèe $m-$ème en $x_0$. Calculer $[u]^m$ en fonction des $[u^k]$, $\sigma_k$ et $\delta^k$.

e) Calculer $(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2)H(x)\frac{\sin(\omega x)}{\omega}$.

**Exercice 10 :** On se place dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et localement intégrable en l'origine telle que $\partial_1 u$ soit localement intégrable en l'origine. Montrer que $\partial_1[u] = [\partial_1 u]$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $\|x\|^s$ pour $re(s) > -n+1$.

**Exercice 11 :** Soit $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{2\pi i n x} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{-n}^{n} a_n e^{2\pi i n x}$ une série trigonométrique. Montrer qu'elle converge au sens des distribution si il existe $A > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|a_n| \leq A|n|^k$ (intégrer terme à terme suffisament de fois). Montrer que $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$.(on montrera que la distribution définie par la première somme est inchangée si on la multiplie par $e^{2\pi i x}$).

**Exercice 12 :** Résoudre $x^n T = 0$ dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$.

**Exercice 13 :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On pose $f_\epsilon(x) = (\epsilon)^{-n} f(\frac{x}{\epsilon})$.

a) Calculer $\lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon$ au sens des distributions.

b) En déduire les limites dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$ quand $\epsilon \to 0$ de $\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$ et $-\frac{1}{\pi}\frac{2x\epsilon}{(x^2+\epsilon^2)^2}$

**Exercice 14 :** Montrer la convergence vers $\delta$ des distributions suivantes :

a) $f_\epsilon = \mathbb{I}_{\|x\|<\epsilon} \frac{n}{\epsilon^n S_n}$

b) $f_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\epsilon^2}}$.

**Exercice 15 :**

a) Montrer que $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{\sin \nu t}{t} dt$ converge dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ vers la fonction de Heaviside.

b) En déduire $\lim_{\nu \to +\infty} \frac{\sin \nu x}{x}$ au sens des distributions.

**Exercice 16 :** Soit $w \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int x^\alpha w(x) dx = 0$ pour $|\alpha| < k$. Posons $u_\epsilon(x) = \epsilon^{-n-k} w(\frac{x}{\epsilon})$. Montrer que $\lim_{\epsilon \to 0}[u_\epsilon]$ existe et la calculer (On utilisera le dévelopement de Taylor à l'ordre $k$ d'une fonction test).

**Exercice 17 :** On note $S_{n-1}(r)$ la sphère de rayon $r$ de $\mathbb{R}^n$,$dS_{n-1}(r)$ l'élément de volume sur cette sphère, et $|S_{n-1}(r)|$ sa surface. Calculer $\lim_{r \to 0} \frac{1}{|S_{n-1}(r)|} \int_{S_{n-1}(r)} \varphi dS_{n-1}(r)$ pour $\varphi$ une fonction test.

**Exercice 18 :**

a) Calculer $\partial^{1,1} H(x)H(y)$.

b) On note

$$E(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} & si\ t \geq |x| \\ 0 & sinon \end{array} \right.$$

Quel est son support singulier ? On pose $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (Opérateur des ondes). Calculer $\Box E$.

c) Retrouver ce dernier résultat par changement de variable à l'aide de la question 1.

**Exercice 19 :** On travaille sur $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$.

a) Montrer que $\frac{1}{z}$ définit une distribution.

b) On pose $\partial_{\overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Calculer $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{1}{z}$.
On pourra passer en coordonnées polaires, ou utiliser la formule de Green.

c) On pose $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$. Calculer $\partial_z \frac{1}{z}$.

**Exercice 20 :** On pose pour $r = \|x\| \neq 0$ la norme euclidienne de $x$

$$E_n = \begin{cases} \log r & \text{si } n = 2 \\ r^{2-n} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

a) Montrer que $E_n$ appartient à $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

b) Soit $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ le Laplacien. Calculer $\Delta E_n$ au sens des distributions (indication : utiliser la formule de Green et les coordonnées polaires).

**Exercice 21 :** Le but de l'exercice est de décrire les distributions $T$ supportées par l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Une telle distribution est d'ordre fini $k$.

a) Montrer que si $T$ est d'ordre 0 alors $T = c\delta$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nulle en l'origine à l'ordre $(\geq)k$ $i.e$ $\partial^\alpha f(0) = 0$ si $|\alpha| < k + 1$. Montrer que si $|\alpha| < k + 1$, $|\partial^\alpha f(x)| \leq \|x\|^{(k+1)-|\alpha|} N_{K,k+1}(f)$, si $x \in suppf \subset K$.

c) Montrer que $T$ est nulle sur une fonction test qui s'annulle en l'origine à l'ordre $k+1$. Indications : On considèrera une fonction $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0,1))$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta$ égale à 1 au voisinage de 0. Notant $\theta_\epsilon(x) = \theta(\frac{x}{\epsilon})$, montrer que $T(\theta_\epsilon f) \to 0$ si $\epsilon \to 0$.

d) En déduire que $T$ est dans l'espace vectoriel engendré par $\{\partial^\alpha \delta, \quad , |\alpha| \leq k\}$.

**Exercice 22 :** Le problème des primitives.

a) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction test $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ait une primitive à support compact est $\int_\mathbb{R} f = 0$.

b) Montrer qu'une solution de l'équation $S' = T$ dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R})$ est connue sur les fonctions tests qui admettent une primitive à support compact.

c) En déduire que toute distribution $T$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ et la calculer (unique à une constante prés).

**Exercice 23 :**

a) Calculer $\mathrm{Log}\,(x \pm i0) = \lim_{y \to 0^\pm} \mathrm{Log}\,(x + iy)$. (avec la détermination de l'argument dans $]-\pi, \pi[$).

b) En déduire les identité $\frac{1}{x \pm i0} = \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \mp i\pi\delta$.

**Exercice 24 :** Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{ixt}}{x - i0} = 2i\pi\delta$

**Exercice 25 :**

a) Calculer l'adjoint d'un opérateur différentiel à coefficients $\mathcal{C}^\infty$.

b) Calculer l'adjoint de l'opérateur d'Euler.

**Exercice 26 :** Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, homogène de degrés $n$.

a) Montrer que $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\|x\|>\epsilon} u(x)\varphi(x)dx$ existe pour toute fonction test ssi $\int_{S_{n-1}} u(\omega)dS(\omega) = 0$. (On pourra passer en coordonées sphériques et utiliser la formule de Taylor à l'ordre 1 pour $\varphi$).

b) Si cette dernière condition est satisfaite, montrer que l'on définit ainsi une distribution.

**Exercice 27 :** Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ pour lequel $\|x\|^m f(x)$ est bornée au voisinage de 0 (par exemple $f(x) = \|x\|^{-m}$). Montrer qu' il existe une distribution $T$ sur $\mathbb{R}^n$ prolongeant la distribution $[f] \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (on procédera comme pour les parties finies).