Distributions et analyse de Fourier-Laplace

Cristinel Mardare
Université Pierre et Marie Curie

Notes de cours à l'intention des étudiants de Polytech'Paris-UPMC,
specialités Sciences de la Terre et Robotique, année 2011-2012

Table des matières

1 Distributions

La notion de distribution est une généralisation de la notion de fonction localement intégrable largement utilisée dans la théorie des équations différentielles et l'analyse de Fourier.

Rappels sur les fonctions

La notion de fonction mesurable n'est pas définie dans ces notes. Il suffit de savoir que toute fonction continue par morceaux est mesurable, et que toute fonction qui peut s'écrire comme une limite d'une suite de fonctions continues est encore mesurable.

Définitions.

(a) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable** si elle est mesurable et
$$\int_a^b |f(x)|dx < \infty \quad \forall -\infty < a < b < \infty.$$
L'ensemble de toutes les fonctions localement intégrables est noté $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

(b) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **intégrable** si elle est mesurable et
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty.$$
L'ensemble de toutes les fonctions intégrables est noté $L^1(\mathbb{R})$.

(c) Soit $1 < p < \infty$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **p-intégrable** si elle est mesurable et
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty.$$
L'ensemble de toutes les fonctions p-intégrables est noté $L^p(\mathbb{R})$ et l'on pose
$$\|f\|_p := \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

(d) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **essentiellement bornée** si elle est mesurable et
$$\exists\ C \in \mathbb{R} \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ presque partout } x \in \mathbb{R}.$$
La plus petite constante C vérifienat cette propriété est notée $\|f\|_\infty$. L'ensemble de toutes les fonctions essentiellement bornées est noté $L^\infty(\mathbb{R})$.

(e) Le **produit de convolution** de deux fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ est défini lorsque $p, q \in [1, \infty]$ vérifient $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 2$ par

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il vérifie les propriétés suivantes :

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}), \quad \text{où } r \in [1, \infty] \text{ est défini par } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1,$$
$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(f) Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **indéfiniment dérivable** si les dérivées $f^{(n)} := \frac{d^n f}{dx^n}$ existent pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble de fonctions indéfiniment dérivables est noté $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(g) Le **support** d'une fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est le plus petit ensemble fermé contenant tous les points $x \in \mathbb{R}$ où $\varphi(x) \neq 0$. En d'autres mots,

$$\text{support}(\varphi) = \text{adhérence}\{x \in \mathbb{R};\ \varphi(x) \neq 0\}.$$

(h) Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est **compact** si et seulement si A est fermé et borné.

Remarques.

(a) $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, sont des espaces vectoriels.

(b) $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p < \infty$. Cette inclusion est stricte, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui ne sont pas dans $L^p(\mathbb{R})$.

(c) $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ sont égaux si et seulement si $f(x) = g(x)$ presque partout (c'est-à-dire que l'ensemble des x où $f(x) \neq g(x)$ est de mesure nulle).

1.1 Définition

Soit

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R});\ \exists\ R < \infty \text{ tel que } \varphi(x) = 0\ \forall\ |x| > R\}.$$

l'espace de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

(a) Une **distribution** est une application $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- T est linéaire,
- Pour tout interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $C = C(a, b)$ et un nombre entier $N = N(a, b) \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$ à support dans $[a, b]$, on a

$$| < T, \varphi > | \leq C \sum_{n=0}^{N} \|\varphi^{(n)}\|_\infty.$$

(b) Une **distribution de type fonction** est une application $[f] : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$< [f], \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

où $f \in L^1_{loc}$.

(c) Une **distribution à support compact** est une distribution $T \in \mathcal{D}'$ telle qu'il existe un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que

$$< T, \varphi >= 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D} \text{ avec support}(\varphi) \subset \mathbb{R} \setminus [a, b].$$

(d) Une **distribution tempérée** est une distribution T vérifiant la propriété suivante : Il existe une constante C et deux nombres entiers $P, N \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$| < T, \varphi > | \leq C \sum_{p=0}^{P} \sum_{n=0}^{N} \|x^p \varphi^{(n)}\|_\infty \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$$

Remarques.

- $< T, \varphi > := T(\varphi)$ désigne la valeur de T en φ.
- T linéaire $\Leftrightarrow$ $T(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = T(\varphi_1) + \lambda T(\varphi_2) \quad \forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble de toutes les distributions est noté $\mathcal{D}'$. Noter la différence de notation :

$$\mathcal{D} = \textbf{espace de fonctions test},$$
$$\mathcal{D}' = \textbf{espace de distributions}.$$

- Le **support** d'une distribution $T \in \mathcal{D}'$ est le plus petit ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}$ tel que

$$< T, \varphi >= 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D} \text{ avec support}(\varphi) \subset \mathbb{R} \setminus F.$$

Exemples de distributions :

(a) La “masse de Dirac” en x_0 définie par

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

(b) La distribution “peigne de Dirac” définie par

$$⧢ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k.$$

Noter que le support de la masse de Dirac δ_{x_0} est l’ensemble $\{x_0\}$ et que le support du peigne de Dirac $⧢$ est l’ensemble $\mathbb{Z}$.

Théorème.

- *Les distributions de type fonction sont des distributions.*
- *Deux distributions de type fonction $[f]$ et $[g]$ sont égales si et seulement si $f = g$ presque partout.*

La démonstration de la dernière affirmation repose sur le résultat suivant, intéressant en soi :

Lemme. *Soit $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D},$$

alors $f = g$ presque partout.

Remarque. Ce lemme montre qu’une fonction localement intégrable f est complétement déterminé par ses “moyennes” $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ pondérées par les fonctions test $\varphi \in \mathcal{D}$.

1.2 Opérations algébriques

Les opérations usuelles entre fonctions (addition, multiplication, convolution) s'étendent aux distributions, mais sous certaines conditions pour les opérations "non linéaires" (multiplication et convolution).

Définition. *Soient $T, S \in \mathcal{D}'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. Alors les opérations suivantes sont bien définies :*

(a) **Addition :** *$T + S$ est la distribution définie par*

$$< T + S, \varphi >=< T, \varphi > + < S, \varphi > \ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

(b) **Multiplication par un scalaire :** *λT est la distribution définie par*

$$< \lambda T, \varphi >= \lambda < T, \varphi > \ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

(c) **Multiplication par une fonction :** *$fT = Tf$ est la distribution définie par*

$$< fT, \varphi >=< T, f\varphi > \ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

(d) **Convolution :** *Si S est à support compact, alors $T * S = S * T$ est la distribution définie par*

$$< T * S, \varphi >=< T, \varphi_{_S} > \ \text{ où } \ \varphi_{_S}(x) =< S, \varphi(x + \cdot) > .$$

Remarques. Noter que

- On ne peut pas multiplier deux distributions quelconques.
- $\varphi \in \mathcal{D}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f\varphi \in \mathcal{D}$.
- $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi_{_S} \in \mathcal{D}$.
- $f\delta_{x_0} = f(x_0)\delta_{x_0}$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- Le definition du produit de convolution reste valide lorsque T et S sont des distributions à support compact à gauche (ou à droite).

Théorème. Le produit de convolution entre distributions vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} T * S &= S * T \\ (T * S) * P &= T * (S * P) \\ T * (S + P) &= T * S + T * P \\ \lambda(T * S) &= (\lambda T) * S = T * (\lambda S). \end{aligned}$$

De plus, il possède un élément neutre :

$$T * \delta_0 = \delta_0 * T = T \text{ pour tout } T \in \mathcal{D}'.$$

Démonstration. Les quatre premières propriétés sont évidentes. Pour montrer la dernière, noter que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\delta_0}(x) =< \delta_0, \varphi(x + \cdot) >= \varphi(x + 0) = \varphi(x),$$

c'est-à-dire que $\varphi_{\delta_0} = \varphi$. D'où

$$< T * \delta_0, \varphi >=< T, \varphi_{\delta_0} >=< T, \varphi > .$$

$\square$

Noter que les opérations entre distributions généralisent les opérations correspondantes entre fonctions. En effet, nous avons le théorème suivant :

Théorème. *Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f + g] \\ \lambda[f] &= [\lambda f] \\ \psi[f] &= [\psi f]. \end{aligned}$$

Si de plus $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, où $p, q \in [1, \infty]$ vérifie $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 2$, alors

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Démonstration. Les trois premières relations sont évidentes. A titre d'exemple, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$$< \psi[f], \varphi >=< [f], \psi\varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi\varphi)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi f)\varphi)dx =< \psi[f], \varphi > .$$

La dernière relation vient du calcul suivant : Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\varphi_{[g]}(x) =< [g], \varphi(x + \cdot) >= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(x + y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - x)\varphi(t)dt$$

d'où (en utilisant le théorème de Fubini)

$$
\begin{aligned}
<[f]*[g],\varphi> =< [f],\varphi_{[g]}> &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_{[g]}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\varphi(t)dt\Big)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx\Big)\varphi(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\varphi(t)dt \\
&=< [f*g],\varphi> .
\end{aligned}
$$

□

1.3 Dérivées au sens des distributions

Contrairement aux fonctions, toute distribution est dérivable. Cette propriété remarquable est due au fait que les fonctions test sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact. La définition de la dérivée d'une distribution est inspirée par la formule d'intégration par parties suivante :

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}$. *Alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi' dx.$$

Démonstration. Comme φ est dans $\mathcal{D}$, il existe un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash]a,b[$. Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi dx = -\int_{-a}^{b} f'\varphi dx$$

et la formule d'intégration par parties appliquée aux fonctions $f,\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ montre que

$$\int_{-a}^{b} f'\varphi dx = -\int_{-a}^{b} f\varphi' dx + f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a).$$

Or $\varphi(b) = 0$ et $\varphi(a) = 0$. La formule précédente devient

$$\int_{-a}^{b} f'\varphi dx = -\int_{-a}^{b} f\varphi' dx.$$

Comme $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash]a,b[$, on déduit que $\varphi'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash]a,b[$ également. La formule précédente implique alors que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi' dx.$$

$\square$

Définition.

(a) *La dérivée d'une distribution* $T \in \mathcal{D}'$ *est la distribution* $T' \in \mathcal{D}'$ *définie par*

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' > \qquad \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

(b) *La dérivée d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ *d'une distribution* $T \in \mathcal{D}'$ *est la distribution* $T^{(n)} \in \mathcal{D}'$ *définie par*

$$< T^{(n)}, \varphi >= (-1)^n < T, \varphi^{(n)} > \qquad \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Noter que les applications T' et $T^{(n)}$ sont bien de distributions. En effet, T étant une distribution, T est linéaire et, pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, il existe une constante C et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$| < T, \varphi > | \leq C\Big(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty + ... + \|\varphi^{(N)}\|_\infty\Big)$$

pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$ à support dans $[a, b]$. Il s'ensuit que les applications T' et $T^{(n)}$ définies ci-dessus sont aussi linéaires et vérifient

$$| < T', \varphi > | \leq C\Big(\|\varphi'\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty + ... + \|\varphi^{(N+1)}\|_\infty\Big)$$
$$| < T^{(n)}, \varphi > | \leq C\Big(\|\varphi^{(n)}\|_\infty + \|\varphi^{(n)}\|_\infty + ... + \|\varphi^{(n+N)}\|_\infty\Big).$$

Exemples.

(a) Dérivée d'une masse de Dirac :

$$< \delta', \varphi >= - < \delta, \varphi' >= \varphi'(0) \quad \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

(b) Dérivée d'une distribution de type fonction : Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors

$$< [f]', \varphi >= - < [f], \varphi' >= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \quad \forall \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Noter que la dérivée d'une distribution de type fonction n'est pas nécessairement une distribution de type fonction.

Propriétés. Si $T, S \in \mathcal{D}'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
(T+S)' &= T' + S' \\
(\lambda T)' &= \lambda T' \\
(fT)' &= f'T + fT' \\
(T * S)' &= T' * S = T * S'
\end{aligned}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, la dérivée au sens des distributions et la dérivée usuelle coïncident au sens suivant :

Proposition. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors $[f]' = [f']$.*

Démonstration. $[f]' = [f']$ si et seulement si $< [f]', \varphi > = < [f'], \varphi >$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$. Or cette dernière relation n'est rien d'autre que la formule d'intégration par parties

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi' dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi dx$$

démontrée dans la proposition précédente. □

Si f est de classe "$\mathcal{C}^1$ par morceaux", la dérivée au sens des distributions est donnée en fonction de la dérivée usuelle par les **formules de sauts** suivantes :

Proposition.

(a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et dérivable presque partout avec une dérivée $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et si les limites

$$f(x_i^-) := \lim_{t \to x_i, t < x_i} f(t) \text{ et } f(x_i^+) := \lim_{t \to x_i, t > x_i} f(t)$$

existent et sont finies pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors

$$\boxed{[f]' = [f'] + \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i^+) - f(x_i^-)\}\delta_{x_i}}$$

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et dérivable deux fois presque partout avec une dérivée seconde $f'' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et si les limites

$$\begin{aligned}
f(x_i^-) &:= \lim_{t \to x_i, t < x_i} f(t) \text{ et } f(x_i^+) := \lim_{t \to x_i, t > x_i} f(t), \\
f'(x_i^-) &:= \lim_{t \to x_i, t < x_i} f'(t) \text{ et } f'(x_i^+) := \lim_{t \to x_i, t > x_i} f'(t),
\end{aligned}$$

existent et sont finies pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors

$$\boxed{[f]'' = [f''] + \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i^+) - f(x_i^-)\}\delta'_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \{f'(x_i^+) - f'(x_i^-)\}\delta_{x_i}}$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la formule d'intégration par parties appliquée sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$,...,$]x_{n-1}, x_n[$, $]x_n, \infty[$. Pour simplifier, nous démontrons la formule (a) lorsque f est de plus de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun de ces intervalles (autrement il faut utiliser la formule de Fubini et la relation $f(x) = f(x_i^+) + \int_{x_i}^{x} f'(t)dt$ en lieu et place de la formule de l'intégration par parties). En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned}
(T_f)'(\varphi) &= -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\varphi'(x)dx - ... - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_n}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} f'(x)\varphi(x)dx - f(x_1^-)\varphi(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\varphi(x)dx - f(x_2^+)\varphi(x_2) + f(x_1^+)\varphi(x_1) + ... \\
&\quad + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f'(x)\varphi(x)dx - f(x_n^+)\varphi(x_n) + f(x_{n-1}^+)\varphi(x_{n-1}) + \int_{x_n}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx + f(x_n^+)\varphi(x_n) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^+) - f(x_i^-))\varphi(x_i).
\end{aligned}$$

□

Exemple. Soit $H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$ la fonction de Heaviside.
Alors $[H]' = [H'] + \delta_0 = \delta_0$.

1.4 Equations différentielles au sens des distributions

Définition. Soient $a, b, c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(1) Si $F \in \mathcal{D}'$ est une distribution quelconque, alors une **solution faible** de l'équation différentielle

$$a\,Y'' + b\,Y' + c\,Y = F,$$

est une distribution $Y \in \mathcal{D}'$ telle que, pour tout fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
&< a\,Y'' + b\,Y' + c\,Y, \varphi > = < F, \varphi > \\
\Leftrightarrow \qquad &< Y, (a\,\varphi)'' - (b\,\varphi)' + c\,\varphi > = < F, \varphi >
\end{aligned}$$

(2) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors une **solution faible** de l'équation différentielle

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f,$$

est une fonction $y \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$< a\,[y]'' + b\,[y]' + c\,[y], \varphi > =< [f], \varphi >$$
$$\Leftrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} y\Big((a\varphi)'' - (b\,\varphi)' + c\,\varphi\Big)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\,\varphi\,dx$$

Exemples :

Soit $H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ si } x < 0, \end{cases}$ la fonction de Heaviside.

(a) Une solution faible de l'equation différentielle

$$y' = H.$$

est donnée par

$$y(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Noter que y ne vérifie pas cette équation au sens usuel puisque y n'est pas dérivable en 0, donc $y'(0) = H(0)$ n'a pas de sens.

(b) Une solution faible de l'equation différentielle

$$y'' = \delta_0.$$

est donnée par

$$y(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

(c) Une solution faible de l'equation différentielle

$$y'(x) + xy(x) = \delta_0.$$

est donnée par

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous allons maintenant étudier les solution faibles des équations différentielles à coefficients constants. Le résultat suivant est fondamental :

Théorème. *Soit $T \in \mathcal{D}'$ une distribution. Alors*

$$\begin{aligned}
T' = 0 \ &\Leftrightarrow\ T = [a_0], && \textit{où } a_0 \textit{ est une constante}\\
T'' = 0 \ &\Leftrightarrow\ T = [f], && \textit{où } f(x) = a_0 + a_1 x \textit{ est une fonction affine}\\
&\ \vdots\\
T^{(n)} = 0 \ &\Leftrightarrow\ T = [P], && \textit{où } P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}\\
& && \quad \textit{est un polynôme de degré } n-1
\end{aligned}$$

Démonstration. Si $T = [a_0]$, alors $< T', \varphi >= - < T, \varphi' >= - \int_{-\infty}^{\infty} a_0 \varphi'(x)\, dx = 0$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$, d'où $T' = 0$. Montrons maintenant la réciproque. Supposons que $T' = 0$.

(a) Si $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 dx = 0$, alors sa primitive

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t) dt$$

appartient à $\mathcal{D}'$. On en déduit que

$$< T, \varphi_0 >=< T, \Phi' >= - < T', \Phi >= 0.$$

(b) On fixe $\theta \in \mathcal{D}$ tel que $\int_{-\infty}^{\infty} \theta\, dx = 1$ et on pose $a_0 =< T, \theta >$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ une fonction test quelconque. Alors

$$\varphi = \varphi_0 + \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\, dx \Big) \theta, \text{ où } \ \varphi_0 := \varphi - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx \Big) \theta.$$

Comme la fonction φ_0 appartient à $\mathcal{D}$ et vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 dx = 0$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
< T, \varphi > &=< T, \varphi_0 + \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx \Big) \theta > \\
&=< T, \varphi_0 > + \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx \Big) < T, \theta > \\
&= 0 + a_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} a_0 \varphi dx =< [a_0], \varphi > .
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $T = [f]$, où f est une fonction affine. Alors pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$< T'', \varphi >=< T, \varphi'' >= \int_{-\infty}^{\infty} f \varphi''(x)\, dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f' \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'' \varphi(x)\, dx = 0,$$

d'où $T'' = 0$. Montrons maintenant la réciproque. Supposons que $T'' = 0$. Alors $(T')' = 0$. Il existe donc une constante a_1 telle que $T' = [a_1]$. Cela entraine que

$$T' = [(a_1 x)'] = [a_1 x]' \ \Rightarrow\ (T - [a_1 x])' = 0.$$

Il existe donc une constante a_0 telle que

$$T - [a_1 x] = [a_0] \;\Rightarrow\; T = [a_1 x] + [a_0] = [a_1 x + a_0].$$

Pour traiter le cas général on procède par récurrence sur n. $\square$

Le théorème suivant donne une méthode de résolution des équations différentielles à coefficients constants. Le cas général d'une équation différentielle d'ordre n se traite de la même facon.

Théorème. Soient $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ deux constantes.

(1) Equation différentielle **homogène** :

$$Y_H'' + a_0 Y_H' + b_0 Y_H = 0. \tag{EH}$$

Les solutions faibles sont $Y_H = [y_H]$, où y_H est une solution usuelle (c'est-à-dire une solution de classe $\mathcal{C}^2$). Elles peuvent donc être calculées explicitement à l'aide de l'équation caractéristique

$$r^2 + a_0 r + b_0 = 0. \tag{EC}$$

(2) Equation **non homogène** :

$$Y'' + a_0 Y' + b_0 Y = F, \tag{EnH}$$

où $F \in \mathcal{D}'$ est une distribution donnée. Les solutions faibles sont de la forme

$$Y = Y_0 + Y_H,$$

où y_H est solution de l'équation homogène (EH) ci-dessus et Y_0 est une solution particulière de l'equation (EnH). Cette solution particulière peut être déterminée par divers méthodes, en particulier comme ci-dessus :

(2-1) Si F est **à support compact**, on peut prendre

$$Y_0 = [E] * F$$

où

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ y_H(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et y_H est la solution de léquation (EH) vérifiant les conditions initiales
$$y_H(0) = 0 \text{ et } y'_H(0) = 1.$$
Noter que cette définition implique que $[E]$ est solution de l'equation non homogène avec une masse de Dirac au second membre :
$$[E]'' + a_0[E]' + b_0[E] = \delta_0. \qquad \text{(EnHP)}$$

(2-2) Si $F = [f]$ est une **distribution de type fonction**, on peut déterminer Y_0 par la "méthode de variation des constantes", à savoir :
$$Y_0 = [Ae_1 + Be_2],$$
où $\{e_1, e_2\}$ est une famille génératrice de l'espace de solutions de l'equation homogène (EH) et $\{A, B\}$ est une solution du système :
$$\begin{cases} e_1(x)A'(x) + e_2(x)B'(x) = 0, \\ e'_1(x)A'(x) + e'_2(x)B'(x) = f(x). \end{cases}$$
En particulier, si les racines de l'equation caractéristique (EC) sont distinctes, $r_1 \neq r_2$, alors
$$(Ae_1 + Be_2)(x) = \int_0^x \Big(\frac{e^{r_1(x-t)} - e^{r_2(x-t)}}{r_1 - r_2}\Big) f(t)dt.$$
Dans le cas contraire ($r_1 = r_2$), alors
$$(Ae_1 + Be_2)(x) = \int_0^x (x-t)e^{r_1(x-t)} f(t)dt.$$

(2-3) Si $F = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i \delta_{x_i} + \beta_i \delta'_{x_i})$, on peut prendre $Y_0 = [y_0]$ avec
$$y_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1, \\ A_1e_1(x) + B_1e_2(x) & \text{si } x \in]x_1, x_2[, \\ A_2e_1(x) + B_2e_2(x) & \text{si } x \in]x_2, x_3[, \\ & \vdots \\ A_Ne_1(x) + B_Ne_2(x) & \text{si } x > x_N, \end{cases}$$

où $\{e_1, e_2\}$ est une famille génératrice de l'espace de solutions de l'equation homogène (EH) et $(A_i, B_i)_{i\in\{1,...,N\}}$ est une solution du système

$$\begin{cases} y_0(x_i^+) - y_0(x_i^-) = \beta_i & i \in \{1,2,...,N\}, \\ y_0'(x_i^+) - y_0'(x_i^-) = \alpha_i - a_0\beta_i & i \in \{1,2,...,N\}, \end{cases}$$

Démonstration. (1) Soit $y \in \mathcal{D}'$ une solution de cette équation. On écrit l'équation sous la forme d'un système d'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$e^{Ax} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}^2 + \frac{x^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}^3 + ...$$

Alors

$$\left(e^{Ax} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}\right)' = e^{Ax} \left(\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe donc un vecteur constant $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ tel que

$$e^{Ax} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = e^{-Ax} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que y est en fait une solution usuelle de l'équation (1).

(2) Trivial.

(2-1) Que $[E]$ vérifie léquation (EnHP) est une conséquence immédiate de la formule de sauts. Puis, grâce notamment aux propriétés du produit de convolution, on a

$$\begin{aligned} Y'' + a_0Y' + b_0Y &= ([y] + [E] * F)'' + a_0([y] + [E] * F)' + b_0([y] + [E] * F) \\ &= ([y]'' + a_0[y]' + b_0[y]) + ([E] * F)'' + a_0([E] * F)' + b_0[E] * F \\ &= ([y'' + a_0y' + b_0y) + [E]'' * F + a_0[E]' * F + b_0[E] * F \\ &= 0 + ([E]'' + a_0[E]' + b_0[E]) * F \\ &= \delta_0 * F = F. \end{aligned}$$

(2-2) Un calcul direct montre que $Y_0 = [Ae_1 + Be_2]$ vérifie effectivement l'équation (EnH).

(2-3) Comme pour tout i la fonction $A_i e_1(x)+B_i e_2(x)$ est solution de l'équation homogène (EH), la formule de sauts montre que

$$\begin{aligned} Y_0''+a_0Y_0'+b_0Y_0 &= \sum_{i=1}^{N}[y_0(x_i^+)-y_0(x_i^-)]\delta'_{x_i}+\sum_{i=1}^{N}[y_0'(x_i^+)-y_0'(x_i^-)]\delta_{x_i}+a_0\sum_{i=1}^{N}[y_0(x_i^+)-y_0(x_i^-)]\delta_{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N}[y_0(x_i^+)-y_0(x_i^-)]\delta'_{x_i}+\sum_{i=1}^{N}\Big\{[y_0'(x_i^+)-y_0'(x_i^-)]+a_0[y_0(x_i^+)-y_0(x_i^-)]\Big\}\delta_{x_i} \end{aligned}$$

Comme les constantes A_i et B_i vérifient le système donné dans l'énoncé du théorème, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} Y_0''+a_0Y_0'+b_0Y_0 &= \sum_{i=1}^{N}\beta_i\delta'_{x_i}+\sum_{i=1}^{N}\Big\{[\alpha_i-a_0\beta_i]+a_0\beta_i\Big\}\delta_{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N}(\beta_i\delta'_{x_i}+\alpha_i\delta_{x_i}). \end{aligned}$$

□

Définition.

(a) Un **problème aux limites à deux points** est un problème du type

$$\begin{cases} y''+ay'+by=F \text{ dans }]0,L[& \text{(équation différentielle)}, \\ y(0)=\alpha \quad \text{et} \quad y(L)=\beta & \text{(conditions aux limites)}. \end{cases}$$

($a, b, F, L, \alpha, \beta$ sont donnés, y est l'inconnue). Un tel problème a une solution unique. Elle peut être calculée en cherchant d'abord la solution générale (dépendant de deux paramètres) de l'équation

$y''+a_0y'+b_0=F$(sans les conditions aux limites $y(0)=\alpha$ et $y'(0)=\beta$),

puis déterminer les deux paramètres en imposant les conditions aux limites $y(0)=\alpha$ et $y(L)=\beta$.

(b) Un **problème aux conditions initiales** est un problème du type

$$\begin{cases} y''+ay'+b=F \text{ dans }]0,L[, & \text{(équation différentielle)}, \\ y(0)=\alpha \quad \text{et} \quad y'(0)=\beta, & \text{(conditions initiales)}, \end{cases}$$

($a, b, F, L, \alpha, \beta$ sont donnés, y est l'inconnue). Un tel problème a une solution unique. Elle peut être calculée en cherchant d'abord la solution générale (dépendant de deux paramètres) de l'équation

$y''+a_0y'+b_0=F$(sans les conditions initiales $y(0)=\alpha$ et $y'(0)=\beta$), puis déterminer les deux paramètres en imposant les conditions aux limites $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$.

2 Transformation de Fourier

La transformée de Fourier définit le spectre d'une fonction ou distribution et permet de calculer explicitement les solutions d'une classe assez large d'équations différentielles posées sur l'espace tout entier.

Elle ne peut être définie pour une distribution quelconque, mais seulement pour les distributions dites "tempérées". Cela est dû au fait que la transformée de Fourier d'une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$ n'est pas à support compact, donc pas dans $\mathcal{D}$.

Distributions tempérées

Définition. *Soit*

$$\mathcal{S} := \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \textit{ et } \|x^p \varphi^{(n)}\|_\infty < \infty\ \forall p, n \in \mathbb{N}\}.$$

l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ "à décroissance rapide".

Une **distribution tempérée** *est une application $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- *T est linéaire,*
- *Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ et deux nombres entiers $N, P \in \mathbb{N}$ tels que*

$$| < T, \varphi > | \leq C \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{P} \|x^p \varphi^{(n)}(x)\|_\infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Noter que T est linéaire si et seulement si

$$T(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = T(\varphi_1) + \lambda T(\varphi_2) \text{ pour tout } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S} \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

L'ensemble de toutes les distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'$. Noter la différence de notation :

$\mathcal{S}$ = **espace de fonctions test pour les distributions tempérées**,

$\mathcal{S}'$ = **espace de distributions tempérées**.

Toute distribution tempérée est une distribution :

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact appartient à $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$$

Définitions.

(a) Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est **périodique** s'il existe $0<T<\infty$ tel que
$$f(t+T)=f(t) \text{ pour tout } t\in\mathbb{R}.$$
Une telle fonction est aussi appelée T**-périodique**.

(b) Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est **à croissance lente** si elle est mesurable et dominée par un polynôme, c'est-à-dire que
$$\exists C\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N},\ |f(t)|\le C(1+|t|+...+|t|^n)\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Remarques.

- Une fonction mesurable T-périodique est localement intégrable si et seulement si
$$\int_0^T |f(t)|dt<+\infty.$$
Elle est intégrable si et seulement si $f=0$ presque partout.
- Une fonction mesurable à croissance lente est localement intégrable.

Exemples de distributions tempérées :

(a) La masse de Dirac δ_{x_0} et le peigne de Dirac $\sqcup\!\sqcup$.

(b) Toute distribution à support compact.

(c) Toute distribution de type fonction $[f]$, où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ vérifie l'une des conditions suivantes :
   - f est périodique
   - f est à croissance lente
   - $f\in L^p(\mathbb{R})$ avec $1\le p\le\infty$.

Démonstration. Montrons que $[f]$ est une distribution tempérée si f est périodique. Pour tout $\varphi\in\mathcal{S}$, on a
$$\begin{aligned}|<T,\varphi>| &\le \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)\varphi(t)|dt=\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\infty}\int_0^T|f(x)\varphi(x+kT)|dx\\
&\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^T|f(x)|\frac{1+(x+kT)^2}{1+\min_{x\in[0,T]}(x+kT)^2}|\varphi(x+kT)|dx\\
&\le \|(1+t^2)\varphi(t)\|_\infty\int_0^T|f(x)|dx\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+\min\{(kT)^2,((k+1)T)^2)}\\
&\le C(\|\varphi\|_\infty+\|t^2\varphi(t)\|_\infty).\end{aligned}$$

$\square$

2.1 Définition

(a) La **transformée de Fourier d'une fonction** $f \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\boxed{(\mathcal{F}f)(u) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} f(t)dt \quad \forall u \in \mathbb{R}.}$$

Noter que $\mathcal{F}f$ est une fonction continue et que $\lim_{|u|\to\infty}(\mathcal{F}f)(u) = 0$.

(b) La **transformée de Fourier d'une distribution tempérée** $T \in \mathcal{S}'$ est la distribution tempérée $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$ définie par

$$\boxed{< \mathcal{F}T, \varphi >:=< T, \mathcal{F}\varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.}$$

(c) L'application $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}f$ est appelée **transformation de Fourier**.

(d) La courbe représentative de $|\mathcal{F}f|$ est appelée **spectre** de f.

Remarque : La définition ci-dessus est correcte car :

(a) Si f est intégrable, alors $\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i2\pi ut} f(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$, donc $(\mathcal{F}f)(u)$ est bien défini. Que $\mathcal{F}f$ est continue est une conséquence du théorème de convergence dominée. Que $(\mathcal{F}f)(u) \to 0$ lorsque $|u| \to \infty$ se démontre en deux étapes :

(i) Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^1 à support compact, alors une intégration par parties montre que pour $u \neq 0$,

$$(\mathcal{F}g)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} g(t)dt = \frac{1}{i2\pi u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} g'(t)dt.$$

On en déduit que lorsque $|u| \to \infty$, $(\mathcal{F}g)(u) \to 0$.

(ii) Si f est intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g_ε de classe C^1 à support compact telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g_\varepsilon(t)| < \varepsilon/2.$$

On conclut en utilisant l'inégalité

$$\Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} f(t)dt \Big| \leq \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} (f(t) - g_\varepsilon(t))dt \Big| + \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} g_\varepsilon(t)dt \Big|.$$

(b) Si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors φ est intégrable ; donc $\mathcal{F}\varphi$ est bien défini par (a). De plus $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$; donc $< T, \mathcal{F}\varphi >$ est bien défini. Que $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$ est une conséquence de $T \in \mathcal{S}'$; en effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a

$$| < \mathcal{F}T, \varphi > | = | < T, \mathcal{F}\varphi > | \leq C \sum_{p=0}^{p_0} \sum_{n=0}^{n_0} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^p (\mathcal{F}\varphi)^{(n)}(x) \right|.$$

Or

$$\begin{aligned} x^p (\mathcal{F}\varphi)^{(n)}(x) &= x^p \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-i2\pi xt}) dt \\ &= x^p \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)(-i2\pi t)^n e^{-i2\pi xt} dt \\ &= (-i2\pi)^{n-p} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) t^n \frac{d^p}{dt^p}(e^{-i2\pi xt}) dt \\ &= (-i2\pi)^{n-p}(-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^p}{dt^p}(t^n \varphi(t)) e^{-i2\pi xt} dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} | < \mathcal{F}T, \varphi > | &\leq (2\pi)^{n-p} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^p}{dt^p}(t^n \varphi(t)) \right| dt \\ &\leq (2\pi)^{n-p} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| (1+t^2) \frac{d^p}{dt^p}(t^n \varphi(t)) \right| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &\leq C\pi \sum_{p=0}^{p_0} \sum_{n=0}^{n_0} (2\pi)^{n-p} \Big(\sup_{t \in \mathbb{R}} |(1+t^2) t^n \varphi^p(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |(1+t^2) n t^{n-1} \varphi^{p-1}(t)| + ... \Big). \end{aligned}$$

Transformées de Fourier importantes :

(a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une **fonction à croissance lente**, alors $\mathcal{F}f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est la distribution tempérée définie par

$$< \mathcal{F}f, \varphi > = < [f], \mathcal{F}\varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathcal{F}\varphi) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une **fonction T-périodique** localement intégrable, alors $\mathcal{F}f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est la distribution de type "peigne de Dirac"

$$\mathcal{F}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \delta_{\frac{k}{T}},$$

où $c_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de f, c'est-à-dire

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

(c) Si T est une **distribution à support compact**, alors $\mathcal{F}T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la fonction analytique

$$(\mathcal{F}T)(u) =< T, \varphi_u > \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

où $\varphi_u(t) = e^{-i2\pi ut}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Noter que $\varphi_u \notin \mathcal{S}$, mais $< T, \varphi_u >$ est bien défini car T est une distribution à support compact et $\varphi_u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration. (b) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a :

$$\begin{aligned}
< \mathcal{F}f, \varphi > &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)(\mathcal{F}\varphi)(s)ds \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{kT}^{(k+1)T} f(s)(\mathcal{F}\varphi)(s)ds = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^T f(t+kT)(\mathcal{F}\varphi)(t+kT)dt \\
&= \int_0^T f(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(t+kT)dt = \int_0^T f(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(t-kT)dt
\end{aligned}$$

La troisième formule sommatoire de Poisson de la Section 3.2, à savoir

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\frac{n}{T}) e^{-in\frac{2\pi}{T}t},$$

montre alors que

$$\begin{aligned}
< \mathcal{F}f, \varphi > &= \int_0^T f(t) \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\frac{n}{T}) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\frac{n}{T}) \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\frac{n}{T}) c_n(f) =< \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\delta_{\frac{n}{T}}, \varphi >,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{F}f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\delta_{\frac{n}{T}}$. □

2.2 Propriétés et calcul explicite

Propriétés de $\mathcal{F}$: Soient $F = \mathcal{F}f$, $G = \mathcal{F}g$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors

(a) $$\begin{cases}
f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a}) & \text{(changement d'échelle)} \\
f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i2\pi au}F(u) & \text{(translation} \Rightarrow \text{modulation)} \\
e^{i2\pi at}f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u-a) & \text{(modulation} \Rightarrow \text{translation)} \\
\overline{f} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{F(-u)} & \text{(conjugaison)}
\end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} c_1 f + c_2 g \xrightarrow{\mathcal{F}} c_1 F + c_2 G & \text{(linéarité)} \\ f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i2\pi u) F(u) & \text{(dérivation)} \\ f * g \xrightarrow{\mathcal{F}} FG & \text{(convolution} \Rightarrow \text{produit)} \\ fg \xrightarrow{\mathcal{F}} F * G & \text{(produit} \Rightarrow \text{convolution)} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} (\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(u) = f(-u) & \text{(réciprocité)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\overline{G(u)}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt & \text{(conservation du produit scalaire } L^2\text{)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt & \text{(conservation de la norme } L^2\text{)} \end{cases}$$

Démonstration. Les propriétés (a) viennent directement de la définition de la transformation de Fourier.

La linéarité de $\mathcal{F}$ est immédiate. La formule pour $\mathcal{F}(f')$ est obtenue en faisant une intégration par parties dans la définition de $\mathcal{F}(f')$. Pour calculer $\mathcal{F}(f * g)$, on utilise la formule de Fubini comme suit :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f * g))(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{-2i\pi t x} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du) e^{-2i\pi t x} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) (\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) e^{-2i\pi t x} dt) du \text{ (par Fubini)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi u x} (\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) e^{-2i\pi(t-u)x} dt) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi u x} (\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-2i\pi v x} dv) du. \end{aligned}$$

La formule $\mathcal{F}(fg) = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)$ est déduite de $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ par la formule de réciprocité.

La formule de réciprocité et la conservation du produit scalaire L^2 sont essentiellement une conséquence du théorème de Fubini, mais la justification rigoureuse de ce calcul est un peu technique. La conservation de la norme L^2 est une conséquence immédiate de la conservation du produit scalaire L^2. □

Pour calculer explicitement la transformée de Fourier d'une fonction ou distribution tempérée donnée, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

(a) Utiliser la définition de $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} f \in L^1(\mathbb{R}) \quad &\Rightarrow \quad (\mathcal{F}f)(u) = \int_0^\infty e^{-i2\pi ut} f(t)dt \quad \forall u \in \mathbb{R}, \\ T \in \mathcal{S}' \quad &\Rightarrow \quad < \mathcal{F}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}\varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Cette méthode s'applique notamment pour les fonctions du type $f(t) = P(t)e^{at+b}$ par morceaux (P polynôme).

(b) Se ramèner à des transformations connues. La proposition suivante recense les transformées de Fourier des fonctions usuelles :

Proposition. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et χ_A la fonction indicatrice de l'ensemble A (c'est-à-dire que $\chi(t) = 1$ si $t \in A$, $\chi(t) = 0$ si $t \notin A$). Alors*

$$\begin{aligned} b\chi_{]-a,a[} &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2ab\frac{\sin(2\pi au)}{2\pi au} \\ (1-|t|)\chi_{]-1,1[}(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 \\ e^{-|t|} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{1+(2\pi u)^2} \\ t^n e^{-t}\chi_{]0,\infty[}(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{n!}{(1+i2\pi u)^{n+1}} \\ e^{-\pi t^2} &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\pi u^2} \\ \delta_0 &\xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ 1 &\xrightarrow{\mathcal{F}} \delta_0 \end{aligned}$$

Démonstration.

(i) Les premières quatre exemples découlent directement de la définition de $\mathcal{F}$ et des propriétés de l'intégrale. À titre d'exemple, calculons la transformée de Fourier de $b\chi_{]-a,a[}$ en $u \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(b\chi_{]-a,a[})(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ut} b\chi_{]-a,a[}(t)dt \\ &= b\int_{-a}^{a} e^{-i2\pi ut}dt = \frac{b}{-i2\pi u}(e^{-i2\pi ua} - e^{i2\pi ua}) \\ &= \frac{b}{\pi u}\frac{e^{i2\pi ua} - e^{-i2\pi ua}}{2i} = 2ab\frac{\sin(2\pi au)}{2\pi au}. \end{aligned}$$

Si $u = 0$, on a clairement $\mathcal{F}(b\chi_{]-a,a[})(0) = 2ab$.

(ii) Nous allons maintenant déterminer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-\pi t^2}$,

$$(\mathcal{F}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi ut} dt.$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |te^{-\pi t^2}| dt < \infty$, $(\mathcal{F}f)$ est dérivable et on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)'(u) &= -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\pi t^2} e^{-i2\pi ut} dt \\ &= -2i\big([-\frac{1}{2}e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi ut}]_{-\infty}^{+\infty} - i\pi u \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi ut} dt\big) \\ &= -2\pi u (\mathcal{F}f)(u).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}f$ est solution de l'équation différentielle $y'(u) = -2\pi u y(u)$. En résolvant cette équation, on déduit que $(\mathcal{F}f)(u) = Ke^{-\pi u^2}$, où K est une constante. Comme

$$(\mathcal{F}f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1,$$

on obtient

$$(\mathcal{F}f)(u) = e^{-\pi u^2}.$$

(iii) La transformée de la distribution de Dirac est la fonction définie en tout $u \in \mathbb{R}$ par

$$(\mathcal{F}\delta_0)(u) = \delta_{t=0}(e^{-i2\pi ut}) = e^0 = 1.$$

La formulke de réciprocité montre que la transformée de la fonction $f(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est la distribution de Dirac δ_0. □

2.3 Transformation de Fourier inverse

Si $F = \mathcal{F}f$ est la transformée de Fourier d'une fonction ou distribution tempérée, on cherche à reconstruire f à partir de F. Cela est possible puisque F détermine f de manière non ambiguë :

Théorème. *$\mathcal{F}$ est injective :* $\boxed{\mathcal{F}f = \mathcal{F}g \Rightarrow f = g}$

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de réciprocité. □

Définition. *Si $\mathcal{F}f = F$, on note $f = \mathcal{F}^{-1}F$. L'application linéaire $\mathcal{F}^{-1}$ définie de cette manière est appelée* **transformation de Fourier inverse**.

Pour calculer explicitement la transformée de Fourier inverse d'une fonction ou distribution tempérée, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

(1) Soit $F = \mathcal{F}f$ la transformée de Fourier d'une fonction intégrable ou distribution tempérée f. Alors $f = \mathcal{F}^{-1}(F)$, où

(a) Si F est une fonction intégrable :

$$\boxed{(\mathcal{F}^{-1}F)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i2\pi ut}du \quad \forall t \in \mathbb{R},}$$

(b) Si F est une distribution tempérée :

$$\boxed{< \mathcal{F}^{-1}F, \varphi > = < F, \mathcal{F}^{-1}\varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},}$$

où $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ est défini par (a), c'est-à-dire : $(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{i2\pi ut}dt$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Le calcul de $\mathcal{F}^{-1}F$ se ramène donc au calcul d'une intégrale.

(2) Si F est une combinaison linéaire de produits de fonctions usuelles (dont la transformée de Fourier directe ou inverse est connue), alors $\mathcal{F}^{-1}F$ est une combinaison linéaire de produits de convolution des transformées de Fourier inverse connues.

En particulier, si $F = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle (P et Q sont deux polynômes) telle que $\deg P < \deg Q$ et $Q(u) \neq 0$ $\forall u \in \mathbb{R}$ (à noter que $1/u$ n'est pas une fonction localement intégrable), alors :

(a) On calcule les racines complexes de Q : $c_j \in \mathbb{C}$ de multiplicité m_j, $j = 1, 2, ...k$. Donc $Q(u) = (u - c_1)^{k_1} \cdots (u - c_k)^{m_k}$.

(b) On décompose F en une combinaison linéaire des fractions rationnelles simples :

$$F(u) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{A_{j,1}}{(u - c_j)^1} + \frac{A_{j,2}}{(u - c_j)^2} + ... + \frac{A_{j,m_j}}{(u - c_j)^{m_j}} \right),$$

pour certaines constantes $A_{j,1}$, $A_{j,2}$, ..., A_{j,m_j}.

(c) On déduit de $t^n e^{-t}\chi_{]0,\infty[}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{n!}{(1+i2\pi u)^{n+1}}$ et des propriétés de $\mathcal{F}$ (voir la Section 2.2) que, pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\frac{1}{(u-c)^{n+1}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{(2\pi i)^{n+1}}{n!} t^n e^{i2\pi ct} H_c(t)}$$

où

$$H_c(t) = \begin{cases} \chi_{[0,\infty[}(t) & \text{si } \mathrm{Im}(c) > 0, \\ -\chi_{]-\infty,0]}(t) & \text{si } \mathrm{Im}(c) < 0. \end{cases}$$

(d) On déduit de la linéarité de $\mathcal{F}^{-1}$ que

$$(\mathcal{F}^{-1}F)(t) = i2\pi \sum_{j=1}^{k} \left(A_{j,1} + A_{j,2}\frac{(i2\pi t)^1}{1!} + ... + A_{j,m_j}\frac{(i2\pi t)^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \right) e^{i2\pi c_j t} H_{c_j}(t).$$

2.4 Résolution des équations différentielles

La transformation de Fourier permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire posée sur $\mathbb{R}$ en la transformant en une équation plus simple selon le schéma :

$$\begin{array}{rcl} \text{Equation différentielle} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Equation plus simple} \\ & & \downarrow \\ \text{Solution de l'equation différentielle} & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \text{Solution} \end{array}$$

Si l'équation du départ est *à coefficients constants*, la transformée de Fourier de cette équation est une équation algébrique.

La transformation de Fourier est utilisée notamment lorsque l'on veut résoudre une équation posée sur tout $\mathbb{R}$. Si les données de l'équation sont périodiques, on utilise plûtot les *séries de Fourier*. Si l'équation est posée sur une demi-droite, on utilise plûtot la *transformation de Laplace* (voir Section 4.4).

Pour appliquer la transformation de Fourier à une équation différentielle, on a besoin des formules suivantes :

Proposition. *Soit $F = \mathcal{F}f$. Alors*

$$\frac{df}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i2\pi u)F(u)$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i2\pi u)^2F(u) = -4\pi^2u^2F(u),$$

$$\frac{d^3f}{dt^3} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i2\pi u)^3F(u) = -i8\pi^3u^3F(u),$$

etc.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule d'intégration par parties appliquée à l'intégrale définissant la transformée de Fourier. □

La résolution par la transformation de Fourier d'une équation différentielle est illustrée dans l'exemple ci-dessous :

Exercice corrigé. Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$-\frac{d^2 f}{dt^2}(t) + f(t) = e^{-t^2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La transformée de Fourier de l'équation ci-dessus s'écrit

$$4\pi^2 u^2 F(u) + F(u) = \mathcal{F}(e^{-t^2})(u).$$

où l'inconnue est $F = \mathcal{F}f$. On en déduit que $F = \frac{1}{1+4\pi^2u^2}\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|t|})\mathcal{F}(e^{-t^2})$, la dernière égalité étant une conséquence de la formule :

$$e^{-|t|} \ \xrightarrow{\mathcal{F}}\ \frac{2}{1+(2\pi u)^2}.$$

Donc

$$F = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|t|} * e^{-t^2}) \ \Rightarrow f = \frac{1}{2}e^{-|t|} * e^{-t^2},$$

puisque $\mathcal{F}$ est injective. □

Remarque. La transformation de Fourier permet aussi de résoudre des équations différentielles à coefficients variables, lorsque ceux-ci sont de polynômes en t. Il faut alors utiliser les formules

$$\begin{aligned}
tf(t) &\ \xrightarrow{\mathcal{F}}\ \frac{i}{2\pi}\frac{dF}{du}(u),\\
t^2 f(t) &\ \xrightarrow{\mathcal{F}} = (\frac{i}{2\pi})^2\frac{d^2F}{du^2}(u) = -\frac{1}{(2\pi)^2})\frac{d^2F}{du^2}(u),\\
t^3 f(t) &\ \xrightarrow{\mathcal{F}}\ (\frac{i}{2\pi})^3\frac{d^3F}{du^3}(u) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d^3F}{du^3}(u),\\
&\ \textit{etc.}
\end{aligned}$$

Ces formules sont déduites de la définition de $\mathcal{F}$ en utilisant la formule de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation

$$te^{-i2\pi ut} = \frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial u}(e^{-i2\pi ut}).$$

3 Séries de Fourier

Les séries de Fourier constituent un outil fondamental d'étude des phénomènes *périodiques*. Elles permettent en particulier de résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants dont le second membre est périodique, ou peut être prolongé en une fonction périodique.

Définition.

(a) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-**périodique** ($T > 0$ est appelé **période** de f) si

$$f(t+T) = f(t) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b) Une fonction est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que f soit T-**périodique**. Le plus petit $T > 0$ ayant cette propriété est appelé **période principale** de f et $\omega := \dfrac{2\pi}{T}$ est la **fréquence principale** de f.

Remarques.

(a) Les fonctions à valeurs réeles

$$\cos(n\omega t) \quad \text{et} \quad \sin(n\omega t), \ n \in \mathbb{N},$$

et les fonctions à valeurs complexes

$$e^{ik\omega t}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sont T-périodiques (noter que $e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$).

(b) Il est remarquable que toute fonction T-périodique "suffisament régulière" peut s'écrire comme une somme infinie de ces fonctions périodiques particulières :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{ik\omega t}. \end{aligned}$$

Cette section est dédiée à la démonstration de ce fait.

(c) Les séries de Fourier peuvent être vues comme un cas particulier de transformation de Fourier. En effet, si f est une fonction T-périodique, intégrable sur un intervalle de longueur T, alors $[f] \in \mathcal{S}'$ et sa transformée de Fourier est la distribution de type "peigne de Dirac" suivante :

$$\mathcal{F}[f] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\delta_{\frac{k}{T}}$$

où

$$\begin{cases} \delta_{\frac{k}{T}} = \delta(u - \dfrac{k}{T}) \text{ est la distribution de Dirac en } \dfrac{k}{T}, \\ c_k(f) := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Par la transformation de Fourier inverse, on déduit alors que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ on a

$$\begin{aligned} < [f], \varphi > &=< \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f], \varphi >=< \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}\varphi > \\ &=< \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\delta_{\frac{k}{T}}, \mathcal{F}^{-1}\varphi >= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\mathcal{F}^{-1}\varphi(\frac{k}{T}) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\frac{k}{T}t}\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{i\frac{2\pi}{T}kt}\Big\}\varphi(t)dt \\ &=< \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{i\frac{2\pi}{T}kt}\Big], \varphi > \end{aligned}$$

Cette formule étant valable pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on déduit que

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{i\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{i\omega kt} \quad \text{presque partout } t \in \mathbb{R}.$$

C'est précisément la décomposition de f en série de Fourier.

3.1 Définition

(a) La **série de Fourier** d'une fonction T-périodique et intégrable sur $[0, T]$ est définie par

$$\begin{aligned} SF(f)(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ik\omega t} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}\Big\{a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\Big\} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} A_n(f)\sin\{n\omega t + \varphi_n(f)\}, \end{aligned}$$

où

$$c_k(f) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-ik\omega t}dt,$$

$$\begin{cases} a_n(f) := \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt & = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)dt, \\ b_n(f) := \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt & = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)dt, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n(f) := \sqrt{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}, \\ \varphi_n(f) \in [0, 2\pi[\text{ tel que } \begin{cases} \sin\varphi_n(f) = a_n(f)/A_n(f) \\ \cos\varphi_n(f) = b_n(f)/A_n(f). \end{cases} \end{cases}$$

(b) Les **coefficients de Fourier** de f sont :

$$a_n(f),\ b_n(f) \text{ et } c_k(f)$$

La **première harmonique** de f est :

$$A_1(f)\sin\Big(n\omega t + \varphi_1(f)\Big) = \Big\{a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)\Big\}$$

L'**harmonique de rang** n de f est :

$$A_n(f)\sin\Big(n\omega t + \varphi_n(f)\Big) = \Big\{a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\Big\}.$$

$A_n(f)$ est l'**amplitude** et $\varphi_n(f)$ est la **phase** de cette harmonique.

La **valeur moyenne** de f sur une période est :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{a_0(f)}{2}.$$

Proposition.

(a) Les coefficients de Fourier vérifient :

$$\begin{array}{ll} a_n(f) \to 0 \text{ et } b_n(f) \to 0 & \text{lorsque } n \to \infty, \\ c_k(f) \to 0 & \text{lorsque } k \to \infty \text{ ou } k \to -\infty. \end{array}$$

(b) Si f est **impaire**, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n = 0, 1, 2, ...$
Si f est **paire** , alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n = 1, 2, 3, ...$

(c) Les coefficients $\{a_n, b_n\}$ et c_k se déduisent les uns des autres par les formules :

$$\begin{cases} a_0 = 2c_0, \\ a_n = c_n + c_{-n}, \ \forall n = 1, 2, ..., \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \ \forall n = 1, 2, ..., \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = a_0/2, \\ c_k = (a_k - ib_k)/2 \ \forall k = 1, 2, , , , , \\ c_k = (a_{-k} + ib_{-k})/2 \ \forall k = -1, -2, ... \end{cases}$$

qui sont une conséquence de la relation $e^{in\omega t} = \cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)$.

Remarque. En général, la "forme complexe" $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ik\omega t}$ de la série de Fourier est utilisée lorsque f est à valeurs complexes ou pour résoudre des équations différentielles, tandis que la "forme réele"

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} \{a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\}$$

est utilisée lorsque f est à valeurs réeles, ou paire, ou impaire.

3.2 Convergence et somme d'une série de Fourier

L'utilité des séries de Fourier réside dans le fait qu'elles **convergent**, et la **somme** coïncide avec la fonction de départ f, dès que f satisfait certaines conditions raisonnables de régularité. Plus précisément, nous avons :

Théorème.

(a) Si $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$, alors la série de Fourier de f converge et sa somme est égale à f "presque partout". Cela signifie qu'il existe un ensemble E de mesure nulle tel que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big\} \quad \forall t \notin E$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad \forall t \notin E.$$

(b) **[Dirichlet]** Si f est **dérivable à gauche et à droite** au point t, c'est-à-dire que les limites suivantes existent et sont finies

$$f(t_+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t+h), \quad f'(t_+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(t+h) - f(t_+)}{h},$$
$$f(t_-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} f(t+h), \quad f'(t_-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(t+h) - f(t_-)}{h},$$

alors

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \Big\} = \frac{f(t_+) + f(t_-)}{2}$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{f(t_+) + f(t_-)}{2}$$

En particulier, si de plus f est **continue** en t (c'est-à-dire que $f(t_+) = f(t_-) = f(t)$), alors

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \Big\} \\ f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \end{aligned} \tag{1}$$

(c) **[Parseval]** Si $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$, alors

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Remarque. La partie (a) ne permet pas d'affirmer que la série de Fourier converge en un point donné t_0 vers $f(t_0)$ (bien que c'est presque sûrement vrai !). Pour cela on utilise la partie (b).

Démonstration. (a) et (c) La démonstration est trop longue pour la donner ici, mais nous pouvons l'esquisser. L'idée est de regarder f comme un élément de l'espace de Hilbert

$$L^2(]0, T[; \mathbb{C}) \text{ muni du produit scalaire } \langle g, h \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T g(t)\overline{h(t)} dt.$$

Dans ce cadre, la série de Fourier de f n'est rien d'autre que la décomposition de f sur la base hilbertienne (généralisation d'une base orthogonale en dimension infinie),

$$\dots\, e^{-in\omega t},\ \dots\, e^{-i2\omega t},\ e^{-i\omega t}, 1,\ e^{i\omega t},\ e^{i2\omega t}, \dots\, e^{in\omega t} \dots,$$

$c_k = \langle f, e^{ik\omega t}\rangle$, et la formule de Parseval est une généralisation du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e^{ik\omega t}\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \\ &= \left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right|^2 + \left|\frac{a_n + ib_n}{2}\right|^2\right) = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).\end{aligned}$$

(b) Admis. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, deux intégrations par parties montrent que

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt = \frac{1}{T(ik\omega)^2}\int_0^T f''(t)e^{-ik\omega t}dt = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|^2}),$$

et dans ce cas la formule (b) est une conséquence de (a) et du fait que f est continue (cf. Section suivante). □

Exercice corrigé. On considère la fonction "en dents de scie" définie par :

$$\begin{cases} f \text{ est } T\text{-périodique}, \\ f(t) = \dfrac{T}{2} - t \text{ si } 0 < t < T, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Développer f en série de Fourier. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. On pose $\omega = 2\pi/T$. Les coefficients de Fourier de cette fonction sont :

$$\begin{cases} a_n = 0 & \forall n = 0, 1, 2, \dots \text{ (car } f \text{ est impaire)}, \\ b_n = \dfrac{2}{n\omega} & \forall n = 0, 1, 2, \dots \text{ (calcul simple)}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que f satisfait les hypothèses du Théorème de Dirichlet. Donc la série de Fourier converge et tout $t \in \mathbb{R}$ et sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\omega}\sin(n\omega t) = f(t)\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La formule de Parseval implique que

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\frac{T}{2} - t)^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\omega)^2},$$

d'où
$$\frac{T^2}{12} = \frac{2}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{(T\omega)^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\square$

Application (formules sommatoires de Poisson) On considère la fonction T-périodique définie par $f(t) = \frac{T}{2} - t$ si $0 < t < T$ et $f(0) = 0$ (f est une fonction "en dents de scie"). Les coefficients de Fourier de cette fonction sont (on pose $\omega = 2\pi/T$) :

$$\begin{cases} a_n = 0 & \forall n = 0, 1, 2, ... \text{ (car } f \text{ est impaire)}, \\ b_n = \dfrac{2}{n\omega} & \forall n = 0, 1, 2, ... \text{ (calcul simple)}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que cette fonction satisfait les hypothèses du Théorème de Dirichlet. Donc la série de Fourier converge et tout $t \in \mathbb{R}$ et sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\omega}\sin(n\omega t) = f(t)\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(noter que la formule de Parseval implique que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

En dérivant l'identité ci-dessus au sens des distribution, on obtient par la formule de sauts que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\cos(n\omega t) = -1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} T\delta_{kT}$$

où $\delta_{kT} = \delta(t - kT)$ est la distribution de Dirac au point kT définie par $\delta_{kT}(\varphi) = \varphi(kT)\ \forall\varphi \in \mathcal{S}$. Cela entraîne que

$$T\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{kT} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{ij\omega t} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi\frac{j}{T}t} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\delta_{-\frac{j}{T}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\delta_{\frac{n}{T}}).$$

Cela signifie que la transformée de Fourier d'une distribution "peigne de Dirac" est une distribution "peigne de Dirac" :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\delta_{\frac{n}{T}}) = T\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{kT}}$$

En appliquant cette égalité à une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$, on déduit une **première formule sommatoire de Poissson**, à savoir :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(\frac{n}{T}) = T \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(kT)$$

En particulier, pour $T = 1$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{F}\varphi)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)$.

Par convolution avec une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ de la formule de la transformée du “peigne de Dirac” ci-dessus, on déduit une **deuxième formule sommatoire de Poissson**, à savoir :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(\frac{n}{T}) e^{in\omega t}.$$

En remplacant φ par $\mathcal{F}\varphi$ dans cette formule et en utilisant la formule de réciprocité de $\mathcal{F}$, on obtient une **troisième formule sommatoire de Poissson**, à savoir :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\frac{n}{T}) e^{-in\omega t}.$$

3.3 Continuité et dérivabilité de la somme

Les fonctions $\cos(n\omega t)$, $\sin(n\omega t)$ et $e^{ik\omega t}$ apparaissant dans les séries de Fourier sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Mais cela n'implique pas que la somme de la série de Fourier, qui est une somme infinie de ces fonctions multipliées par les coefficients a_n, b_n et c_k, est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les deux théorèmes et corollaire suivants permet de préciser la régularité de la somme d'une série de Fourier.

Théorème. Soit

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}.$$

(a) Si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ converge, alors la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}$ converge et f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |kc_k|$ converge, alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$f'(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik\omega) c_k e^{ik\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(c) Si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^2 c_k|$ converge, alors $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et

$$f''(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik\omega)^2 c_k e^{ik\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(d) etc.

En pratique, on utilise souvent le corollaire suivant de ce théorème :

Corollaire. Soit
$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}.$$

(a) Si $c_k = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|^2})$, alors la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}$ converge et f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Si $c_k = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|^3})$, alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et
$$f'(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik\omega) c_k e^{ik\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(c) Si $c_k = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|^4})$, alors $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et
$$f''(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik\omega)^2 c_k e^{ik\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(d) etc.

Lorsque les théorèmes et corollaire ci-dessus ne s'appliquent pas, on utilise le résultat suivant. Une suite (x_n) est appelée **monotone à partir d'un certain rang** s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(x_n)_{n \geq N}$ soit ou bien croissante, ou bien décroissante. Si $T \in \mathbb{R}$, on pose
$$T\mathbb{Z} := \{kT;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Théorème. Soit
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \Big\{ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \Big\}.$$

(a) Si les suites (a_n) et (b_n) convergent vers zéro et sont monotones à partir d'un certain rang, alors la série ci-dessus converge et f est continue sur $\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}$.

(b) Si les suites (na_n) et (nb_n) convergent vers zéro et sont monotones à partir d'un certain rang, alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z})$ et
$$f'(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{d}{dt} \Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \Big) \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}.$$

(c) Si les suites $(n^2 a_n)$ et $(n^2 b_n)$ convergent vers zéro et sont monotones à partir d'un certain rang, alors $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z})$ et

$$f''(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{d^2}{dt^2}\Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big) \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}.$$

(d) etc.

Démonstration. Les théorèmes de cette section sont des conséquences d'un théorème classique sur la continuité et la dérivabilité de la somme s'une série de fonctions. La preuve du second théorème fait aussi appel au critère de convergence de Abel. □

3.4 Résolution des équations différentielles

Les séries de Fourier permettent de résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants,

$$C_m \frac{d^m y}{dt^m} + C_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + ... + C_1 \frac{dy}{dt} + C_0 y = f \text{ dans } \mathbb{R},$$

lorsque la fonction f est périodique, ou un problème aux limites dans un intervalle borné avec conditions aux limites périodiques du type

$$C_m \frac{d^m y}{dt^m} + C_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + ... + C_1 \frac{dy}{dt} + C_0 y = f \text{ dans }]0, T[,$$
$$y(0) = y(T), \ \frac{dy}{dt}(0) = \frac{dy}{dt}(T), \ ... \ \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}}(0) = \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}}(T).$$

L'idée est de décomposer f en série de Fourier, puis de chercher y sous la forme d'une série de Fourier dont les coefficients sont déterminés par l'équation différentielle. Nous illustrons la méthode dans l'exercice corrigé ci-dessous. La proposition suivante nous sera utile :

Proposition. *Les coefficients de Fourier* $c_k(\frac{dy}{dt})$, $c_k(\frac{d^2y}{dt^2})$, ..., *vérifient*

$$c_k(\frac{dy}{dt}) = (ik\omega) c_k(f),$$
$$c_k(\frac{d^2 y}{dt}) = (ik\omega)^2 c_k(f),$$
$$c_k(\frac{d^3 y}{dt}) = (ik\omega)^3 c_k(f),$$
$$\vdots$$

Démonstration. On suppose que la fonction y est "suffisamment régulière" (de classe $\mathcal{C}^1([0,T])$ pour le calcul de $c_k(\frac{dy}{dt})$, $\mathcal{C}^2([0,T])$ pour le calcul de $c_k(\frac{d^2y}{dt^2})$, ...). Alors

$$\begin{aligned}
c_k(\frac{dy}{dt}) &= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{dy}{dt}(t)e^{-ik\omega t}dt = \frac{2}{T}\Big[y(T)-y(0)\Big] - \frac{2}{T}\int_0^T y(t)(-ik\omega)e^{-ik\omega t}dt \\
&= (ik\omega)\frac{2}{T}\int_0^T y(t)e^{-ik\omega t}dt = (ik\omega)c_k(f), \\
c_k(\frac{d^2y}{dt^2}) &= c_k(\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})) = (ik\omega)c_k(\frac{dy}{dt}) = (ik\omega)(ik\omega)c_k(f) = (ik\omega)^2c_k(f), \\
c_k(\frac{d^3y}{dt^3}) &= c_k(\frac{d}{dt}(\frac{d^2y}{dt^2})) = (ik\omega)c_k(\frac{d^2y}{dt^2}) = (ik\omega)(ik\omega)^2c_k(f) = (ik\omega)^3c_k(f),
\end{aligned}$$

etc.

□

Exercice corrigé. Résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned}
&-y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^t \text{ dans }]0, 2\pi[, \\
&y(0) = y(2\pi) \text{ et } y'(0) = y'(2\pi),
\end{aligned}$$

où $y' := \frac{dy}{dt}$, $y'' := \frac{d^2y}{dt^2}$. Noter que résoudre ce problème revient à trouver une solution 2π-périodique de l'équation différentielle

$$-y'' + 2y' + y = f \text{ dans } \mathbb{R},$$

où f est une fonction 2π-périodique telle que $f(t) = e^t$ pour tout $t \in]0, 2\pi[$.

Démonstration. Elle est en trois étapes.

(1) *Calcul formel de la solution :* Notons d'abord que $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Comme $-y'' + 2y' + y = f$, on a

$$c_k(-y'' + 2y' + y) = c_k(f),$$

d'où, par la Proposition 3.4,

$$-(ik)^2c_k(y) + 2(ik)c_k(y) + c_k(y) = c_k(f) \Leftrightarrow c_k(y) = \frac{1}{k^2 + 2ik + 1}c_k(f).$$

La solution recherchée est donc, au moins formellement,

$$y(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 + 2ik + 1}c_k(f)e^{ikt}. \tag{2}$$

(2) *Calcul de* $c_k(f)$ *:*

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^t e^{-ikt}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-ik)t}dt \\ &= \frac{1}{\pi(1-ik)}\left[e^{(1-ik)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi(1-ik)}\left[e^{(1-ik)2\pi}-1\right] = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(1-ik)}. \end{aligned}$$

(3) *Vérification :* Comme

$$|\frac{1}{k^2+2ik+1}c_k(f)| = \left|\frac{e^{2\pi}-1}{\pi(1-ik)(k^2+2ik+1)}\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{k^3}),$$

la série de Fourier (2) est convergente, sa somme y est dérivable deux fois dans l'intervalle $]0, 2\pi[$, et le calcul formel de l'étape (1) est justifié. $\square$

4 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est un outil mathématique fréquemment utilisé pour étudier des circuits électriques, oscillateurs harmoniques, systèmes mécaniques, appareils optiques, etc., puisqu'elle permet (entre autres) de calculer explicitement les solutions d'une classe assez large d'équations différentielles, couplées eventuellement avec des conditions initiales.

4.1 Définition

(a) Une fonction $f :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ est **à croissance au plus exponentielle** si elle est mesurable et il existe trois constantes (indépendantes de t) $a, C, M \in \mathbb{R}$ telles que

$$|f(t)| \leq Ce^{at} \text{ pour tout } t > M,$$
$$\int_0^M |f(t)| dt < \infty.$$

(b) La **transformée de Laplace** d'une fonction f à croissance au plus exponentielle et nulle sur $]-\infty, 0[$ est définie par

$$\boxed{(\mathcal{L}f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad \forall p > a.}$$

(c) L'application $f \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}f$ est appelée **transformation de Laplace**.

Remarque : (1) On peut remplacer p dans la définition ci-dessus par un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, z > a$ ($\mathrm{Re}\, z$ désigne la partie réelle de z).

(2) Si f ne s'annule pas sur $]-\infty, 0[$, on peut définir sa transformée de Laplace bilaterale $(\mathcal{L}f)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ for all $p \in \mathbb{R}$ telle que l'intégrale est finie.

4.2 Propriétés et calcul explicite

Proposition. *Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ et $f, g :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ des fonctions à croissance au plus exponentielle. On prolonge f et g par zéro sur $]-\infty, 0[$. Alors*

(1) $\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) = c_1(\mathcal{L}f) + c_2(\mathcal{L}g)$ *($\mathcal{L}$ est linéaire)*

(2) $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \times \mathcal{L}(g)$ *(convolution $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ produit)*

(3) $(\mathcal{L}f)(p) \to 0$ *lorsque* $|p| \to \infty$ *(comportement à l'infini)*

(4) $\mathcal{L}f$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]a, \infty[$ *(régularité)*

Démonstration. Pour démontrer (2), on utilise d'abord le théorème de Fubini dans

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f*g)(p) &= \int_0^\infty \Big(\int_{-\infty}^\infty f(t-s)g(s)ds\Big)e^{-pt}dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty g(s)\Big(\int_0^\infty f(t-s)e^{-pt}dt\Big)ds,\end{aligned}$$

puis le changement de variable $t = x + s$ dans la deuxième intégrale

$$\mathcal{L}(f*g)(p) = \int_{-\infty}^\infty g(s)\Big(\int_{-s}^\infty f(x)e^{-p(x+s)}dx\Big)ds,$$

puis le fait que $g(s) = 0 \ \forall s < 0$

$$\mathcal{L}(f*g)(p) = \int_0^\infty g(s)\Big(\int_{-s}^\infty f(x)e^{-p(x+s}dx\Big)ds,$$

puis le fait que $-s < 0$ et $f(x) = 0 \ \forall x < 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f*g)(p) &= \int_0^\infty \Big(g(s)\int_0^\infty f(x)e^{-p(x+s)}dx\Big)ds \\ &= \int_0^\infty g(s)e^{-ps}\Big(\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx\Big)ds \\ &= \Big(\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx\Big)\int_0^\infty g(s)e^{-ps}ds.\end{aligned}$$

□

Pour calculer explicitement la transformée de Laplace d'une fonction donnée, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

(a) Calculer explicitement l'intégrale qui apparaît dans la définition :

$$(\mathcal{L}f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \quad \forall p > a.$$

(b) Se ramèner à l'**exemple fondamental** suivant :

$$\boxed{t^n e^{ct} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(p-c)^{n+1}}.}$$

Ici, $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{C}$ sont deux paramètres, $t > 0$ est la variable de la fonction de départ, et $p > \operatorname{Re} c$ est la variable de la transformée de Laplace. A noter que $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \times 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3$, etc.

Démonstration. Intégrer par parties n fois dans la définition de $(\mathcal{L}f)(p)$. $\square$

Remarque : La formule (b) ci-dessus reste valide pour des exposants non entiers $n > -1$: il suffit de remplacer $n!$ par

$$n! = \Gamma(n+1) := \int_0^\infty s^n e^{-s} ds \quad \text{(appelée fonction "Gamma")}$$

4.3 Transformation de Laplace inverse

Étant donné une fonction complexe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on cherche à déterminer $f :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ telle que $\mathcal{L}f = F$. Cela n'est pas toujours possible (par exemple, si F est une fonction telle que $\lim_{p\to\infty} F(p) \neq 0$, alors il n'existe pas de fonction f telle que $\mathcal{L}(f) = F$; cf. Proposition de la Section 4.2). Néanmoins, si l'on sait a priori que F est la transformée de Laplace d'une fonction f, alors on peut reconstruire f à partir de F. Notons tout d'abord que si une telle fonction f existe, alors elle est unique :

Théorème. *$\mathcal{L}$ est injective :* $\boxed{\mathcal{L}f = \mathcal{L}g \Rightarrow f = g}$

Démonstration. La démonstration, basée sur la formule de Mellin-Fourier ci-dessous, est difficile. Nous l'admettons. $\square$

Remarque : Plus précisément, ce théorème affirme que si $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$ sur un disque (n'importe lequel) de $\mathbb{C}$, alors $f(t) = g(t)$ en tout point t où f et g sont toutes les deux continues.

Définition. *Si $\mathcal{L}f = F$, on note $f = \mathcal{L}^{-1}F$. L'application $\mathcal{L}^{-1}$ définie de cette manière est appelée* **transformation de Laplace inverse**.

Pour calculer explicitement la transformée de Laplace inverse d'une fonction, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

(1) Si F est la transformée de Laplace d'une fonction f continûment dérivable à croissance exponentielle ($|f(t)| \leq Ce^{at}$ lorsque $t \to \infty$), alors on peut reconstruire f à partir de F par la **formule de Mellin-Fourier** suivante : Pour tout $b > a$, on a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{t(b+iy)} F(b+iy) dy.$$

A noter que la limite ci-dessus ne dépend pas du paramètre b. Le calcul de f se ramène donc au calcul d'une intégrale, puis d'une limite.

(2) Si $F = \dfrac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes tels que $\deg P < \deg Q$ (ce qui implique que $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$), alors :

(a) On calcule les racines complexes de Q : $c_1 \in \mathbb{C}$ de multiplicité m_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ de multiplicité m_2, ..., $c_k \in \mathbb{C}$ de multiplicité m_k. Donc $Q(p) = (p - c_1)^{k_1} \cdots (p - c_k)^{m_k}$.

(b) On décompose F en une combinaison linéaire des fractions rationnelles simples :

$$F(p) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{A_{j,1}}{(p-c_j)^1} + \frac{A_{j,2}}{(p-c_j)^2} + ... + \frac{A_{j,m_j}}{(p-c_j)^{m_j}} \right),$$

pour certaines constantes $A_{j,1}$, $A_{j,2}$, ..., A_{j,m_j}.

(c) On déduit de l'exemple fondamental de la Section 4.2 que, pour tout $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\frac{1}{(p-c)^{n+1}} \quad \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{n!} t^n e^{ct}, \qquad \forall t > 0.}$$

(d) On déduit de la linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$ que

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(A_{j,1} + \frac{A_{j,2}}{1!} t^1 + ... + \frac{A_{j,m_j}}{(m_j - 1)!} t^{m_j - 1} \right) e^{c_j t}, \quad \forall t > 0.$$

4.4 Résolution des équations différentielles

La transformation de Laplace permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire posée sur $[0, \infty[$ en la transformant en une équation plus simple, selon le schéma :

$$\begin{array}{rcl} \text{Equation diff.} & \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow} & \text{Equation plus simple} \\ & & \downarrow \\ \text{solution de l'eq. diff.} & \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftarrow} & \text{solution} \end{array}$$

Par exemple, si l'équation de départ est *à coefficients constants*, la transformée de Laplace de cette équation est une équation algébrique.

La transformation de Laplace est utile notamment lorsque l'on veut résoudre une équation avec *conditions initiales* (voir l'exercice corrigé ci-dessous).

Pour appliquer la transformation de Laplace à une équation différentielle, on a besoin des formules suivantes :

Proposition. *Soit f une fonction à croissance au plus exponentielle et $F = \mathcal{L}(f)$. Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &\xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0),\\
\frac{d^2f}{dt^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0),\\
\frac{d^3f}{dt^3} &\xrightarrow{\mathcal{L}} p^3F(p) - p^2f(0) - p\frac{df}{dt}(0) - \frac{d^2f}{dt^2}(0),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

La résolution par la transformation de Laplace d'une équation différentielle avec conditions initiales est illustrée dans l'exemple ci-dessous :

Exercice corrigé. Trouver une fonction $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned}
&2\frac{d^2f}{dt^2}(t) + 3\frac{df}{dt}(t) + f(t) = e^t,\ t > 0,\\
&f(0) = 7 \text{ et } \frac{df}{dt}(0) = -4.
\end{aligned}$$

Démonstration. La transformée de Laplace de l'équation ci-dessus s'écrit

$$2\left(p^2F(p) - 7p + 4\right) + 3\left(pF(p) - 7\right) + F(p) = \frac{1}{p-1},$$

où l'inconnue est $F = \mathcal{L}f$. On en déduit que $F(p) = \dfrac{14p^2 - p - 12}{(p-1)(p+1)(2p+1)}$, d'où, en utilisant la transformation inverse, $f(t) = \dfrac{1}{6}e^t + \dfrac{3}{2}e^{-t} + \dfrac{16}{3}e^{-t/2}$. □

Remarque. La transformation de Laplace permet aussi de résoudre des équations différentielles à coefficients variables, lorsque ceux-ci sont des polynômes en t. Il faut alors utiliser les formules

$$tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{dF}{dp}(p)$$

$$t^2 f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d^2F}{dp^2}(p)$$

$$etc.$$