Équations aux dérivées partielles - TD1

Espaces vectoriels topologiques

Exercice 1 : Soient E un espace vectoriel, et $P = \{p_i\}_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur E. Une $P-$boule est un ensemble de la forme $B(a,p,r) = \{x \in E,\, p(x-a) < r\}$ pour $a \in E$, et un $p \in P$. On rappelle que pour la topologie engendrée par P un ensemble U est ouvert si et seulement si il est réunion d'intersections finies de P boules.

a) Montrer qu'une homothétie de rapport non nul (resp. qu'une translation) est un homéomorphisme.

b) On dit que P est filtrante si pour toute partie finie F de I, il existe une semi-norme p_i de P telle que $\sup_{\alpha\in F} p_\alpha \le p_i$. Montrer que si P est filtrante, alors l'ensemble des boules $\{B(x,p,r)\}_{p\in P, r>0}$ forme une base de voisinage de x. Montrer que la famille de semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ est filtrante. Dans la suite, on supposera la famille filtrante.

c) Montrer que E est séparé ssi pour tout $x \in E - \{0\}$ il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) \neq 0$.
Dans la suite on supposera toujours que E est séparé.

d) Traduire la notion de convergence des suites en termes des semi-normes.

e) Soit N une seminorme sur E. Montrer que N est continue ssi N est continue en 0 ssi il existe un voisinage de 0 sur lequel N est bornée ssi $\exists p \in P$, $C \ge 0$ telle que $N \le Cp$. La norme L^1 est-elle continue sur $\mathcal{C}^k_K$?

f) On se donne maintenant un autre espace vectoriel topologique (séparé) F dont la topologie est engendrée par une famille de semi-normes $Q = \{q_j, j \in J\}$. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Enoncer et démontrer des critéres de continuité pour l'application linéaire u (analogue aux critéres pour les espaces normés).
Soit Ω un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$ et $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Montrer que $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \ni f \mapsto hf \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est linéaire continue.

Exercice 2 : On suppose que la famille de semi-normes P est dénombrable. Montrer alors que la topologie engendrée par P est métrisable et que l'on peut choisir une métrique d invariante par translation. Si l'espace métrique (E,d) est complet, on dit que (E,P) est un Frechet. Traduire en terme de semi-norme la notion de suite de Cauchy, et donc le fait que (E,P) est un Fréchet.

Exercice 3 : Suite exhaustive.

a) Soit Ω un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une suite $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de Ω tel que $\Omega_j \subset \overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$ et $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$.

b) Posons $K_j = \overline{\Omega_j}$. Alors la famille de semi-normes $\{N_{K_j,k}\}$ est une base dénombrable de semi-normes continues sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Exercice 4 :

a) Montrer que $\mathcal{C}^0(\Omega)$ est un espace de Fréchet. En déduire que $\mathcal{C}^k(\Omega)$ est un Fréchet.

b) Montrer que $(\mathcal{C}^k_K, N_{K,k})$ est un banach. En déduire que $\mathcal{C}^\infty_K$ est un Fréchet.

Exercice 5 : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, donner un exemple de suite de $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ qui ne converge pas dans $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ mais qui converge dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Exercice 6 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, k et m deux entiers positifs $k \geq m$ et $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients dans $\mathcal{C}^{k-m}(\Omega)$. Montrer que P est continu de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{k-m}(\Omega)$.

Exercice 7 : (**) On dit qu'une partie A dans un espace vectoriel topologique E est bornée si elle est absorbée par tout voisinage de 0, *i.e.*, tel que si V est un voisinage de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que $\lambda A \subset V$.

a) Décrire les parties bornées de $\mathcal{C}^m_K$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$.(Pour le dernier espace vectoriel topologique, on admettra qu'un ensemble B de fonction est borné s'il existe un compact K tel que $\forall b \in B, \operatorname{supp}(b) \subset K$ et la restriction de B à $\mathcal{C}^\infty_K$ est borné).

b) Soient $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\mathcal{C}^m(\Omega_2) \to \mathcal{C}^{m-1}(\Omega_1)$ donnée par restriction à Ω_1 est compacte, *i.e* transforme les parties bornées en partie relativement compactes (on utilisera le théorème d'Ascoli).

c) En déduire que l'application $\mathcal{C}^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ est compacte (utiliser un procédé diagonal).

d) Montrer que $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ vérifie la propriété de Montel : Les parties bornées sont relativement compactes.