Équations aux dérivées partielles - TD8

Prolongement méromorphe

Exercice 1 :

a) Soit $f \in \mathbb{C}^k([0,1])$. Montrer que $\lambda \mapsto \int_{[0,1]} x^\lambda f(x)dx$ se prolonge en fonction méromorphe sur $\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda + k) > -1\}$. Pour cela, on soustrait le polynôme de Taylor à l'ordre $k-1$. Donner les poles et les rèsidus.

b) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que $\lambda \mapsto \int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$ est une fonction entière de $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lambda \mapsto [x^\lambda \mathbb{I}_{x>1}]$ définit une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

c) En déduire que la distribution tempérée $x_+^\lambda : f \mapsto \int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$, définie pour $\operatorname{Re}\lambda > -1$, se prolonge en fonction méromorphe de $\lambda \in \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On note encore x_+^λ ce prolongement. Montrer que si $\operatorname{Re}(\lambda + n) > -1$ alors
$< x_+^\lambda, f >= \int_{[0,1]} x^\lambda (f(x) - P_{n-1}(x))\, dx + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!(\lambda+i+1)} + \int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$ avec P_{n-1} le polynôme de taylor de f en l'origine de degrés $n-1$. En déduire les poles et les résidus de $\lambda \mapsto x_+^\lambda$.

d) Montrer que dans la bande $\{-n > \operatorname{Re}\lambda > -n-1\}$, on a
$< x_+^\lambda, f >= \int_{[0,+\infty]} x^\lambda (f(x) - P_{n-1}(x))\, dx$

e) Montrer que $(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}$ en dehors des poles.

Exercice 2 :

a) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que si $\operatorname{Re}(\lambda) > -1$ alors
$< x_+^\lambda, f >= (-1)^k \int_{[0,+\infty]} \frac{x^{\lambda+k}}{(\lambda+1)\dots(\lambda+k)} f^{(k)}(x)dx.$

b) Montrer que

$$\lambda \mapsto (-1)^k \int_{[0,+\infty]} \frac{x^{\lambda+k}}{(\lambda+1)\dots(\lambda+k)} f^{(k)}(x)dx$$

définit une fonction méromorphe sur $\{\operatorname{Re}(\lambda + k > -1\}$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et détèrminer les poles et les résidus. Montrer que cette distribution est le prolongement méromorphes de x_+^λ.

Exercice 3 : on étudie maintenant $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(\lambda, x)dx$ avec f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (λ, x), holomorphe en λ et $suppf(\lambda, .) \subset]-\infty, a]$ avec $0 < a < 1$.

a) Montrer en intégrant par partie que cette fonction ce prolonge en fonction méromorphe de λ de poles simples (éventuels) $\lambda = -1, -2, \dots$ de résidus $\frac{f^{(k-1)x}(k,0)}{k-1!}$.

b) Etudier l'exemple de la distribution $\varphi \mapsto \int_{-1}^1 (1-x^2)^\lambda \varphi(x)dx$.

Exercice 4 : Examen de Janvier 2003.

Exercice 5 : Examen de janvier 2002.