Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica

12 Ottobre 2007

# Studio della dinamica locale dei punti fissi superattrattivi in $\mathbb{C}^2$ tramite l'albero delle valutazioni

Candidato

**Matteo Ruggiero**

Relatore

**Prof. Marco Abate**

Università di Pisa

Controrelatore

**Prof. Angelo Vistoli**

Scuola Normale Superiore

Anno Accademico 2006/2007

*ad Emanuele*

# Indice

# Introduzione

Il problema affrontato in questa tesi è lo studio della dinamica locale nei punti superattrattivi di $\mathbb{C}^2$.

Lo scopo principale nello studio della dinamica locale, è trovare una classificazione (formale, analitica, topologica) della dinamica, a meno di coniugio (tramite bigezioni formali, biolomorfismi, omeomorfismi).

Riguardo ai punti superattrattivi, questo problema in dimensione 1 è completamente risolto: il teorema di Böttcher (vedi [Mil, Theorem 9.1]) ci dice che, se scriviamo in serie di Taylor $f(z) = az^r + o(z^r)$, con $a \neq 0$, allora $f$ è coniugata (formalmente, olomorficamente e topologicamente) a $z \mapsto z^r$. Grazie al coniugio si può anche costruire un potenziale $G : U \to [0, \infty)$, definito su un intorno $U$ del punto fisso, in modo tale che $G(f(z)) = rG(z)$.

In dimensione maggiore invece il problema è ancora aperto. Una possibile strategia per studiare la dinamica locale è il cercare di semplificare la dinamica di $f$, a meno di complicare lo spazio ambiente; per farlo, si cercano delle opportune modificazioni (ovvero composizioni di scoppiamenti di punti sull'origine), in modo tale da sollevare $f$ ad una $\hat{f}$ con certe proprietà.

In questa tesi mostreremo un risultato di questo tipo, proposto da Charles Favre e Mattias Jonsson: nel caso di germi superattrattivi si può trovare una modificazione che renda $\hat{f}$ rigido (ovvero tale che l'insieme critico per $\hat{f}$ sia contenuto in un insieme totalmente invariante ad incroci normali). Chiameremo questo processo la rigidificazione di $f$.

Dei germi rigidi si conosce la classificazione formale e olomorfa (vedi [Fav]), grazie alla quale possiamo ridurci a studiare il problema di partenza studiando le forme normali dei germi rigidi, oltre al processo di rigidificazione.

Per studiare le modificazioni, si cerca di dedurre relazioni algebriche a partire dalla loro geometria: associamo ad ogni componente eccezionale di una modificazione una valutazione (divisoriale), concentrandoci poi su queste ultime.

Si considera allora, per motivi di completezza, l'insieme $\mathcal{V}$ di tutte le valutazioni (che per noi saranno nell'anello locale $R$ delle serie formali in due variabili, e a valori in $[0, \infty]$) centrate e normalizzate, mostrando che $\mathcal{V}$ ammette una struttura naturale di $\mathbb{R}$-albero completo.

Successivamente focalizziamo la nostra attenzione su $f_\bullet$ l'azione indotta da $f$ sull'albero delle valutazioni, in modo tale da ricavarne informazioni sulla dinamica di $f$: sfruttando la struttura ad albero, dimostriamo l'esistenza di una valutazione $\nu_\star$ mantenuta fissa da $f_\bullet$ (detta autovalutazione), mentre sfruttando le peculiarità delle valutazioni e della loro interpretazione geometrica, mostriamo come associare ad una autovalutazione un bacino di attrazione per $f_\bullet$. Giocando sulla grandezza di questo bacino di attrazione, possiamo controllare l'insieme critico di $\hat{f}$, così da trovare una modificazione che renda $\hat{f}$ rigido.

Risulterà molto utile per lo studio della dinamica allora il coefficiente di attrazione asintotoco: se $f = (f_1, f_2)$, si considera il coefficiente d'attrazione $c(f) = \min\{m(f_1), m(f_2)\}$, dove $m(f_i)$ è il più piccolo grado che compare nell'espansione in serie di Taylor nell'origine di $f_i$. In dimensione maggiore o uguale a 2, si ha che in generale $c(f \circ g) \neq c(f)c(g)$: si arriva così al coefficiente d'attrazione asintotico $c_\infty(f) = \lim \sqrt[n]{c(f^n)}$.

Quello che allora si ottiene come corollario della rigidificazione, è che il coefficiente d'attrazione asintotico è in realtà un intero quadratico; un altro risultato, di cui facciamo un breve accenno, è la costruzione anche in dimensione 2 di un potenziale in un intorno di un punto fisso superattrattivo: fondamentale in questo caso è l'interpretazione delle funzioni plurisubarmoniche in $\mathbb{C}^2$ come potenziali dell'albero delle valutazioni.

L'esposizione è divisa in sei capitoli: nel primo, dopo un breve elenco dei preliminari necessari, ci si focalizza su valutazioni e scoppiamenti, mostrando quale sarà poi l'interpretazione geometrica di ogni tipo di valutazione.

Il secondo capitolo è interamente dedicato alla classificazione delle valutazioni, permessa dall'introduzione delle successioni di polinomi chiave, che permettono di codificare efficientemente una valutazione, una volta fissate delle coordinate locali.

Il terzo capitolo è invece dedicato alle varie strutture d'albero presenti nel resto della tesi, e allo studio della naturale struttura ad albero che ammette l'insieme delle valutazioni.

Nel quarto capitolo invece si indaga sul significato geometrico delle valutazioni, e del loro collegamento con le modificazioni: questo sarà permesso dall'introduzione delle successioni di punti infinitamente singolari.

Nel quinto capitolo cominciamo invece a studiare l'azione $f_\bullet$ sull'albero delle valutazioni, mostrando che mantiene il tipo di valutazione (fatta eccezione per le valutazioni di curve contratte da $f$), e che è regolare come mappa d'albero.

Infine, nel sesto capitolo, si studiano autovalutazioni e bacini d'attrazione, ricavando il teorema di rigidificazione ed accennando ad alcune applicazioni.

# Simboli

| | |
|---|---|
| $\mathcal{V}_{div}$ | insieme delle valutazioni divisoriali, 89 |
| $\mathcal{V}_{qm}$ | albero delle valutazioni quasimonomiali, 64 |
| $\mathfrak{B}$ | insieme delle modificazioni sull'origine, 20 |
| $\mathfrak{C}_f$ | insieme delle valutazioni di curve contratte da $f$, 96 |
| $\nu(K^*)$ | gruppo dei valori di $\nu$ valutazione, 17 |
| $\nu(R^*)$ | semigruppo dei valori di $\nu$ valutazione, 17 |
| $\nu(\mathfrak{i})$ | valutazione di un ideale $\mathfrak{i}$, 14 |
| $\nu_C$ | valutazione associata alla curva $C$, 23 |
| $\nu_E$ | valutazione divisoriale associata alla componente eccezionale $E$, 22 |
| $\nu_{\mathfrak{m}}$ | valutazione di molteplicità, 21 |
| $\nu_\phi$ | valutazione associata alla curva $\{\phi = 0\}$, 23 |
| $\nu_\star$ | autovalutazione, 109, 111 |
| $\mathrm{Krull}(\nu)$ | valutazione di Krull associata ad una valutazione, 19 |
| $\mathrm{SKP}(\nu)$ | SKP associata alla valutazione $\nu$, 45 |
| $\mathrm{con}(\nu, \mu)$ | ordine di contatto tra due valutazioni $\nu$ e $\mu$, 49 |
| $\mathrm{div}_C$ | ordine di annullamento lungo $C$, 22 |
| $\mathrm{gr}_\nu R$ | anello graduato associato a $\nu$ valutazione, 18 |
| $\mathrm{ratrk}(\nu)$ | rango razionale di una valutazione (di Krull) $\nu$, 17 |
| $\mathrm{rk}(\nu)$ | rango di una valutazione (di Krull) $\nu$, 17 |
| $\mathrm{trdeg}(\nu)$ | grado di trascendenza di una valutazione (di Krull) $\nu$, 18 |
| $\mathrm{trdeg}_k K$ | grado di trascendenza del campo $K$ su $k$, 17 |
| $\mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ | valutazione associata alla SKP $(U_j, \beta_j)$, 30, 40 |
| $\mathrm{val}[\overline{p}]$ | valutazione associata ad una succ. di punti inf. vicini, 81 |
| $\overline{\mathcal{T}}$ | completamento dell'albero non metrico con radice $\mathcal{T}$, 53 |
| $\phi \cdot \psi$ | molteplicità d'intersezione tra le curve $\{\phi = 0\}$ e $\{\psi = 0\}$, 14 |
| $\pi_I$ | retrazione di un albero su un intervallo totalmente ordinato $I$, 55 |
| $\pi_{\mathcal{S}}$ | retrazione sul sottoalbero $\mathcal{S}$, 56 |
| $\tilde{\mathcal{V}}$ | insieme delle valutazioni centrate su $\mathbb{C}[[x, y]]$, 15 |
| $\tilde{\mathcal{V}}_K$ | insieme delle valutazioni di Krull centrate, 17 |
| $\overrightarrow{v}(\overline{p})$ | vettore tangente associato ad una succ. di punti inf. vicini di tipo 3, 83 |
| $b(E)$ | molteplicità generica della componente eccezionale $E$, 87 |

| | |
|---|---|
| $b(\nu)$ | valutazione generica di una valutazione (divisoriale) $\nu$, 68, 69 |
| $c(f)$ | coefficiente di attrazione di $f$, 96 |
| $c(f,\nu)$ | coefficiente di attrazione di $f$ lungo $\nu$, 96 |
| $c_\infty(f)$ | coefficiente di attrazione asintotico di $f$, 96 |
| $d(f_\bullet)_\nu$ | differenziale indotto da $f$ sullo spazio tangente in $\nu$, 104 |
| $f_\bullet$ | azione indotta da $f$ sull'albero delle valutazioni, 96 |
| $k_\nu$ | campo residuo di una valutazione (di Krull) $\nu$, 18 |
| $m(C)$ | molteplicità della curva $C$, 13 |
| $m(E)$ | molteplicità di $E \in \Gamma$, 85 |
| $m(\nu)$ | molteplicità di una valutazione $\nu$, 67 |
| $m(\phi)$ | molteplicità della curva $\{\phi = 0\}$, 13 |
| $m(\overrightarrow{v})$ | molteplicità del vettore tangente $\overrightarrow{v}$, 68, 86 |

# Capitolo 1

# Valutazioni

## 1.1 Preliminari

Ricordiamo brevemente alcune definizioni sugli anelli.

**Definizione 1.1.** Un dominio d'integrità $A$ si dice **anello euclideo** se esiste un'applicazione $\delta : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, chimata **grado**, tale che:

(i) se $b \mid a$ allora $\delta(b) \leq \delta(a)$;

(ii) per ogni coppia di elementi $a, b \in A$, $b \neq 0$, esistono due elementi $r, q \in A$ tali che $a = bq + r$, e $\delta(r) < \delta(b)$ o $r = 0$.

Spesso si estende $\delta$ anche a 0, dando il valore $-\infty$.

**Definizione 1.2.** Un dominio d'integrità $A$ si dice **dominio ad ideali principali** (o **PID**) se ogni ideale è principale, ovvero generato da un solo elemento.

**Definizione 1.3.** Un dominio d'integrità $A$ si dice **a fattorizzazione unica** (o **UFD**) se ogni elemento che non sia un'unità di $A$ si scrive come prodotto di fattori irriducibili, in maniera unica a meno dell'ordine dei fattori e di moltiplicazione per un'unità.

**Osservazione 1.4.** Con le tre definizioni date, un anello euclideo è anche un PID, e a sua volta un PID è anche un UFD. Inoltre negli UFD ogni elemento irriducibile è primo, mentre in tutti gli anelli un elemento primo è irriducibile.

**Definizione 1.5.** Un anello $A$ si dice **graduato** se esiste una famiglia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottogruppi (rispetto alla somma) di $A$, tali che $A = \oplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Più in generale, sia $\Gamma$ un gruppo (o un semigruppo) abeliano; allora possiamo considerare un anello $A$ **graduato su** $\Gamma$ considerando una definizione analoga alla precedente, ma sostituendo $\Gamma$ a $\mathbb{N}$.

**Definizione 1.6.** Un anello $A$ si dice **locale** se ha un unico ideale massimale.

**Definizione 1.7.** Un anello $A$ si dice **noetheriano** se ogni successione crescente di ideali $\mathfrak{i}_1 \subseteq \mathfrak{i}_2 \subseteq \ldots$ è stazionaria (ovvero gli ideali coincidono tutti da un certo punto in poi).

Un risultato ben noto è dato dalla prossima proposizione (vedi [AM, Proposizione 6.2]).

**Proposizione 1.8.** *Un anello $A$ è noetheriano se e solo se ogni ideale di $A$ è finitamente generato.*

Ricordiamo ora alcune definizioni sugli ordini.

**Definizione 1.9.** Siano $(X_1, \leq_1)$ e $(X_2, \leq_2)$ due insiemi totalmente ordinati. Allora possiamo definire un ordine totale $\leq$ sul prodotto cartesiano $X_1 \times X_2$, nel seguente modo:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \quad \text{se e solo se} \quad x_1 <_1 y_1, \text{ oppure } x_1 = y_1 \text{ e } x_2 \leq_2 y_2.$$

L'ordine $\leq$ è detto **ordine lessicografico** su $X_1 \times X_2$.

**Osservazione 1.10.** Oggetto di studio di questa tesi sarà l'anello $\mathbb{C}[[x, y]]$ delle serie formali in due variabili (complesse). In seguito sarà però molto utile passare da dalle serie formali ai polinomi $\mathbb{C}[x, y]$, e all'anello $\mathbb{C}(x)[y]$.

Allora osserviamo subito che tutti questi anelli sono a fattorizzazione unica, ma mentre $\mathbb{C}[[x, y]]$ e $\mathbb{C}[x, y]$ sono degli UFD non PID, $\mathbb{C}(x)[y]$ è invece euclideo (la funzione di grado è $\deg_y$ il grado rispetto alla $y$).

Inoltre tutti questi anelli sono noetheriani, il che ci dice, ad esempio, che ogni ideale è finitamente generato.

Infine, $R = \mathbb{C}[[x, y]]$ è un anello locale, con ideale massimale $\mathfrak{m} = \langle x, y \rangle$ l'ideale generato da $x, y$.

Generalmente, se con $R$ indichiamo un anello, con $K$ indicheremo il campo delle frazioni di $R$, mentre $R^* = R \setminus \{0\}$ e $K^* = K \setminus \{0\}$.

Se $R = \mathbb{C}[[x, y]]$ allora $K = \mathbb{C}((x, y))$ è il campo delle serie di Laurent in due variabili complesse (serie a due variabili dove i coefficienti sono definitivamente nulli quando gli esponenti tendono a $-\infty$). Se $R = \mathbb{C}[x, y]$ o $R = \mathbb{C}(x)[y]$, allora $K = \mathbb{C}(x, y)$ è il campo delle funzioni razionali (in due variabili).

## 1.2 Curve piane

Definiamo ora che cos'è una curva. Differentemente dalle convenzioni solite in geometria algebrica, per noi non sarà il luogo di zeri di un polinomio, ma il "luogo di zeri" di una serie formale, a meno di una certa relazione d'equivalenza.

Fissiamo in questa sezione $R = \mathbb{C}[[x,y]]$, e indichiamo con $\mathfrak{m}$ il suo ideale massimale.

**Definizione 1.11.** Una coppia di elementi $(x,y)$ in $R$ è detta coppia di **coordinate locali**, se $\mathfrak{m} = xR + yR$.

**Definizione 1.12.** Consideriamo la relazione d'equivalenza su $\mathfrak{m}$ data da: $\phi \sim \psi$ se esiste $u$ unità di $R$ (ovvero $u \in R \setminus \mathfrak{m}$) tale che $\phi = u\psi$.

Una **curva** $C = [\phi]$ è una classe di equivalenza di elementi di $\mathfrak{m}$, rispetto alla relazione d'equivalenza appena definita. Scriveremo $C = \{\phi = 0\}$ e diremo che $C$ è **rappresentata** da $\phi$ (anche se $\phi$ non è una serie di potenze convergente).

**Definizione 1.13.** La **molteplicità** di una curva $C = \{\phi = 0\}$ è definita da

$$m(C) = m(\phi) := \max\{n \mid \phi \in \mathfrak{m}^n\}.$$

In altri termini, scelte delle coordinate locali $(x,y)$, si ha che $m(C) \geq n$ se tutti i monomi di grado strettamente minore di $n$ non compaiono in $\phi$.

Una curva si dice **ridotta** se è rappresentata da un elemento di $\mathfrak{m}$ senza fattori irriducibili ripetuti (ricordiamo che $R$ è un anello a fattorizzazione unica); si dice **irriducibile** se è rappresentata da un elemento irriducibile di $\mathfrak{m}$.

**Osservazione 1.14.** Ogni coordinata locale $x$ ha sempre molteplicità $m(x) = 1$.

**Definizione 1.15.** Una curva $C$ è detta **analitica** (o **olomorfa**) se ammette un rappresentante analitico.

Una **parametrizzazione** di una curva analitica è una $h : (\mathbb{C}, 0) \to C$ biolomorfismo (localmente in 0).

Il concetto di parametrizzazione può essere esteso anche a curve formali (non analitiche).

**Osservazione 1.16.** Ogni curva irriducibile $C$ ammette una parametrizzazione come segue.

Scegliamo delle coordinate locali $(x,y)$ tali che $C$ sia traversa alla curva $\{x = 0\}$, ovvero tale che $\phi(0,y)$ sia una serie formale in $y$ con primo coefficiente non nullo di grado $m = m(C)$. Allora esiste una serie formale $y(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ tale che $\phi(t^m, y(t)) = 0$ (come serie formale in $t$).

**Definizione 1.17.** La **molteplicità d'intersezione** di due curve $C = \{\phi = 0\}$ e $D = \{\psi = 0\}$ è definita da $C \cdot D = \phi \cdot \psi := \dim_{\mathbb{C}} R/\langle \phi, \psi \rangle$, dove $\langle \phi, \psi \rangle$ denota l'ideale di $R$ generato da $\phi$ e $\psi$ (quindi questa definizione non dipende dal rappresentante della curva).

**Osservazione 1.18.** In particolare si ha che $\phi \cdot \psi = \infty$ se e solo se $\phi$ e $\psi$ hanno qualche fattore irriducibile in comune.

**Osservazione 1.19.** La molteplicità di intersezione di due curve può anche essere calcolata in termini delle parametrizzazioni.

Supponiamo $C = \{\phi = 0\}$ una curva irriducibile (olomorfa), parametrizzata da $h : (\mathbb{C}, 0) \to C$. Allora per ogni curva $D = \{\psi = 0\}$ so ha che $C \cdot D$ è l'ordine più basso che compare nella serie formale $\psi \circ h(t) \in \mathbb{C}[[t]]$. In particolare quando $D$ è liscia e trasversa a $C$, allora $C \cdot D = m(C)$.

Per una curva formale la situazione è analoga.

## 1.3 Valutazioni

Denotiamo con $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, con $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, con $\mathbb{R}_> = (0, \infty)$ e con $\overline{\mathbb{R}}_> = (0, +\infty]$ (spesso ometteremo il + davanti a $+\infty$). Estendiamo le operazioni di addizione e moltiplicazione e la relazione d'ordine usuali da $\mathbb{R}_+$ a $\overline{\mathbb{R}}_+$: $a + \infty = \infty$ e $a \leq \infty$ per ogni $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $a \cdot \infty = \infty$ per ogni $a \neq 0$, e $0 \cdot \infty = 0$.

**Definizione 1.20.** Sia $R = \mathbb{C}[[x, y]]$. Una **valutazione** su $R$ è una funzione non costante $\nu : R \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tale che:

(V1) $\nu(\phi\psi) = \nu(\phi) + \nu(\psi)$ per ogni $\phi, \psi \in R$;

(V2) $\nu(\phi + \psi) \geq \min\{\nu(\phi), \nu(\psi)\}$ per ogni $\phi, \psi \in R$;

(V3) $\nu(1) = 0$.

**Osservazione 1.21.** Dalla definizione segue immediatamente che $\nu(0) = \infty$ e $\nu(\phi) = 0$ se $\phi$ è un'unità. Infatti $0 = \nu(1) = \nu(\phi \cdot \phi^{-1}) = \nu(\phi) + \nu(\phi^{-1})$ e quindi $\nu(\phi) = \nu(\phi^{-1}) = 0$, essendo $\nu \geq 0$. Inoltre, $\nu(0) = \nu(0 \cdot \psi) = \nu(0) + \nu(\psi)$ per ogni $\psi \in R$, e quindi $\nu(0) = \infty$ (questo perché $\nu$ non è costantemente nulla).

**Definizione 1.22.** Sia $\nu$ una valutazione su $R$, e $\mathfrak{i}$ un ideale di $R$. Allora si definisce $\nu(\mathfrak{i}) := \min\{\nu(\phi) : \phi \in \mathfrak{i}\}$.

**Osservazione 1.23.** Se poniamo $\mathfrak{p} := \{\phi \in R \mid \nu(\phi) = \infty\}$, si ha che $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $R$. Infatti è evidentemente un ideale, e se $\phi\psi \in \mathfrak{p}$, ovvero $\infty = \nu(\phi\psi) = \nu(\phi) + \nu(\psi)$, allora o $\nu(\phi)$ o $\nu(\psi)$ valgono $\infty$, e quindi o $\phi$ o $\psi$ appartengono a $\mathfrak{p}$, che risulta primo ($\mathfrak{p} \not\ni 1$, perché $\nu(1) = 0$).

**Definizione 1.24.** Una valutazione $\nu$ di $R$ si dice **propria** se $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$; si dice **centrata** se è propria e se $\nu(\mathfrak{m}) > 0$ (il che vale se e solo se $\nu(\mathfrak{i}) > 0$ per ogni $\mathfrak{i}$ ideale proprio di $R$). Denoteremo con $\tilde{\mathcal{V}}$ l'insieme di tutte le valutazioni centrate su $R$.

Due valutazioni centrate $\nu_1$ e $\nu_2$ di $R$ si dicono **equivalenti** (e si denota $\nu_1 \sim \nu_2$) se $\nu_1 = C\nu_2$ per una qualche costante $C > 0$.

Il primo oggetto di studio sarà $\tilde{\mathcal{V}}/\sim$, l'insieme delle valutazioni centrate quozientate per la relazione d'equivalenza. Per farlo, introdurremo una condizione di normalizzazione che renderà più semplice lo studio della struttura di $\tilde{\mathcal{V}}/\sim$.

**Definizione 1.25.** Sia $\nu \in \tilde{\mathcal{V}}$ una valutazione centrata su $\mathbb{C}[[x, y]]$. Diremo che $\nu$ è **normalizzata** se $\nu(\mathfrak{m}) = 1$, che è equivalente a chiedere che $\min\{\nu(x), \nu(y)\} = 1$ per ogni coppia $(x, y)$ di coordinate locali. Denoteremo con $\mathcal{V}$ l'insieme delle valutazioni normalizzate di $\mathbb{C}[[x, y]]$.

Dotiamo $\tilde{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{V}$ di una topologia (quella debole) e di un ordine parziale; vedremo che nel caso di $\mathcal{V}$ queste due strutture sono indotte da una struttura ad albero.

**Definizione 1.26.** Siano $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $\nu$ valutazioni centrate (in $\tilde{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{V}$ rispettivamente). Allora diremo che $\nu_k \to \nu$ se $\nu_k(\phi) \to \nu(\phi)$ per ogni $\phi \in R$.

**Definizione 1.27.** Siano $\nu_1, \nu_2$ due valutazioni centrate (in $\tilde{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{V}$ rispettivamente). Allora diremo che $\nu_1 \leq \nu_2$ se $\nu_1(\phi) \leq \nu_2(\phi)$ per ogni $\phi \in R$.

## 1.4 Valutazioni di Krull

Le valutazioni di Krull sono le valutazioni nel senso ordinario del termine; sono l'analogo delle valutazioni da noi definite prima, ma sostituendo a $\overline{\mathbb{R}}_+$ un gruppo abeliano totalmente ordinato.

**Definizione 1.28.** Sia $R$ un anello commutativo con identità, e $\Gamma$ un gruppo abeliano totalmente ordinato. Una **valutazione di Krull** su $R$ è una funzione $\nu : R^* \to \Gamma$ tale che:

(V1) $\nu(\phi\psi) = \nu(\phi) + \nu(\psi)$ per ogni $\phi, \psi \in R$;

(V2) $\nu(\phi + \psi) \geq \min\{\nu(\phi), \nu(\psi)\}$ per ogni $\phi, \psi \in R$;

(V3) $\nu(1) = 0$.

**Osservazione 1.29.** Ogni valutazione di Krull $\nu$ si estende naturalmente a $K^*$, ponendo $\nu(\phi/\psi) := \nu(\phi) - \nu(\psi)$. È di verifica immediata che $\nu$ continua a verificare (V1), (V2) e (V3) anche su tutto $K^*$.

**Definizione 1.30.** Consideriamo $R = \mathbb{C}[[x,y]]$. Una valutazione di Krull $\nu$ di $R$ si dice **centrata** se $\nu \geq 0$ su $R^*$ e $\nu > 0$ su $\mathfrak{m}$.

Due valutazioni di Krull centrate $\nu_1 : R^* \to \Gamma_1$ e $\nu_2 : R^* \to \Gamma_2$ sono **equivalenti** se esiste un omomorfismo strettamente crescente $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tale che $h \circ \nu_1 = \nu_2$.

**Proposizione 1.31.** *Sia $\nu : R \to \Lambda$ una applicazione a valori in un insieme totalmente ordinato e tale che valga (V2) della definizione di valutazione e $\nu(-\phi) = \nu(\phi)$ per ogni $\phi \in R$ (in particolare va bene $\nu$ valutazione o valutazione di Krull). Sia poi $\phi = \phi_1 + \phi_2$ tale che $\nu(\phi_1) < \nu(\phi_2)$. Allora $\nu(\phi) = \nu(\phi_1)$.*

*Dimostrazione.* Direttamente da (V2), otteniamo che $\nu(\phi) \geq \min\{\nu(\phi_1), \nu(\phi_2)\} = \nu(\phi_1)$. D'altra parte, $\phi_1 = \phi - \phi_2$, e quindi sempre da (V2) si ottiene $\nu(\phi_1) \geq \min\{\nu(\phi), \nu(\phi_2)\}$; ma per ipotesi $\nu(\phi_1) < \nu(\phi_2)$, e quindi $\nu(\phi_1) \geq \nu(\phi)$. $\square$

**Definizione 1.32.** Un **anello di valutazione** di $K$ è un anello locale $S$ (di ideale massimale $\mathfrak{m}_S$), con campo delle frazioni $K$ e tale che se $x \in K^*$ allora $x \in S$ o $x^{-1} \in S$.

Due elementi $x, y \in K^*$ sono detti **equivalenti** ($x \sim y$) se $x = uy$ con $u$ un unità di $S$. Denotiamo con $\Gamma_S := K^*/\sim$ il quoziente di $K^*$ per la relazione d'equivalenza appena definita. Allora $\Gamma_S$ è un gruppo abeliano rispetto al prodotto: se $x \sim x'$ e $y \sim y'$, ovvero $x = ux'$ e $y = vy'$ con $u, v$ unità di $S$, allora $xy = uvx'y'$, e quindi $xy \sim x'y'$; il suo elemento neutro è formato dalla classe d'equivalenza delle unità di $S$. Si può inoltre dotare in maniera naturale $\Gamma_S$ di un ordine totale, definendo $[x] > [y]$ se $xy^{-1} \in \mathfrak{m}_S$ (o analogamente $[x] \geq [y]$ se $xy^{-1} \in S$). Si vede come prima che anche questa definizione non dipende dal rappresentante scelto.

**Osservazione 1.33.** Sia $S$ un anello di valutazione di $K$. Allora la proiezione $\nu_S : K^* \to \Gamma_S$ (definita da $\nu_S(x) = [x]$) è una valutazione di Krull. Ricordando infatti che l'operazione $+$ considerata su $\Gamma_S$ è il prodotto, si deriva direttamente che $\nu_S(\phi\psi) = \nu_S(\phi) + \nu_S(\psi)$ e che $\nu_S(1) = 0$; per dimostrare la seconda proprietà, osserviamo che $[\phi+\psi] \geq [\phi]$ per definizione vale se e solo se $(\phi+\psi)\phi^{-1} = 1+\psi\phi^{-1} \in S$, e analogamente $[\phi+\psi] \geq [\psi]$ se e solo se $1 + \psi^{-1}\phi \in S$: essendo $S$ un anello di valutazione, si ha che o $\psi\phi^{-1}$ o il suo inverso $\psi^{-1}\phi$ sono in $S$, e quindi una delle due disuguaglianze vale, e $\nu_S(\phi+\psi) \geq \min\{\nu_S(\phi), \nu_S(\psi)\}$.

Al contrario, Se $\nu$ è una valutazione di Krull centrata, allora $R_\nu := \{0\} \cup \{\phi \in K^* \ : \ \nu(\phi) \geq 0\}$ è un anello di valutazione, con ideale massimale $\mathfrak{m}_\nu := \{0\} \cup \{\phi \in K^* \ : \ \nu(\phi) > 0\}$.

Si può mostrare che $\nu$ è equivalente a $\nu_{R_\nu}$ definita sopra: infatti se $x \sim y$, ovvero $x = uy$ con $u$ un'unità di $R_\nu$ (e $x, y \in K^*$), allora $\nu(x) = \nu(uy) = \nu(u) + \nu(y)$. Ma $u \in R_\nu$ significa $\nu(u) \geq 0$, $u^{-1} \in R_\nu$ implica $\nu(u) \leq 0$, e dunque $\nu(u) = 0$. Dunque se $x \sim y$ allora $\nu(x) = \nu(y)$: possiamo definire $h : \Gamma_{R_\nu} \to \Gamma$, ponendo $h([x]) := \nu(x)$. Abbiamo appena visto che $h$ è ben definito, e si verifica immediatamente che è un omomorfismo strettamente crescente. Inoltre $h \circ \nu_{R_\nu} = \nu$ per come abbiamo definito $h$, e dunque $\nu \sim \nu_{R_\nu}$.

In particolare, due valutazioni $\nu_1$ e $\nu_2$ sono equivalenti se e solo se $R_{\nu_1} = R_{\nu_2}$.

**Definizione 1.34.** Denoteremo con $\tilde{\mathcal{V}}_K$ l'insieme di tutte le valutazioni di Krull centrate (su $R = \mathbb{C}[[x, y]]$), e con $\mathcal{V}_K = \tilde{\mathcal{V}}_K / \sim$ le valutazioni di Krull quozientate per la relazione d'equivalenza descritta sopra.

**Osservazione 1.35.** Consideriamo $R = \mathbb{C}[[x, y]]$. Per la relazione vista prima tra le classi di equivalenza delle valutazioni di Krull e gli anelli di valutazione, si ha che $\mathcal{V}_K$ può essere visto come l'insieme degli anelli di valutazione $S$ su $K$ (fin qui c'è una bigezione ma con le valutazioni non necessariamente centrate), tali che, se $\mathfrak{m}_S$ è l'ideale massimale di $S$, allora $R \cap \mathfrak{m}_S = \mathfrak{m}$ (il che ci da valutazioni centrate).

**Definizione 1.36.** Il gruppo $\nu(K^*)$ è detto **gruppo dei valori** di $\nu$; analogamente $\nu(R^*)$ è detto **semigruppo dei valori** di $\nu$.

Un metodo classico per analizzare le valutazioni di Krull è attraverso i suoi invarianti numerici. Prima di definirli ricordiamo alcune definizioni.

**Definizione 1.37.** Sia $A$ un anello. Allora la **dimensione di Krull** di $A$, denotata con $\dim A$, è l'estremo superiore della lunghezza delle catene di ideali primi distinti:

$$\dim A := \sup\{r \mid \mathfrak{p}_r \supsetneq \mathfrak{p}_{r-1} \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_0 \text{ con } \mathfrak{p}_i \text{ ideali primi di } A\ \forall i\}.$$

**Definizione 1.38.** Sia $K$ una estensione di campi sul campo $k$. Sia $S$ un sottoinsieme di $K$. $S$ (o i suoi elementi) è detto **algebricamente indipendente** su $k$ se, posto:

$$v = \sum_{f:S\to\mathbb{N}} a_f \prod_{x\in S} x^{f(x)},$$

con $a_f \in k$ nulli tranne un numero finito, allora $v = 0$ implica $a_f = 0$ per ogni $f$.

Ordiniamo gli insiemi di $K$ algebricamente indipendenti su $k$ tramite l'inclusione.

Allora il **grado di trascendenza** di $K$ su $k$, denotato con $\operatorname{trdeg}_k K$, è la massima cardinalità di un insieme $S$ algebricamente indipendente su $k$.

Possiamo definire allora gli invarianti numerici di una valutazione di Krull:

**Definizione 1.39.** Sia $\nu : R^* \to \Gamma$ una valutazione di Krull centrata.

- Il **rango** di $\nu$ è definito da $\operatorname{rk}(\nu) := \dim R_\nu$.
- Il **rango razionale** di $\nu$ è definito da $\operatorname{ratrk}(\nu) := \dim_{\mathbb{Q}}(\nu(K^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$.

- Il **grado di trascendenza** di $\nu$ è definito come segue: siccome $\nu$ è centrata, si ha che $R \subset R_\nu$ e $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\nu$, dunque c'è un'inclusione naturale $\mathbb{C} \cong R/\mathfrak{m} \subset R_\nu/\mathfrak{m}_\nu =: k_\nu$. Il campo $k_\nu$ è detto il **campo residuo** di $\nu$. Allora definiamo $\operatorname{trdeg}(\nu) := \operatorname{trdeg}_{\mathbb{C}} k_\nu$.

**Osservazione 1.40.** Si può dimostrare che $\operatorname{rk}(\nu)$ è il più piccolo intero $l$ tale che $\nu(K^*)$ possa essere immerso come gruppo ordinato in $(\mathbb{Z}^l, +, \leq)$, dove $\leq$ è l'ordine lessicografico. Dunque i primi due ranghi dipendono esclusivamente dal gruppo dei valori $\nu(K^*)$ della valutazione.

Questi invarianti numerici non sono indipendenti, anzi vale il seguente:

**Teorema 1.41** (Disuguaglianza di Abhyankar)**.** *Sia $\nu : R^* \to \Gamma$ una valutazione di Krull centrata. Allora*

$$\operatorname{rk}(\nu) + \operatorname{trdeg}(\nu) \leq \operatorname{ratrk}(\nu) + \operatorname{trdeg}(\nu) \leq \dim R = 2. \tag{1.1}$$

*Inoltre se c'è un $=$ nella seconda disuguaglianza, allora $\nu(K^*)$ è isomorfo (come gruppo) a $\mathbb{Z}^\varepsilon$ con $\varepsilon = \operatorname{ratrk}(\nu)$; se l'ugualianza vale dappertutto, allora l'isomorfismo vale come gruppi ordinati, dove su $\mathbb{Z}^\varepsilon$ si considera l'ordine lessicografico.*

Non dimostriamo né useremo in futuro questo risultato. Sarà comunque conseguenza, almeno per le valutazioni di Krull associate ad una valutazione, della classificazione che vedremo nel secondo capitolo.

**Definizione 1.42.** Ad una valutazione di Krull $\nu : R^* \to \Gamma$ associamo un anello graduato su $\Gamma$ (o volendo sul semigruppo dei valori di $\nu$):

$$\operatorname{gr}_\nu R = \bigoplus_{r \in \Gamma} A_r, \qquad \text{con } A_r := \{\nu \geq r\}/\{\nu > r\}.$$

**Osservazione 1.43.** Si verifica che l'unione disgiunta degli $A_r$ della definizione precedente è in bigezione con le classi di equivalenza di $R$ rispetto alla relazione d'equivalenza $\phi \equiv \psi (\operatorname{mod} \nu)$, o $\phi \sim \psi$, se e solo se $\nu(\phi - \psi) > \nu(\phi)$ o $\phi = \psi$. Che $\sim$ sia effettivamente una relazione d'equivalenza segue direttamente dalla Proposizione 1.31, che ci dice che $\nu(\phi - \psi) > \nu(\phi)$ solo se $\nu(\phi) = \nu(\psi)$. Per lo stesso motivo $\nu$ è ben definita su $R/\sim$. Se $\nu(\phi) = r$, allora $\phi \sim \psi$ se e solo se allora differiscono per un elemento di valutazione maggiore, ovvero se rappresentano lo stesso elemento di $A_r$.

Finiamo la sezione con un'osservazione che sarà utile in seguito.

**Osservazione 1.44.** Sia $[\phi] \in R/\sim$, e supponiamo che sia $[\phi] = A \cdot B$ con $A, B \in \operatorname{gr}_\nu R$; allora $A, B \in R/\sim$. Infatti se scriviamo $A$ e $B$ come somma di elementi in $R/\sim$, abbiamo che il prodotto dei pezzi di grado minimo ci dà un solo elemento, che deve essere o nullo, o del grado di $\phi$. Ma essendo $R$ un dominio d'integrità, la prima ipotesi è da scartare, e quindi la somma dei gradi minimi ci dà il grado di $\phi$. Ma con lo stesso ragionamento si ottiene un risultato analogo per i gradi massimi, e da entrambe queste relazioni otteniamo che il grado minimo e massimo che compaiono in $A$ sono uguali, come del resto quelli in $B$.

## 1.5 Valutazioni e valutazioni di Krull

**Osservazione 1.45.** Quello che vogliamo vedere è che possiamo associare ad una valutazione centrata $\nu : R \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una valutazione di Krull, che denoteremo con $\mathrm{Krull}(\nu)$. Chiamiamo $\mathfrak{p} = \{\phi \mid \nu(\phi) = \infty\}$, che abbiamo visto essere un ideale primo. Essendo $\nu$ centrata, quindi in particolare propria, abbiamo che $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$, e quindi è $\mathfrak{p} = (0)$, o $\mathfrak{p} = (\phi)$, con $\phi$ un elemento irriducibile di $R$.

Nel primo caso, $\nu$ è anche una valutazione di Krull, a valori in $\mathbb{R}$ (in particolare $\mathrm{rk}(\nu) = 1$).

Nel secondo caso invece, possiamo definire $\hat{\nu} := \mathrm{Krull}(\nu) : R \to \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, dove su $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ consideriamo l'ordine lessicografico, nel seguente modo: sia $\psi \in R$, e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\psi = \phi^n \hat{\psi}$, con $\hat{\psi}$ primo con $\phi$; allora definiamo $\hat{\nu}(\psi) := (n, \nu(\hat{\psi}))$.

**Osservazione 1.46.** Grazie all'osservazione precedente, possiamo estendere le definizioni di $\mathrm{rk}(\nu)$, $\mathrm{ratrk}(\nu)$, $\mathrm{trdeg}(\nu)$, e $\mathrm{gr}_\nu R$ ad una valutazione $\nu$, considerando i relativi oggetti per la valutazione di Krull associata $\mathrm{Krull}(\nu)$.

**Osservazione 1.47.** Vediamo ora come si trasforma l'identificazione vista nell'Osservazione 1.43 in questo caso. Allora se $\mathfrak{p} = \{\phi \mid \nu(\phi) = \infty\}$, nel caso $\mathfrak{p} = (0)$, la valutazione è anche una valutazione di Krull, e l'identificazione è la stessa. Se invece $\mathfrak{p} = (\phi)$, consideriamo $\psi = \phi^n \hat{\psi}$ e $\xi = \phi^m \hat{\xi}$, con $\hat{\psi}$ e $\hat{\xi}$ primi con $\phi$. Allora si vede facilmente che $\psi \sim \xi$ se e solo se $n = m$ e $\hat{\psi} \sim \hat{\xi}$.

## 1.6 Scoppiamenti

Un concetto fondamentale in geometria algebrica sono gli scoppiamenti, utili ad esempio per risoluzioni di singolarità, e fondamentali per l'interpretazione geometrica di gran parte delle valutazioni. Ne daremo la definizione nel caso che ci serve, di scoppiamento di una varietà complessa di dimensione 2 in un punto.

**Definizione 1.48.** Sia $X$ una varietà complessa di dimensione $n = 2$, e sia $p \in X$ un punto. Consideriamo allora $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}(T_p X) =: E_p$ il proiettivizzato dello spazio tangente in di $X$ in $p$.

Possiamo dotare $\tilde{X} = X \setminus \{p\} \cup E_p$ di una struttura di varietà complessa.

Se ho una carta in $X \setminus \{p\}$, questa è una carta anche in $\tilde{X}$. Se invece ho una carta $\varphi = (z_1, z_2) : V \to \mathbb{C}^2$ in $p$, supponiamola centrata in $p$ (ovvero $\{p\} = \{z_1 = z_2 = 0\}$). Allora per $j = 1, 2$, considero $X_j = \{z_j = 0\} \subset V$, $L_j = \mathbb{P}(\ker(dz_j)_p) \subset E_p$ (in particolare $L_1 = \mathbb{P}(\langle \partial_2 \rangle)$ e $L_2 = \mathbb{P}(\langle \partial_1 \rangle))$, e $V_j = (V \setminus X_j) \cup (E_p \setminus L_j)$. Allora definiamo $\chi_j : V_j \to \mathbb{C}^2$ come

$$\chi_j(q)_h = \begin{cases} z_j(q) & \text{se } h = j, \\ z_h(q)/z_j(q) & \text{se } h \neq j, \end{cases}$$

se $q \in V \setminus X_j$; e

$$\chi_j([v])_h = \begin{cases} 0 & \text{se } h = j, \\ d(z_h)_p(v)/d(z_j)_p(v) & \text{se } h \neq j, \end{cases}$$

se $[v] \in E_p \setminus L_j$.

Riscrivendole più esplicitamente, se in $T_pX$ considero la base $\{\partial_1, \partial_2\}$:

$$\chi_1(z_1, z_2) = (z_1, z_2/z_1) \text{ se } z_1 \neq 0, \qquad \chi_1([\lambda_1 : \lambda_2]) = (0, \lambda_2/\lambda_1) \text{ se } \lambda_1 \neq 0;$$
$$\chi_2(z_1, z_2) = (z_1/z_2, z_2) \text{ se } z_2 \neq 0, \qquad \chi_2([\lambda_1 : \lambda_2]) = (\lambda_1/\lambda_2, 0) \text{ se } \lambda_2 \neq 0.$$

Allora l'insieme delle carte $(V_j, \chi_j)$ e delle carte di $X$ che non contengono $p$ danno una struttura di varietà complessa di dimensione 2 a $\tilde{X}$.

Possiamo inoltre definire una proiezione $\pi : \tilde{X} \to X$, ponendo $\pi = \mathrm{id}$ su $X \setminus \{p\}$, e $\pi \equiv p$ su $E_p$; la struttura complessa di cui si è dotato $\tilde{X}$ fa si che $\pi$ sia una funzione olomorfa (propria), un biolomomorfismo in $X \setminus \{p\}$.

Allora $\tilde{X}$ (con la sua proiezione $\pi : \tilde{X} \to X$) è detto lo **scoppiamento** di $X$ in $p$.

Inoltre se $C$ è una sottovarietà di $X$, allora indichiamo con $\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{p\})}$ la **trasformata propria** di $C$, che a volte chiameremo anche **sollevamento** di $C$.

Infine $E_p = \pi^{-1}\{p\}$ è detto il **divisore eccezionale**.

**Definizione 1.49.** Chiameremo **modificazione** su $p \in X$ un morfismo birazionale $\pi : Y \to (X, p)$, dove $X$ e $Y$ sono due varietà complesse (di dimensione complessa 2), $\pi$ è una funzione olomorfa e propria tra $Y$ e $X$, e un biolomorfismo al di fuori di $\pi^{-1}(p)$, detto **divisore eccezionale**. Chiameremo infine **componente eccezionale** una componente irriducibile del divisore eccezionale.

Se non viene indicato il punto $p$ indicato alla modificazione, intenderemo una modificazione su $0 \in \mathbb{C}^2$. Indichiamo con $\mathfrak{B}$ l'insieme delle modificazioni sull'origine di $\mathbb{C}^2$.

Allora è un risultato classico il seguente (vedi [GH, pag. 510], o [Lau, Theorem 5.7]):

**Teorema 1.50.** *Ogni modificazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ è ottenuta da una composizione finita di scoppiamenti di punti nel divisore eccezionale.*

## 1.7 Centro di una valutazione

Molto utile per studiare le valutazioni e le loro proprietà geometriche, sarà il concetto di centro di una valutazione. Per definire propriamente questo oggetto, rimanderemo ad alcuni teoremi, dove il linguaggio usato è più moderno di quello adottato in questa tesi, in particolare viene utilizzato il linguaggio degli schemi.

**Definizione 1.51.** Sia $X$ una 2-varietà complessa chiusa (ovvero compatta senza bordo), e $V$ una sua sottovarietà irriducibile. Denotiamo con $\mathcal{O}_{X,V}$ l'anello delle funzioni razionali regolari su $V$ (ovvero che non hanno un polo in $V$).

Enunciamo ora un teorema, diretta conseguenza del criterio di valutazione, una volta tradotto dal linguaggio degli schemi ad un linguaggio più classico (confronta [Har, Theorem 4.7, pag. 101]).

**Teorema 1.52.** *Sia $\nu$ una valutazione di Krull su $K = \mathbb{C}((x,y)) \supset \mathbb{C}(x,y)$, con anello di valutazione associato $R_\nu$, e sia $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ una modificazione.*

*Allora esiste un'unica sottovarietà irriducibile $E$ di $X$ (quindi un punto o una curva irriducibile o tutto $X$), tale che $\mathcal{O}_{X,E} \subset R_\nu$. Inoltre se $\nu$ è centrata, allora $E$ è un punto o una componente eccezionale in $\pi^{-1}(0)$.*

**Definizione 1.53.** La $E$ data dal Teorema 1.52 è detta **centro** di $\nu$ in $X$.

**Osservazione 1.54.** Data una valutazione di Krull $\nu$ su $K = \mathbb{C}((x,y))$, e una funzione birazionale $\pi : X \dashrightarrow Y$, possiamo considerare $\nu$ come a valori in $X$, e trasportarla tramite $\pi$ in $Y$, come $\pi_*\nu(\phi) = \nu(\pi^*\phi)$, oppure possiamo fare il contrario ($\pi$ è razionale con inversa razionale), e definire in maniera analoga $\pi^*\nu$. Nel caso di modificazioni, ometteremo l'azione di $\pi^*$ e $\pi_*$. Inoltre, partendo da una valutazione $\nu$ considerata in $\mathbb{C}^2$, diremo che la valutazione $\pi^*\nu$ è in $X$ (con $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ una modificazione).

## 1.8 Esempi

In questa sezione vedremo vari esempi di valutazioni (e valutazioni di Krull) centrate su $\mathbb{C}[[x,y]]$. Verranno dati anche risultati sulla struttura ad albero e sul calcolo degli invarianti, e in alcuni casi anche le interpretazioni geometriche, che verranno dimostrati nei prossimi capitoli.

### La valutazione di molteplicità

Definiamo

$$\nu_{\mathfrak{m}}(\phi) := m(\phi) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \phi \in \mathfrak{m}^k\},$$

che ci da una valutazione ed una valutazione di Krull su $\mathbb{Z}$ (centrate), detta la **valutazione di molteplicità**. $\nu_{\mathfrak{m}}$ costituirà la radice della struttura ad albero che vorremo dare a $\mathcal{V}$. Possiamo calcolare i suoi invarianti numerici: $\nu_{\mathfrak{m}}(K^*) = \mathbb{Z}$, e quindi $\mathrm{rk}(\nu_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{ratrk}(\nu_{\mathfrak{m}}) = 1$, mentre su può vedere che il campo residuo $k_{\nu_{\mathfrak{m}}}$ relativo a $\nu_{\mathfrak{m}}$ è isomorfo a $\mathbb{C}(y/x)$, e quindi $\mathrm{trdeg}(\nu_{\mathfrak{m}}) = 1$.

### Valutazioni monomiali

Fissate delle coordinate locali $(x, y)$, possiamo definire una valutazione assegnando due valori $0 < \beta_0, \beta_1 < \infty$ a $x$ e $y$ rispettivamente, ed estendendo a tutto $R$ definendo:

$$\nu(\phi) := \min\{\beta_0 i + \beta_1 j \mid a_{ij} \neq 0\}, \tag{1.2}$$

dove $\phi = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$. Allora $\nu$ così definita è una valutazione e valutazione di Krull, che chiameremo **valutazione monomiale** rispetto alle coordinate $(x, y)$, di pesi $\beta_0$ e $\beta_1$ rispettivamente. Si osserva facilmente che se $\beta_0 = \beta_1 = \beta$, allora riotteniamo la valutazione di molteplicità (a meno della costante moltiplicativa $\beta$).

Che sia effettivamente una valutazione è semplice da dimostrare direttamente dalla definizione. Infatti (V3) è ovvia, così come (V2): scrivendo $\phi = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ e $\psi = \sum_{i,j} b_{ij} x^i y^j$, si ha che $\phi + \psi = \sum_{i,j}(a_{ij} + b_{ij}) x^i y^j$. Se $\nu(\phi + \psi) = \beta_0 i + \beta_1 j$ per certi $i$ e $j$, allora $a_{ij} + b_{ij} \neq 0$, e quindi o $a_{ij}$ o $b_{ij}$ sono non nulli, e a sua volta, o $\beta_0 i + \beta_1 j \geq \nu(\phi)$, o $\beta_0 i + \beta_1 j \geq \nu(\psi)$. Per verificare (V3), scriviamo $\phi\psi = \xi = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j$. Allora consideriamo $(i, j)$ e $(h, k)$ tali che $\nu(\phi) = \beta_0 i + \beta_1 j$ e $\nu(\psi) = \beta_0 h + \beta_1 k$, e in modo tale che $i$ e $h$ siano i massimi con questa proprietà. Allora se $n = i+h$, $m = j+k$, si ha che $c_{nm} = a_{ij} b_{hk}$, e quindi $\nu(\phi)+\nu(\psi) \leq \nu(\phi\psi)$. Viceversa, se $c_{nm} \neq 0$, allora esistono $(i, j)$ e $(h, k)$ tali che $n = i + h$, $m = j + k$, e $a_{ij}, b_{hk} \neq 0$; questo ci da la disuguaglianza opposta.

Notiamo che $\nu$ è normalizzata se e solo se $\min\{\beta_0, \beta_1\} = 1$.

Calcolando gli invarianti, si ottiene che $\mathrm{rk}(\nu) = 1$ in ogni caso, mentre $\mathrm{ratrk}(\nu) = \mathrm{trdeg}(\nu) = 1$ se $\beta_1 \in \mathbb{Q}\beta_0$, e $\mathrm{ratrk}(\nu) = 2$, $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$ se $\beta_1 \notin \mathbb{Q}\beta_0$.

### Valutazioni divisoriali

Fissiamo $C = \{\psi = 0\}$ una curva irriducibile. Allora definiamo:

$$\mathrm{div}_C(\phi) := \max\{k \in \mathbb{N} \ : \ \psi^k | \phi\}$$

l'**ordine di annullamento** lungo $C$. Con questa definizione $\mathrm{div}_C$ risulta una valutazione (valgono (V2) e (V3) banalmente, mentre (V1) vale perché $\psi$ è irriducibile), ma non è centrata. Consideriamo invece una modificazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$, e una componente eccezionale $E \subset \pi^{-1}(0)$. Allora $\mathrm{div}_E(\pi^*\phi)$ è una valutazione centrata, e quindi esiste un $b = b_E > 0$ tale che

$$\nu_E(\phi) := b^{-1} \,\mathrm{div}_E(\pi^*\phi) \tag{1.3}$$

sia una valutazione centrata e normalizzata su $\mathbb{C}[[x,y]]$, detta **valutazione divisoriale** associata alla componente eccezionale $E$. Questa valutazione è centrata, infatti, scrivendo $E = \{\psi = 0\}$ ($\psi \in K(X)$), $\nu_E(\phi) > 0$ se e solo se $\pi^*\phi \in (\psi)$, il che vale se e solo se $\phi \in \mathfrak{m}$ (perché l'immagine tramite $\pi$ di $E$ è 0).

Calcolando gli invarianti numerici, si ha che $\mathrm{rk}(\nu_E) = \mathrm{ratrk}(\nu_E) = \mathrm{trdeg}(\nu_E) = 1$. Questo si può vedere anche dimostrando che il campo residuo di $\nu_E$ è isomorfo al campo delle funzioni razionali su $E$: alla classe di $\phi \in K$ associamo la funzione razionale $\pi^*\phi|_E$.

Vedremo che tutte le valutazioni con questi invarianti numerici sono divisoriali, e quindi in particolare una valutazione monomiale è divisoriale se e solo se $\beta_1 \in \mathbb{Q}\beta_0$. In particolare la valutazione di molteplicità è la valutazione divisoriale associata ad un singolo scoppiamento dell'origine (in questo caso il divisore eccezionale ha una sola componente irriducibile).

Vedremo anche che le valutazioni divisoriali corrispondono ai punti di ramificazione della struttura ad albero, e i rami (o meglio i vettori dello spazio tangente, come vedremo nel quarto capitolo) sono in bigezione con i punti di $E$.

### Valutazioni quasimonomiali

Consideriamo ancora una modificazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ e una componente eccezionale $E$. Sia poi $p \in E$ un punto, e consideriamo $\mu$ la valutazione monomiale in $p$, ovvero $\mu$ è una valutazione nel campo delle funzioni su $X$, monomiale in delle coordinate locali in $p$, con pesi $\beta_0$ e $\beta_1$. L'immagine di $\nu = \pi_*\mu$ definita da $\nu(\phi) = \mu(\pi^*\phi)$ è allora una valutazione centrata, detta **valutazione quasimonomiale**. I suoi invarianti numerici sono gli stessi di $\mu$, e quindi sono $\mathrm{rk}(\nu) = 1$ in ogni caso, mentre $\mathrm{ratrk}(\nu) = \mathrm{trdeg}(\nu) = 1$ se $\beta_1 \in \mathbb{Q}\beta_0$, e $\mathrm{ratrk}(\nu) = 2$, $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$ se $\beta_1 \notin \mathbb{Q}\beta_0$. Si può mostrare che queste sono tutte e sole le valutazioni con questi invarianti numerici. In particolare si ottiene che una valutazione quasimonomiale è divisoriale se e solo se $\mathrm{ratrk}(\nu) = \mathrm{trdeg}(\nu) = 1$, se e solo se $\beta_1 \in \mathbb{Q}\beta_0$. Una valutazione quasimonomiale che non è divisoriale è detta **irrazionale**.

Vedremo che le valutazioni irrazionali sono i punti regolari dell'albero delle valutazioni, mentre quelle quasimonomiali formano un sottoalbero, e sono tutti e soli i punti dell'albero che non sono delle fini.

### Valutazioni di curve

Fissiamo una curva irriducibile $C = \{\phi = 0\}$. Allora la molteplicità di intersezione con $C$ è una valutazione centrata (ma non una valutazione di Krull). In particolare la sua normalizzazione è della forma:

$$\nu_C(\psi) = \nu_\phi(\psi) := \frac{\phi \cdot \psi}{m(\phi)},$$

dove $m$ indica la molteplicità.

Chiamiamo $\nu_C$ la **valutazione della curva** $C$.

Se $h : (\mathbb{C}, 0) \to C$ è una parametrizzazione per $C$, allora la definizione di $\nu_C$ è equivalente alla seguente:

$$\nu_C(\phi) = m(C)^{-1} \operatorname{div}_t(\phi \circ h(t)). \tag{1.4}$$

Notando che $\nu_C$ assume il valore infinito esattamente in $(\phi)$, possiamo definire come nell'Osservazione 1.45 una valutazione di Krull $\nu = \mathrm{Krull}(\nu_C)$, a valori in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$: se $\psi = \phi^n \hat{\psi}$, con $\hat{\psi}$ primo con $\phi$, allora definiamo $\nu(\psi) = (n, \nu_C(\hat{\psi}))$.

Segue facilmente che $\mathrm{rk}(\nu) = \mathrm{ratrk}(\nu) = 2$, mentre dal Teorema 1.41 (Disuguaglianza di Abhyankar) segue che $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$ (lo vedremo comunque esplicitamente nel prossimo capitolo).

Vedremo anche che le valutazioni di curve sono tutte fini nell'albero delle valutazioni anche se non sono le sole, mentre sono tutte e sole le valutazioni che assumono il valore $\infty$ non solo in 0.

### Valutazioni infinitamente singolari

Sono le altre valutazioni centrate su $R$. Non è facile darne un significato geometrico, ne daremo una definizione nel prossimo capitolo. Sono comunque valutazioni e valutazioni di Krull (a valori in $\mathbb{Q}$), caratterizzate dagli invarianti numerici: $\mathrm{rk}(\nu) = \mathrm{ratrk}(\nu) = 1$ e $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$. Sono anche caratterizzate dall'avere il (semi)gruppo dei valori non finitamente generato su $\mathbb{Z}$.

Condividono con le valutazioni di curve il loro ruolo di fini nell'albero delle valutazioni.

### Valutazioni di curve eccezionali

Per completezza nominiamo anche queste valutazioni di Krull, che non sono valutazioni. Hanno gli stessi invarianti delle valutazioni di curve.

# Capitolo 2

# Successioni di polinomi chiave (SKP)

## 2.1 Polinomi chiave

Fissiamo delle coordinate locali $(x, y)$.

**Definizione 2.1.** Consideriamo una successione di coppie $(U_j, \beta_j)_{j=0}^{k}$, dove gli $U_j$ sono dei polinomi in $\mathbb{C}[x, y]$, $\beta_j \in \overline{\mathbb{R}}_{>}$ (non tutti $\infty$), e $1 \leq k \leq \infty$. La successione è detta **successione di polinomi chiave** (o **SKP**) di **lunghezza** $k$ se soddisfa le seguenti condizioni:

(P1) La successione dei $(\beta_j)$ è tale che $\beta_0$ e $\beta_1$ sono arbitrari (ma non entrambi $\infty$), mentre, definiamo per ogni $j \geq 1$ la successione $n_j \in \mathbb{N}^*$ come segue:

$$n_j := \min\{l \in \mathbb{N}^* \mid l\beta_j \in \mathbb{Z}\beta_0 + \ldots + \mathbb{Z}\beta_{j-1}\}, \tag{2.1}$$

Allora i $\beta_j$ sono tali che $\beta_{j+1} > n_j\beta_j$ per ogni $j \geq 1$.

(P2) Consideriamo degli $m_{j,l}$ che realizzano il minimo in (2.1), ovvero tali che $n_j\beta_j = \sum_{l=0}^{j-1} m_{j,l}\beta_l$, e che per ogni $1 \leq l < j$ valga $m_{j,l} \in \mathbb{N}$ con $0 \leq m_{j,l} < n_l$. Allora la successione dei polinomi $(U_j)$ è tale che $U_0 = x$ e $U_1 = y$, mentre per $1 \leq j < k$ esiste $\theta_j \in \mathbb{C}^*$ tale che:

$$U_{j+1} = U_j^{n_j} - \theta_j \prod_{l=0}^{j-1} U_l^{m_{j,l}}. \tag{2.2}$$

Chiamiamo i $\theta_j$ i **coefficienti di fase** della SKP.

Denoteremo inoltre con $d_j$ il grado (rispetto alla $y$) del polinomio $U_j$, ovvero $d_j := \deg_y U_j$.

Innanzitutto verifichiamo che dati i $\beta_j$ (e gli $n_j$) che soddisfano (P1), esiste una SKP della forma $(U_j, \beta_j)$, ovvero degli $m_{j,l}$ tali che $0 \leq m_{j,l} < n_l$.

**Proposizione 2.2.** *Sia $(\beta_j)$ una successione di valori che soddisfano (P1), $n_j$ definiti come in (2.1); allora esistono e sono unici gli $m_{j,l} \in \mathbb{N}$ tali che $n_j\beta_j = \sum_{l=0}^{j-1} m_{j,l}\beta_l$, e che per ogni $1 \leq l < j$ valga $0 \leq m_{j,l} < n_l$.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo separatamente esistenza e unicità.

(Esistenza). Direttamente dalla definizione degli $n_j$ (2.1), sappiamo che esistono degli $m_{j,l} \in \mathbb{Z}$ tali che $n_j\beta_j = \sum_{l=0}^{j-1} m_{j,l}\beta_l$. Consideriamo $m_{j,j-1}$, dividiamolo per $n_{j-1}$, ottenendo $m_{j,j-1} = q_{j-1}n_{j-1} + r_{j-1}$, con $0 \leq r_{j-1} < n_{j-1}$. Ricordando che $\beta_{j-1}n_{j-1} \in \sum_{l=0}^{j-2} \beta_l\mathbb{Z}$, possiamo supporre $0 \leq m_{j,j-1} = r_{j-1} < n_{j-1}$. Procedendo per induzione, possiamo supporre che $0 \leq m_{j,l} < n_l$ per ogni $1 \leq l < j$. Resta da vedere che $m_{j,0} \geq 0$.

Sia $S_h := \sum_{l=1}^{h-1} m_{j,l}\beta_l$, e notiamo che $S_j = n_j\beta_j - m_{j,0}\beta_0$. Vogliamo vedere, per induzione su $h$, che $S_h < \beta_h$. $S_2 = m_{j,1}\beta_1 < n_1\beta_1 < \beta_2$, e il passo base è dimostrato. Supponiamo allora $S_h < \beta_h$, e ricordiamo che $m_{j,h} < n_h$, o equivalentemente $1 + m_{j,h} \leq n_h$. Allora $S_{h+1} = S_h + m_{j,h}\beta_h < (1 + m_{j,h})\beta_h \leq n_h\beta_h < \beta_{h+1}$. Applicandolo ad $h = j$ si ottiene $m_{j,0}\beta_0 = n_j\beta_j - S_j > (n_j - 1)\beta_j \geq 0$, e quindi la tesi.

(Unicità). Supponiamo per assurdo che esistano $m_l, r_l \in \mathbb{N}$ non tutti uguali ed entrambi che soddisfano la tesi. Allora si ha:

$$0 = n_j\beta_j - n_j\beta_j = \sum_{l=0}^{j-1}(m_l - r_l)\beta_l;$$

consideriamo l'indice massimo $h$ per cui $m_h \neq r_h$. allora si ottiene che $m_h - r_h < n_h$ (a meno di invertire il ruolo di $m$ e $r$ posso anche supporlo positivo), e $(m_h - r_h)\beta_h = -\sum_{l=0}^{h-1}(m_l - r_l)\beta_l \in \sum_{l=0}^{h-1} \mathbb{Z}\beta_l$, assurdo (direttamente dalla definizione di $n_h$).

□

**Osservazione 2.3.** Grazie a quest'ultima proposizione, abbiamo che data una successione $(\beta_j)$ che soddisfa (P1) e una successione di numeri $(\theta_j)$ in $\mathbb{C}^*$, esiste un'unica SKP della forma $(U_j, \beta_j)$ con coefficienti di fase $(\theta_j)$. Inoltre se $(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ è una SKP di lunghezza $k \leq \infty$, e $\beta_0 \neq \infty$, allora $\beta_j \in \mathbb{Q}\beta_0$ per $0 \leq j < k$.

Per familiarizzare un po' con le SKP, vediamone alcuni esempi.

**Esempio 2.4.** Scriviamo i nostri esempi esplicitando tutti i valori definiti finora.

| (a) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\theta_{j-1}$ | $\diagup$ | $\diagup$ | 5 | $1+i$ |
| $U_j$ | $x$ | $y$ | $y^2-5x^3$ | $(y^2-5x^3)-(1+i)x^2y$ |
| $\beta_j$ | 1 | 3/2 | 7/2 | 11/3 |
| $n_j$ | $\diagup$ | 2 | 1 | 3 |
| $m_{j,l}$ | $\diagup$ | 3 | $2,1$ | $11,0,0$ |

La successione (a), troncata a $j=3$, può continuare, essendo $n_3<\infty$, scegliendo un $\beta_4>11$.

| (b) | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\theta_{j-1}$ | $\diagup$ | $\diagup$ | $-1$ |
| $U_j$ | $x$ | $y$ | $y^2+x$ |
| $\beta_j$ | 2 | 1 | $\sqrt{5}$ |
| $n_j$ | $\diagup$ | 2 | $\infty$ |
| $m_{j,l}$ | $\diagup$ | 1 | $\diagup$ |

La successione (b), invece non può essere prolungata, essendo $n_2=\infty$; questo perché abbiamo scelto $\beta_2\notin\mathbb{Q}\beta_0$. Un'altro modo per non poter continuare la successione è far assumere il valore $\infty$, ad esempio come in (c).

| (c) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\theta_{j-1}$ | $\diagup$ | $\diagup$ | 1 | $-1$ |
| $U_j$ | $x$ | $y$ | $y^3-x^5$ | $(y^3-x^5)^2+x^7y^2$ |
| $\beta_j$ | 1 | 5/3 | 31/6 | $\infty$ |
| $n_j$ | $\diagup$ | 3 | 2 | $\infty$ |
| $m_{j,l}$ | $\diagup$ | 5 | $7,2$ | $\diagup$ |

Se $\beta_0=\infty$, allora la successione termina a lunghezza 1:

| (d) | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\theta_{j-1}$ | $\diagup$ | $\diagup$ |
| $U_j$ | $x$ | $y$ |
| $\beta_j$ | $\infty$ | 1 |
| $n_j$ | $\diagup$ | $\infty$ |
| $m_{j,l}$ | $\diagup$ | $\diagup$ |

Vediamo alcune proprietà algebriche delle SKP.

**Lemma 2.5.** *$d_{j+1}=n_jd_j$ per $1\le j<k$.*

*Dimostrazione.* Per costruzione, $d_0=0$, $d_1=1$, $d_2=n_1=n_1d_1$, che costituisce il passo base di un induzione su $j$. Per ipotesi induttiva, si ha $m_{j,l}<n_l=d_{l+1}/d_l$, ed essendo $m_{j,l}$ degli interi, si ha $m_{j,l}\le\frac{d_{l+1}}{d_l}-1$. Allora (ricordando che $d_0=0$ e $d_1=1$):

$$\deg_y\prod_{l=0}^{j-1}U_l^{m_{j,l}}=\sum_{l=1}^{j-1}m_{j,l}d_l\le\sum_{l=1}^{j-1}(d_{l+1}-d_l)=d_j-1<n_jd_j=\deg_y U_j^{n_j}.$$

Quindi non c'è fenomeno di cancellazione, e $d_{j+1} = \deg_y U_{j+1} = \deg_y U_j^{n_j} = n_j d_j$.
$\square$

**Osservazione 2.6.** Da questo lemma e dalla 2.2 si vede immediatamente che $U_j$ è monico nella $y$, per ogni $j$.

## 2.2 Valutazione associata ad una SKP

**Osservazione 2.7.** Ad ogni valutazione $\nu$ su $\mathbb{C}[x,y]$ è associata un'unica valutazione su $\mathbb{C}(x)[y]$, che è un dominio euclideo.

**Lemma 2.8.** *Ogni valutazione $\nu$ su $\mathbb{C}[x,y]$, con $\nu(x), \nu(y) > 0$ non entrambi $\infty$, si estende in maniera unica ad una valutazione centrata su $R = \mathbb{C}[[x,y]]$. Questa estensione preserva l'ordine parziale: se $\nu_1(\phi) \leq \nu_2(\phi)$ vale per $\phi$ polinomio, allora vale anche per le serie formali.*

*Dimostrazione.* Possiamo assumere (a meno di moltiplicare per uno scalare in $(0,\infty)$) che $\nu$ sia normalizzata nel senso di $\nu(\mathfrak{m}) = 1$. Sia $\phi \in R$, e scriviamolo come $\phi = \phi_k + \hat{\phi}_k$, con $\phi_k$ il polinomio ottenuto da $\phi$ troncando al grado $k$, e $\hat{\phi}_k \in \mathfrak{m}^{k+1}$, e quindi $\nu(\hat{\phi}_k) \geq k+1$. Definiamo allora $\nu(\phi) := \lim_k \nu(\phi_k)$. Vediamo innanzitutto che $\nu$ è ben definita, ovvero che esiste il limite in $\overline{\mathbb{R}}_>$. Infatti, per ogni $k$ e $l$, si ha:

$$\nu(\phi_{k+l}) \geq \min\{\nu(\phi_k), \nu(\phi_{k+l} - \phi_k)\} \geq \min\{\nu(\phi_k), k+1\}. \tag{2.3}$$

Allora la successione $\min\{\nu(\phi_k), k+1\}$ è non decrescente, e quindi converge ad un certo $\lambda$. Ma $k+1 \to \infty$, quindi se $\lambda < \infty$, prima o poi il minimo è definitivamente realizzato da $\nu(\phi_k)$, che quindi converge (a $\lambda$); se invece $\lambda = \infty$, segue direttamente da (2.3) che anche $\nu(\phi_k)$ tende a $\lambda = \infty$.

Vediamo ora che la $\nu$ così definita su $R$ è in effetti una valutazione centrata. Consideriamo due elementi $\phi, \psi \in R$, e indichiamo con il pedice $k$ il troncamento al grado $k$. Allora $(\phi\psi)_k = \phi_k\psi_k +$ termini di grado $> k$. Ne segue che

$$\nu((\phi\psi)_k) \geq \min\{\nu(\phi_k) + \nu(\psi_k), k+1\}. \tag{2.4}$$

Se $\nu(\phi), \nu(\psi) < \infty$, allora definitivamente il minimo viene realizzato (solo) da $\nu(\phi_k) + \nu(\psi_k)$, ed essendo $\nu$ una valutazione su $\mathbb{C}[x,y]$, si ottiene che $\nu((\phi\psi)_k) = \nu(\phi_k) + \nu(\psi_k)$, definitivamente, e quindi $\nu(\phi\psi) = \nu(\phi) + \nu(\psi)$. Se invece $\nu(\phi)$ o $\nu(\psi)$ sono uguali a $\infty$, allora entrambi i termini del minimo in (2.4) tendono ad $\infty$, e così fa $\nu((\phi\psi)_k)$. Abbiamo così visto che per $\nu$ vale (V1).

Per mostrare (V2), siano ancora $\phi, \psi \in R$; allora

$$\nu(\phi + \psi) = \lim_k \nu(\phi_k + \psi_k)$$
$$\geq \lim_k \min\{\nu(\phi_k), \nu(\psi_k)\} = \min\{\lim_k \nu(\phi_k), \lim_k \nu(\psi_k)\} = \min\{\nu(\phi), \nu(\psi)\}.$$

Che valga (V3) è ovvio, e così $\nu$ è in effetti una valutazione su $R$. Inoltre essendo $\nu(x)$, $\nu(y)$ non entrambi infiniti, allora $\nu$ è propria, mentre essendo $\nu(x), \nu(y) > 0$, si ottiene che $\nu(\mathfrak{m}) > 0$, e quindi $\nu$ è centrata.

Per l'unicità, basta vedere che se estendo $\nu$ ad una valutazione su $R$, allora vale $\nu(\phi) \geq \min\{\nu(\phi_k), k+1\}$ per ogni $k$. Se $\nu(\phi_k) \to \infty$ allora $\nu(\phi) = \infty$; altrimenti $\nu(\phi) = \nu(\phi_k)$ per $k$ sufficientemente grande, e da ciò segue l'unicità, e anche il mantenimento dell'ordine parziale. □

**Osservazione 2.9.** Segue direttamente dalla dimostrazione del Lemma 2.8 che se una valutazione $\nu$ non assume mai il valore infinito, allora $\nu(\phi) = \nu(\phi_k)$ definitivamente, con $\phi_k$ il troncamento al grado $k$ di $\phi$. Dunque il gruppo dei valori di $\nu$ coincide, sia se si consideri $\mathbb{C}[[x,y]]$, sia $\mathbb{C}[x,y]$. In particolare posso quindi calcolare il rango e il rango razionale di una valutazione a valori in $\mathbb{R}$ prendendo in considerazione $K = \mathbb{C}(x,y)$ il campo delle funzioni razionali. Analogamente, se $\phi \in \mathbb{C}[[x,y]]$, segue che $\phi \sim \phi_k$ definitivamente, con $\sim$ la relazione d'equivalenza rispetto a $\nu$ dell'Osservazione 1.43; in particolare si ottiene quindi che $\mathrm{gr}_\nu \mathbb{C}[[x,y]] \cong \mathrm{gr}_\nu \mathbb{C}[x,y]$, e nello stesso modo che il campo dei quozienti coincide sia se si considera $K = \mathbb{C}((x,y))$, sia se $K = \mathbb{C}(x,y)$, e quindi anche il grado di trascendenza di $\nu$ non varia.

Quello che faremo ora è associare ad una SKP finita una valutazione su $\mathbb{C}[x,y]$, in modo tale che assuma i valori $\beta_j$ su $U_j$, (e che sia la più piccola che lo faccia) per poi estenderla ad una valutazione centrata su $\mathbb{C}[[x,y]]$ tramite il Lemma 2.8. Per definire questa valutazione, e per economia di linguaggio, è utile introdurre alcune notazioni.

**Definizione 2.10.** Sia $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$ un polinomio nella $y$ e $U \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio monico nella $y$, di grado $d$ nella $y$, ovvero $\deg_y(U) = d$. Posso dividere $\phi$ per $U$ e scrivere $\phi = \phi_0 + U\psi$, con $\deg_y(\phi_0) < d$ e $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$. Osserviamo che essendo $U$ monico nella $y$, se $\phi \in \mathbb{C}[x,y]$, allora $\phi_0$ e $\psi$ sono in $\mathbb{C}[x,y]$. Iterando la procedura si ottiene la decomposizione:

$$\phi = \sum_j \phi_j U^j, \tag{2.5}$$

con $\phi_j \in \mathbb{C}(x)[y]$ e $\deg_y(\phi_j) < d$, e $\phi_j \in \mathbb{C}[x,y]$ se $\phi \in \mathbb{C}[x,y]$. Chiameremo questa somma la **decomposizione** di $\phi$ rispetto ad $U$, $\phi_j$ è il **coefficiente** di **grado** $j$, mentre $\psi_j := \sum_{i>j} \phi_i U^{i-j-1}$ è il **resto** di **grado** $j$ della decomposizione. Spesso sottointenderemo il pedice nel resto di grado 0, e scriveremo $\psi = \psi_0$, che chiamiamo semplicemente **resto** della decomposizione.

**Osservazione 2.11.** Nella definizione precedente, semplicemente considerando il grado nella $y$ durante la costruzione della decomposizione, si ha che se $\deg_y(\phi) < Nd$, allora la decomposizione non ha coefficienti di grado maggiore o uguale a $N$: $\phi_i = 0$ per ogni $i \geq N$.

Possiamo passare ora alla definizione della valutazione associata ad una SKP finita.

**Definizione 2.12.** Sia $(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ una SKP di lunghezza $k$ finita. Definiamo allora la **valutazione associata alla SKP**, che denoteremo con $\mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$, ricorsivamente sulla lunghezza $k$. Chiamando $\nu_k := \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$, allora definiamo $\nu_1$ la valutazione in $(x, y)$ di pesi $\beta_0$ e $\beta_1$:

$$\nu_1(\sum a_{i,j} x^i y^j) := \min\{i\beta_0 + j\beta_1 \mid a_{i,j} \neq 0\};$$

a meno di rinormalizzazione è la valutazione monomiale nel caso di $\beta_0, \beta_1 < \infty$, mentre la valutazione associata alla curva $\{x = 0\}$ (risp. $\{y = 0\}$) se $\beta_0 = \infty$ (risp. $\beta_1 = \infty$).

Passando alla ricorsione, supponiamo di aver definito la valutazione $\nu_{k-1}$, e definiamo la valutazione $\nu_k$. Fissato un elemento $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$, scriviamo la decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_k$ (che è monico nella $y$ come abbiamo osservato): $\phi = \sum_j \phi_j U_k^j$. Definiamo allora:

$$\nu_k(\phi) := \min_j \nu_k(\phi_j U_k^j) := \min_j\{\nu_{k-1}(\phi_j) + j\beta_k\}, \tag{2.6}$$

per ogni $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$, estendendo poi questa valutazione ad una valutazione su $\mathbb{C}[[x, y]]$, tramite il Lemma 2.8.

Nella precedente definizione non abbiamo verificato che quello che abbiamo definito è effettivamente una valutazione, ne che ha le proprietà volute: questo è lo scopo del prossimo teorema.

**Teorema 2.13.** *Sia $(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ una SKP di lunghezza $k$ finita. Sia $\nu_h$ definita dalla ricorsione (2.6), $\nu_h = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^h$. Allora $\nu_k$ è una valutazione su $\mathbb{C}(x)[y]$.*

*Denotiamo poi con $[\ ]_j$ le classi di equivalenza rispetto alla relazione vista nell'Osservazione 1.43 rispetto a $\nu_j$. Allora $\nu_k$ è tale che:*

*(Q1) $\nu_k(U_j) = \beta_j$ per $0 \leq j \leq k$;*

*(Q2) $\nu_k \leq \nu$ per ogni altra valutazione $\nu$ che soddisfa (Q1).*

*Inoltre, se $k > 1$ allora*

*(Q3) $\nu_{k-1} \leq \nu_k$;*

*(Q4) $\nu_{k-1}(\phi) < \nu_k(\phi)$ se e solo se $[U_k]_{k-1}$ divide $[\phi]_{k-1}$ in $\mathrm{gr}_{\nu_{k-1}} \mathbb{C}(x)[y]$.*

*Infine:*

*(Q5) $U_j$ è irriducibile, sia in $\mathbb{C}[x, y]$ sia in $\mathbb{C}(x)[y]$, per $0 \leq j \leq k$.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede per induzione sulla lunghezza $k$ della SKP. L'induzione è un po' complicata, e in realtà si basa su tre ipotesi induttive, e tre passi.

Nella dimostrazione, denoteremo con $\sim$ la relazione d'equivalenza dell'Osservazione 1.43 rispetto alla valutazione $\nu_k$ (sarà una valutazione per l'ipotesi induttiva $A_k$), poi denoteremo $R = \mathbb{C}(x)[y]$, con $[\phi]$ una generica classe d'equivalenza in $R/\sim$, e con $R_k$ l'anello graduato associato a $\nu_k$, ovvero $R_k := \operatorname{gr}_{\nu_k} R$. Avremo allora tre ipotesi induttive:

$(A_k)$ $\nu_k$ è una valutazione che soddisfa da (Q1) a (Q4);

$(B_k)$ $[U_k]$ e $[U_{k+1}]$ sono irriducibili in $R_k$;

$(C_k)$ vale (Q5).

É immediato che per $\nu_1$ valgono da (Q1) a (Q4) (ricordando gli esempi fatti nel capitolo precedente) e che vale (Q5), quindi si ha che $(A_1)$ e $(C_1)$ sono verificate (e costituiranno il passo base).

L'induzione è allora divisa in tre passi:

$(A_k + C_k) \Rightarrow (B_k)$;

$(A_k + B_k + C_k) \Rightarrow (C_{k+1})$;

$(A_k + B_k + C_k) \Rightarrow (A_{k+1})$.

**Osservazione 2.14.** Deriva direttamente dalla definizione (ricordiamo anche gli esempi di SKP visti) che una volta che un $\beta_k$ assume il valore $\infty$, la SKP non può continuare, e quindi in questo caso non dobbiamo procedere con l'induzione. Quindi al di fuori del primo passo, possiamo supporre nell'ipotesi induttiva che la valutazione costruita sia una valutazione di Krull a valori in $\mathbb{R}$. Nel primo passo inoltre, quello che dobbiamo dimostrare è solo che $[U_k]$ è irriducibile in $R_k$.

Supponiamo allora che siano verificate $(A_k)$ e $(C_k)$. Per i nostri scopi, sarà utile considerare l'applicazione $\delta_k : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, definita da

$$\delta_k(\phi) := \max\{j \mid \nu_k(\phi_j U_k^j) = \nu_k(\phi)\}, \tag{2.7}$$

dove $\phi_j$ sono i coefficienti della decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_k$. Si vede che per (2.6), esiste un $j$ tale che $\nu_k(\phi_j U_k^j) = \nu_k(\phi)$, e quindi in effetti $\delta_k$ è a valori in $\mathbb{N}$.

**Osservazione 2.15.** Notiamo che nel caso che $\beta_k$ sia infinito, allora abbiamo che se $\phi = U_k^n \hat{\phi}$, con $\hat{\phi}$ primo con $U_k$ (in realtà $\hat{\phi}$ è semplicemente il resto di grado $n-1$ della decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_k$), allora $\delta_k(\phi) = \delta_k(\hat{\phi}) + n$, direttamente dalla definizione. Questo ci dice che $\delta_k$ ha buone proprietà rispetto all'identificazione $R/\sim$ anche nel caso di $\beta_k = \infty$, ricordando l'Osservazione 1.47, e che i prossimi lemmi si applicano anche in questo caso, adattando le dimostrazioni raccogliendo ogni volta il fattore $U_k$.

Mostriamo che:

**Lemma 2.16.** *Se $\phi \sim \psi$, allora $\delta_k(\phi) = \delta_k(\psi)$, e dunque $\delta_k$ è ben definito su $R/\sim$.*

*Dimostrazione.* Scriviamo $\phi = \sum_i \phi_i U_k^i$ e $\psi = \sum_i \psi_i U_k^i$ le decomposizioni di $\phi$ e $\psi$ rispetto a $U_k$, come in (2.5), e supponiamo che $\phi \sim \psi$, ovvero che $\nu_k(\phi - \psi) > \nu_k(\phi) = \nu_k(\psi)$, e che $i > \delta_k(\phi)$, che quindi è tale che $\nu_k(\phi_i U_k^i) > \nu_k(\phi)$; vogliamo vedere che $\nu_k(\psi_i U_k^i) > \nu_k(\psi)$, e quindi che $\delta_k(\psi) \leq \delta_k(\phi)$. Allora:

$$\nu_k(\psi_i U_k^i) = \nu_k\left((\psi_i - \phi_i)U_k^i + \phi_i U_k^i\right) \geq \min\{\nu_k((\psi_i - \phi_i)U_k^i), \nu_k(\phi_i U_k^i)\}.$$

Ma $\psi - \phi = \sum_i (\psi_i - \phi_i) U_k^i$ è allora la decomposizione di $\psi - \phi$ rispetto a $U_k$ (infatti $\deg_y(\psi_i - \phi_i) \leq \max\{\deg_y(\psi_i), \deg_y(\phi_i)\} < d_k$), e quindi $\nu_k((\psi_i - \phi_i)U_k^i) \geq \nu_k(\psi - \phi) > \nu_k(\psi)$, mentre per ipotesi $\nu_k(\phi_i U_k^i) > \nu_k(\phi) = \nu_k(\psi)$, da cui ottengo $\nu_k(\psi_i U_k^i) \geq \min\{\nu_k((\psi_i - \phi_i)U_k^i), \nu_k(\phi_i U_k^i)\} > \nu(\psi)$. Per simmetria (scambiando il ruolo di $\phi$ e $\psi$) si ottiene la disuguaglianza opposta, e $\delta_k(\phi) = \delta_k(\psi)$. □

Mostriamo altre proprietà di $\delta_k$.

**Osservazione 2.17.** Se $\phi \in R$, $\sum \phi_i U_k^i$ è la sua decomposizione rispetto a $U_k$, e $\delta_k(\phi) = 0$, allora $\phi \sim \phi_0$; infatti $\nu_k(\phi - \phi_0) \geq \min_{j \geq 1}\{\nu_k(\phi_j U_k^j)\} > \nu_k(\phi)$ (se esistesse un $j > 0$ tale che $\nu_k(\phi_j U_k^j) = \nu_k(\phi)$, avremmo $\delta_k(\phi) \geq j$: assurdo).

Più in generale si vede analogamente che se $\delta_k(\phi) = n$, allora $\phi \sim \sum_{i=0}^n \phi_i U_k^i$.

**Osservazione 2.18.** Se $\phi = \sum \phi_i U_k^i$ è un elemento di $R$, e $\psi = \sum \psi_i U_k^i$ è un elemento di $R$ decomposto rispetto ad $U_k$, tale che $\phi_i \sim \psi_i$ per ogni $i$, allora $\phi \sim \psi$. Infatti

$$\begin{aligned}\nu_k(\phi - \psi) = \nu_k\left(\sum (\phi_i - \psi_i) U_k^i\right) &\geq \min\{\nu_k(\phi_i - \psi_i) + i\beta_k\} \\ &> \min\{\nu_k(\psi_i) + i\beta_k\} = \nu_k(\psi).\end{aligned}$$

**Lemma 2.19.** *Per ogni $\phi, \psi \in R$, $\delta_k(\phi\psi) = \delta_k(\phi) + \delta_k(\psi)$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima che $\delta_k(\phi) = \delta_k(\phi) = 0$. Allora $\phi \sim \phi_0$ e $\psi \sim \psi_0$, come nell'Osservazione 2.17, dove $\phi_0$ e $\psi_0$ sono i coefficienti di grado 0 della decomposizione rispetto a $U_k$ di $\phi$ e $\psi$ rispettivamente. Ma per costruzione $\deg_y(\phi_0), \deg_y(\psi_0) < d_k$, e quindi $\deg_y(\phi_0\psi_0) < 2d_k$, e quindi la decomposizione di $\phi_0\psi_0$ rispetto a $U_k$ ha solo i primi due coefficienti, ovvero è $\alpha_0 + \alpha_1 U_k$, con $\deg_y(\alpha_0), \deg_y(\alpha_1) < d_k$. Supponiamo per assurdo che $\nu_k(\alpha_1 U_k) = \nu_k(\phi_0\psi_0)$: allora

$$\nu_{k-1}(\alpha_1 U_k) \overset{(Q4)}{<} \nu_k(\alpha_1 U_k) \overset{(2.6)}{\leq} \nu_k(\alpha_0) \overset{(Q4)}{=} \nu_{k-1}(\alpha_0) \tag{2.8}$$

Quindi $\nu_{k-1}(\alpha_1 U_k) = \nu_{k-1}(\phi_0\psi_0)$, e

$$\nu_{k-1}(\alpha_1 U_k) = \nu_{k-1}(\phi_0\psi_0) = \nu_{k-1}(\phi_0) + \nu_{k-1}(\psi_0) \overset{(Q4)}{=} \nu_k(\phi_0) + \nu_k(\psi_0) = \nu_k(\phi_0\psi_0), \tag{2.9}$$

e quindi $\nu_{k-1}(\alpha_1 U_k) = \nu_k(\alpha_1 U_k)$, contraddicendo (Q4). Ne segue che $\phi_0\psi_0 \sim \alpha_0$, e $\delta_k(\phi_0\psi_0) = 0$. Ma per il Lemma 2.16, sappiamo che il valore di $\delta_k$ non dipende dal rappresentante rispetto a $\sim$, e quindi anche $\delta_k(\phi\psi) = 0$, essendo $\phi_0\psi_0 \sim \phi\psi$.

Nel caso generale, scriviamo $\phi = \sum_i \phi_i U_k^i$, $\psi = \sum_j \psi_j U_k^j$ le due decomposizioni rispetto a $U_k$, e quindi $\phi\psi = \sum_n \left(\sum_{i=0}^n \phi_i\psi_{n-i}\right) U_k^n$. Da quello visto prima, $\delta_k(\phi_i\psi_j) = 0$, e quindi $\phi_i\psi_j \sim \xi_{ij}$, dove $\xi_{ij}$ è un polinomio nella $y$, di grado minore di $d_k$. Sommando i termini per cui $i+j = n$, otteniamo dunque che la decomposizione che abbiamo scritto per $\phi\psi$ è tale che $\left(\sum_{i=0}^n \phi_i\psi_{n-i}\right)$ è equivalente $\xi_n := \sum_{i+j=n} \xi_{ij}$, che è un polinomio nella $y$ di grado minore di $d_k$. Dunque per l'Osservazione 2.18 $\phi\psi$ è equivalente a $\xi := \sum_n \xi_n U_k^n$, che è la decomposizione di $\xi$ rispetto a $U_k$. In particolare $\delta_k(\phi\psi) = \delta_k(\xi) \leq \delta_k(\phi) + \delta_k(\psi)$: infatti non compaiono termini di grado superiore, ricordando l'Osservazione 2.17; inoltre se $i = \delta_k(\phi)$, $j = \delta_k(\psi)$, e $n = i + j$, allora $\xi_n = \xi_{ij} \sim \phi_i\psi_j$, e

$$\nu_k(\xi_n U_k^n) = \nu_k(\phi_i U_k^i \psi_j U_k^j) = \nu_k(\phi_i U_k^i) + \nu_k(\psi_j U_k^j) = \nu_k(\phi) + \nu_k(\psi) = \nu_k(\phi\psi) = \nu_k(\xi),$$

e dunque $\delta_k(\xi) = \delta_k(\phi\psi) \geq \delta_k(\phi) + \delta_k(\psi)$. Abbiamo ottenuto così la tesi. □

**Lemma 2.20.** *Sia $\phi \in R$. Allora $\delta_k(\phi) = 0$ se e solo se $[\phi]$ è un'unità in $R_k$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo $\delta_k(\phi) = 0$ allora per l'Osservazione 2.17 $\phi \sim \phi_0$, con $\phi_0$ il coefficiente di grado 0 della decomposizione rispetto a $U_k$. Essendo $U_k$ irriducibile in $R$ per l'ipotesi $(C_k)$, e $d_k = \deg_y(U_k) > \deg_y(\phi_0)$, il polinomio $U_k$ è primo con $\phi_0$. Allora per il lemma di Bezout possiamo trovare $A, B \in \mathbb{C}(x)[y]$ tali che $A\phi_0 + BU_k = 1$, con $\deg_y A, \deg_y B < d_k$ (e in particolare $\delta_k(A) = \delta_k(B) = 0$). Dal Lemma 2.19 segue che $\delta_k(A\phi_0) = 0$ e quindi $\nu_k(A\phi_0) = \nu_k(1) = 0 < \nu_k(BU_k)$, per definizione di $\delta_k$ e notando che $1 - BU_k$ è esattamente la decomposizione di $A\phi_0$ rispetto a $U_k$. Dunque $A\phi_0 \sim 1$, e $[\phi_0] = [\phi]$ è un'unità di $R_k$. Viceversa, se $\phi$ è un'unità di $R_k$, allora esiste $A \in R_k$ tale che $A \cdot [\phi] = [1]$. Ricordando l'Osservazione 1.44, abbiamo che $A = [\psi]$ per un certo $\psi \in R$. Allora $\delta_k(\phi) + \delta_k(\psi) = \delta_k(1) = 0$, e $\delta_k(\phi) = 0$. □

**Osservazione 2.21.** Si vede facilmente che $\nu_k(U_{k+1}) = n_k\beta_k$, e che $\delta_k(U_{k+1}) = n_k$. Infatti, ricordando la (2.2), si ha che $U_{k+1} = U_k^{n_k} - \tilde{U}_k$, dove $\tilde{U}_k = \theta_k \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$. Direttamente da (Q1), sappiamo che $\nu_k(U_k^{n_k}) = n_k\beta_k$, mentre $\nu_k(\tilde{U}_k) = \sum_{j=0}^{k-1} m_{k,j}\beta_j = n_k\beta_k$; ricordando il Lemma 2.5, sappiamo che $\deg_y(\tilde{U}_k) < d_k$, e quindi quella che abbiamo scritto è la decomposizione di $U_{k+1}$ rispetto a $U_k$, che ha due soli termini, quello di grado $n_k$ (che è $U_k^{n_k}$), e quello di grado 0 (che è $-\tilde{U}_k$). Allora per la definizione (2.6), abbiamo che anche $\nu_k(U_{k+1}) = n_k\beta_k$, e quindi $\delta_k(U_{k+1}) = n_k$.

**Passo 1:** Dobbiamo dimostrare che $[U_k]$ e $[U_{k+1}]$ sono irriducibili in $R_k$; partiamo da $[U_k]$.

**Lemma 2.22.** *$[U_k]$ è irriducibile in $R_k$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $[U_k] = A \cdot B$, con $A, B \in R_k$; per l'Osservazione 1.44, posso supporre $A = [\phi]$, $B = [\psi]$, con $\phi, \psi \in R$. Direttamente dalla definizione si ha che $\delta_k(U_k) = 1$, e quindi per il Lemma 2.19 si ha che o $\delta_k(\phi) = 0$ o $\delta_k(\psi) = 0$. Ma allora $[\phi]$ o $[\psi]$ sono unità in $R_k$ per il Lemma 2.20, e la tesi è dimostrata. □

Per $[U_{k+1}]$ serve più lavoro:

**Lemma 2.23.** *$[U_j]$ è un'unità in $R_k$ per $j < k$.*

*Dimostrazione.* Per il Lemma 2.20 basta dimostrare che $\delta_k(U_j) = 0$. Se $d_j < d_k$ allora questo è ovvio (la decomposizione di $U_j$ rispetto a $U_k$ ha solo il grado 0). Se invece $d_j = d_k$, allora $U_j = (U_j - U_k) + U_k$, con $\deg_y(U_j - U_k) < d_k$ (infatti gli $U_n$ sono polinomi monici nella $y$), è la decomposizione di $U_j$ rispetto a $U_k$. Ora per (Q1) $\nu_k(U_j) = \beta_j < \beta_k = \nu_k(U_k)$, quindi $U_j - U_k \sim U_j$ e per ciò che abbiamo visto $\delta_k(U_j) = \nu_k(U_j - U_k) = 0$. □

**Lemma 2.24.** *Se $i = \delta_k(\phi) < n_k$, allora $\phi \sim \phi_i U_k^i$. In altri termini $\nu_k(\phi_j U_k^j) > \nu_k(\phi_i U_k^i) = \nu_k(\phi)$ per ogni $j \neq i$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo $\nu_k(\phi_i U_k^i) = \nu_k(\phi_j U_k^j) = \nu_k(\phi)$, dove $j \leq i < n_k$. Allora direttamente dalla definizione di $\nu_k$ (2.6) si ha $(i-j)\beta_k = \nu_{k-1}(\phi_i) - \nu_{k-1}(\phi_j) \in \sum_{h=0}^{k-1} \mathbb{Z}\beta_h$. Ricordando la definizione (2.1), si ha che $n_k$ divide $(i-j)$, e quindi $j = i$. Quindi $\nu_k(\phi - \phi_i U_k^i) = \min_{j \neq i}\{\nu_k(\phi_j U_k^j)\} > \nu_k(\phi)$: infatti il minimo per $j < n_k$ è raggiunto solo da $i$, ed essendo $\delta_k(\phi) < n_k$, i termini $j \geq n_k$ non ci sono. Abbiamo dunque visto che $\phi \sim \phi_i U_k^i$, con $i$ l'unico indice che verifica il minimo di (2.1). □

**Lemma 2.25.** *$[U_{k+1}]$ è irriducibile in $R_k$.*

*Dimostrazione.* Dalla definizione di SKP, ricordiamo (2.2): $U_{k+1} = U_k^{n_k} - \tilde{U}_k$, dove $\tilde{U}_k = \theta_k \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$. Ricordando l'Osservazione 2.21, si ha che $\delta_k(U_{k+1}) = n_k$.

Sia allora $[U_{k+1}] = A \cdot B$ con $A, B \in R_k$, che possiamo supporre in $R/\sim$, con $A = [\phi]$ e $B = [\psi]$, grazie all'Osservazione 1.44; supponiamo per assurdo che $0 < \delta_k(\phi), \delta_k(\psi) < n_k$. Per il Lemma 2.24 ho che $\phi \sim \phi_i U_k^i$, $\psi \sim \psi_j U_k^j$ con $i = \delta_k(\phi)$, $j = \delta_k(\psi)$ (e $i + j = n_k$ per il Lemma 2.19). Allora $[U_{k+1}] = [\phi_i \psi_j U_k^{n_k}]$, e quindi $[\tilde{U}_k] = [1 - \phi_i \psi_j] \cdot [U_k^{n_k}]$.

Ma $[\tilde{U}_k]$ è un'unità, perché prodotto di unità (vedi il Lemma 2.23), mentre $[U_k]$ è irriducibile (vedi Lemma 2.22), assurdo. Quindi uno tra $\delta_k(\phi)$ e $\delta_k(\psi)$ (supponiamo il primo) è nullo, e quindi $[\phi]$ è un'unità in $R_k$ (per il Lemma 2.20), e $U_{k+1}$ è irriducibile. □

**Passo 2:** Per ipotesi induttiva sappiamo già che $U_j$ è irriducibile, sia in $\mathbb{C}[x, y]$ sia in $\mathbb{C}(x)[y]$, per $0 \leq j \leq k$. Rimane da dimostrare il

**Lemma 2.26.** *$U_{k+1}$ è irriducibile, sia in $\mathbb{C}[x, y]$ sia in $\mathbb{C}(x)[y]$.*

*Dimostrazione.* Essendo $U_{k+1}$ monico nella $y$, l'irriducibilità in $\mathbb{C}[x, y]$ implica quella in $\mathbb{C}(x)[y]$. Supponiamo allora $U_{k+1} = \phi\psi$, con $\phi, \psi \in \mathbb{C}[x, y]$. Per $(B_k)$ abbiamo che $[U_{k+1}]$ è irriducibile in $R_k$, e quindi posso supporre $[\phi]$ un'unità in $R_k$, ovvero $\delta_k(\phi) = 0$ e $\delta_k(\psi) = n_k$. D'altra parte, ricordando l'Osservazione 2.11, abbiamo che $\deg_y(\xi) \geq d_k \delta_k(\xi)$ per ogni $\xi \in \mathbb{C}(x)[y]$.

Usando il Lemma 2.5, allora:

$$d_k \delta_k(\psi) = d_k n_k = \deg_y(U_{k+1}) = \deg_y(\phi) + \deg_y(\psi) \geq \deg_y(\psi) \geq d_k \delta_k(\psi),$$

e dunque le disuguaglianze sono tutte uguaglianze: $\deg_y(\phi) = 0$ e $\deg_y(\psi) = \deg_y(U_{k+1})$. Ma $U_{k+1}$ è monico nella $y$ e dunque $\phi \in \mathbb{C}^*$ è invertibile, e $U_{k+1}$ è irriducibile. □

**Passo 3:** Direttamente dalla definizione (2.6) di $\nu_{k+1}$, seguono le proprietà (V2) e (V3) della definizione di valutazione, come le proprietà (Q1) e (Q2); ci restano da mostrare (V1), (Q3) e (Q4). Osserviamo che:

(i) se $\deg_y(\phi) < d_{k+1}$ allora $\nu_{k+1}(\phi) = \nu_k(\phi)$;

segue direttamente dalla definizione (2.6), ricordando che la decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_{k+1}$ è fatta del solo termine di grado zero, per l'ipotesi su $\deg_y(\phi)$.

(ii) $\nu_k(U_{k+1}) = n_k \beta_k < \beta_{k+1} = \nu_{k+1}(U_{k+1})$;

segue direttamente dall'Osservazione 2.21 e dalla condizione (P1) sui $\beta_j$ nella definizione di SKP.

(iii) $\nu_{k+1}(U_{k+1}\phi) = \nu_{k+1}(U_{k+1}) + \nu_{k+1}(\phi)$ per ogni $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$;

infatti moltiplicare per $U_{k+1}$ un polinomio significa shiftare i coefficienti della decomposizione rispetto a $U_{k+1}$ di 1, ovvero aggiungere $\beta_{k+1}$ ad ogni elemento di cui fare il minimo, da cui si ricava la tesi.

(iv) $\nu_{k+1}(U_{k+1}\phi) > \nu_k(U_{k+1}\phi)$ per ogni $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$;

segue direttamente da (ii) e (iii).

Ora un risultato che ci sarà subito utile.

**Lemma 2.27.** *Sia $\phi \in R$, e $\phi_0$ e $\psi$ il coefficiente di grado* 0 *e il resto della decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_{k+1}$. Allora $\nu_k(\phi) = \min\{\nu_k(\phi_0), \nu_k(\psi U_{k+1})\}$ (o equivalentemente $\phi_0 \not\sim -\psi U_{k+1}$).*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $\nu_k(\phi) > \min\{\nu_k(\phi_0), \nu_k(\psi U_{k+1})\}$, o equivalentemente che $\phi_0 \sim -\psi U_{k+1}$. Da $\deg_y(\phi_0) < d_{k+1} = n_k d_k$ si ricava che $\delta_k(\phi_0) < n_k$. Ma ricordando l'Osservazione 2.21 che ci dice che $\delta_k(U_{k+1}) = n_k$, abbiamo che $\delta_k(\psi U_{k+1}) = \delta_k(\psi) + \delta_k(U_{k+1}) \geq n_k$. Ricordando il Lemma 2.16, si ha che $n_k \leq \delta_k(\psi U_{k+1}) = \delta_k(\phi_0) < n_k$: assurdo. $\square$

Col prossimo lemma verificheremo che valgono (Q3) e (Q4) per $\nu_{k+1}$.

**Lemma 2.28.** *$\nu_{k+1}(\phi) \geq \nu_k(\phi)$ per ogni $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$. Più precisamente vale la disuguaglianza stretta se e solo se $\phi \sim U_{k+1}\psi = \phi - \phi_0$, con $\psi$ il resto e $\phi_0$ il coefficiente di grado* 0 *della decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_{k+1}$.*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su $\deg_y(\phi)$. Se $\deg_y(\phi) < d_{k+1}$, allora la tesi segue direttamente da (i). Supponiamo allora $\deg_y(\phi) \geq d_{k+1}$, e scriviamo $\phi = \sum_i \phi_i U_{k+1}^i$ la decomposizione rispetto a $U_{k+1}$. Se $\phi_0 = 0$, allora posso scrivere $\phi = U_{k+1}\psi$, e dunque $\nu_{k+1}(\phi) \overset{(iii)}{=} \nu_{k+1}(U_{k+1}) + \nu_{k+1}(\psi) \overset{(ii)}{>} \nu_k(U_{k+1}) + \nu_k(\psi) \overset{(A_k)}{=} \nu_k(\phi)$, dove insieme al punto (ii) nella disuguaglianza si è usata l'ipotesi induttiva. La tesi rimane dunque dimostrata per $\phi_0 = 0$. Supponiamo allora $\phi_0 \neq 0$, e scriviamo $\phi = \phi_0 + U_{k+1}\psi$ con $\psi$ il resto della decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_{k+1}$. Ricordiamo che per definizione vale

$$\nu_{k+1}(\phi) = \min\{\nu_{k+1}(\phi_0), \nu_{k+1}(\psi U_{k+1})\}. \tag{2.10}$$

Per il Lemma 2.27 si ha che $\nu_k(\phi) = \min\{\nu_k(\phi_0), \nu_k(\psi U_{k+1})\}$, mentre per ciò appena visto e per (i) vale

$$\nu_{k+1}(\phi) = \min\{\nu_{k+1}(\phi_0), \nu_{k+1}(\psi U_{k+1})\} \geq \min\{\nu_k(\phi_0), \nu_k(\psi U_{k+1})\} = \nu_k(\phi);$$

cerchiamo di essere più precisi. Se $\nu_k(\phi) = \nu_k(\phi_0) \leq \nu_k(\psi U_{k+1})$, o equivalentemente $\phi \not\sim \psi U_{k+1}$; allora

$$\begin{aligned}\nu_k(\phi) &= \nu_k(\phi_0) = \nu_{k+1}(\phi_0), \\ &\leq \nu_k(\psi U_{k+1}) < \nu_{k+1}(\psi U_{k+1}),\end{aligned}$$

e quindi il minimo in (2.10) è realizzato (solo) da $\nu_{k+1}(\phi_0)$, e $\nu_k(\phi) = \nu_{k+1}(\phi)$.

Viceversa, supponiamo che $\nu_k(\phi) = \nu_k(\psi U_{k+1}) < \nu_k(\phi_0)$, o equivalentemente $\phi \sim \psi U_{k+1}$; ma $\nu_k(\phi_0) = \nu_{k+1}(\phi_0)$ per quanto visto prima, mentre $\nu_k(\psi U_{k+1}) < \nu_{k+1}(\psi U_{k+1})$ per (iv), e quindi $\nu_k(\phi) < \min\{\nu_{k+1}(\phi_0), \nu_{k+1}(\psi U_{k+1})\} = \nu_{k+1}(\phi)$ direttamente da (2.10), e la tesi è dimostrata. □

**Osservazione 2.29.** Vediamo che $\phi \sim U_{k+1}\psi = \phi - \phi_0$, con $\psi$ il resto e $\phi_0$ il coefficiente di grado 0 della decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_{k+1}$, se e solo se $[U_{k+1}]$ divide $[\phi]$ in $R_k$. L'implicazione diretta è banale; vediamo quella inversa. Sia allora $[\phi] = [U_{k+1}]A$, con $A \in R_k$. Per l'Osservazione 1.44, posso scrivere $A = [\xi]$, con $\xi \in R$; per ipotesi ho che $\nu_k(\phi - U_{k+1}\xi) > \nu_k(\phi)$, e voglio dimostrare che $[\phi] = [U_{k+1}][\psi]$, ovvero che $\nu(\phi_0) > \nu(\phi)$. Ma $\phi = \phi_0 + U_{k+1}\psi$, e dunque l'ipotesi mi dice che $\nu_k(\phi_0 + U_{k+1}(\psi - \xi)) > \nu_k(\phi)$. A sua volta, per il Lemma 2.27, si ha che $\nu_k(\phi_0 + U_{k+1}(\psi - \xi)) = \min\{\nu_k(\phi_0), \nu_k(U_{k+1}(\psi - \xi))\}$, e quindi in particolare $\nu_k(\phi_0) \geq \nu_k(\phi_0 + U_{k+1}(\psi - \xi)) > \nu_k(\phi)$.

Rimane da mostrare che vale (V1) per $\nu_{k+1}$. Fissiamo allora $\phi$ e $\psi$ in $\mathbb{C}(x)[y]$. Vogliamo mostrare che $\nu_{k+1}(\phi\psi) = \nu_{k+1}(\phi) + \nu_{k+1}(\psi)$.

**Osservazione 2.30.** Assumiamo prima che $[U_{k+1}]$ non divida $[\phi]$ ne $[\psi]$, ovvero che $\phi \not\sim \tilde{\phi}U_{k+1}$ e $\psi \not\sim \tilde{\psi}U_{k+1}$, dove $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ sono i resti delle relative decomposizioni rispetto a $U_{k+1}$ (grazie all'Osservazione 2.29). Ne segue che se $\xi = \phi\psi$, allora anche $\xi \not\sim \tilde{\xi}U_{k+1}$, con $\tilde{\xi}$ il resto della decomposizione rispetto a $U_{k+1}$. Per vederlo, scriviamo la decomposizione rispetto a $U_{k+1}$ di $\phi_0\psi_0$. $\deg_y(\phi_0\psi_0) < 2d_{k+1}$, e quindi la decomposizione è di soli due termini: $\phi_0\psi_0 = \alpha_0 + \alpha_1 U_{k+1}$. Allora per verificare la tesi basta mostrare che $\nu_k(\alpha_0) > \nu_k(\phi\psi)$.

Dal Lemma 2.27 segue che $\nu_k(\phi_0\psi_0) = \min\{\nu_k(\alpha_0), \nu_k(\alpha_1 U_{k+1})\}$, da cui si ricava $\nu_k(\alpha_0) \geq \nu_k(\phi_0\psi_0) = \nu_k(\phi_0) + \nu_k(\psi_0) > \nu_k(\phi) + \nu_k(\psi) = \nu_k(\phi\psi)$, dove le uguaglianze sono date dal fatto che $\nu_k$ è una valutazione per $(A_k)$, mentre la disuguaglianza stretta per le assunzioni fatte su $\phi$ e $\psi$. Abbiamo dunque visto che $[U_{k+1}]$ non divide neanche $[\phi\psi]$ (ricordando l'Osservazione 2.29), e $\nu_{k+1}(\phi\psi) = \nu_k(\phi\psi)$ per il Lemma 2.28.

Ma allora

$$\nu_{k+1}(\phi\psi) = \nu_k(\phi\psi) = \nu_k(\phi) + \nu_k(\psi) = \nu_{k+1}(\phi) + \nu_{k+1}(\psi), \tag{2.11}$$

e (V1) è dimostrato in questo caso.

Scriviamo $\phi = \sum \phi_i U^i_{k+1}$, $\psi = \sum \psi_j U^j_{k+1}$ e $\phi\psi = \xi = \sum \xi_n U^n_{k+1}$ le tre decomposizioni rispetto a $U_{k+1}$ di $\phi$, $\psi$ e $\phi\psi$ rispettivamente.

**Osservazione 2.31.** Iterando il procedimento analizzato nel Lemma 2.28, si ottiene che se $i$ è la massima potenza di $U_{k+1}$ tale che $[U^i_{k+1}]$ divide $[\phi]$ in $R_k$, allora $\nu_{k+1}(\phi) = \nu_{k+1}(\phi_i U^i_{k+1}) = \nu_k(\phi_i) + i\beta_{k+1}$.

In particolare dunque, se $[\phi] = [U^i_{k+1}][\hat{\phi}]$ e $[\psi] = [U^j_{k+1}][\hat{\psi}]$, con $[U_{k+1}]$ che non divide ne $[\hat{\phi}]$ ne $[\hat{\psi}]$, allora se $n = i + j$, si ha che $[U^n_{k+1}]$ divide esattamente $[\phi\psi]$ (altrimenti $[U_{k+1}]$ dividerebbe $[\hat{\phi}\hat{\psi}]$, il che non è possibile per l'Osservazione 2.30). Quindi $\nu_{k+1}(\phi\psi) = \nu_{k+1}(\xi_n U^n_{k+1}) = \nu_k(\xi_n) + n\beta_{k+1}$.

Dunque $[\xi_n U^n_{k+1}] = [\phi\psi] = [\phi][\psi] = [\phi_i][\psi_j][U^{i+j}_{k+1}]$, e quindi $[\xi_n] = [\phi_i\psi_j]$ e $\nu_k(\xi_n) = \nu_k(\phi_i) + \nu_k(\psi_j)$.

Ma allora

$$\nu_{k+1}(\phi\psi) = \nu_k(\xi_n) + n\beta_{k+1} = \nu_k(\phi_i) + \nu_k(\psi_j) + (i+j)\beta_{k+1} = \nu_{k+1}(\phi) + \nu_{k+1}(\psi), \tag{2.12}$$

e abbiamo dimostrato (V1) anche nel caso generale.

Quindi $\nu_{k+1}$ è una valutazione, e $(A_{k+1})$ è dimostrato. □

**Osservazione 2.32.** La definizione (2.6) può essere utilizzata direttamente per ogni elemento $\phi \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Infatti per il teorema di preparazione di Weierstrass, $\phi = u\psi$ con $\deg_y(\psi) \in \mathbb{C}[[x]][y]$ monico nella $y$ e $u \in \mathbb{C}[[x,y]]$ un'unità. Ma $\nu_k(u) = 0$, e quindi $\nu_k(\phi) = \nu_k(\psi)$, e quindi posso semplicemente supporre $\deg_y(\phi) \in \mathbb{C}[[x]][y]$. Essendo $\phi$ monico nella $y$, ottengo allora la decomposizione (2.5) con $\phi_j \in \mathbb{C}[[x]][y]$ e $\deg_y(\phi_j) < d_k$.

Passiamo ora al caso di una SKP di lunghezza infinita.

**Teorema 2.33.** *Sia $(U_j, \beta_j)_{j=0}^{\infty}$ una SKP di lunghezza infinita, e sia $\nu_k$ la valutazione associata a $(U_j, \beta_j)_{j=0}^{k}$ per $k \geq 1$, data dal Teorema 2.13.*

*(i) Se $n_j \geq 2$ frequentemente, allora per ogni $\phi \in R$ esiste $k_0 = k_0(\phi)$ tale che $\nu_k(\phi) = \nu_{k_0}(\phi)$ per ogni $k \geq k_0$. In particolare, $\nu_k$ converge ad una valutazione $\nu_\infty$ (rispetto alla topologia debole).*

*(ii) Se $n_j = 1$ definitivamente, allora $U_k$ converge in $R$ ad una serie formale irriducibile $U_\infty$, e $\nu_k$ converge ad una valutazione $\nu_\infty$. Più precisamente, per $\phi \in R$ primo con $U_\infty$ si ha $\nu_k(\phi) = \nu_{k_0}(\phi)$ per $k \geq k_0 = k_0(\phi)$, e se invece $U_\infty$ divide $\phi$, allora $\nu_k(\phi) \to \infty$.*

*Dimostrazione.* (i) Sia $n_j \geq 2$ frequentemente; allora $d_{k+1} = \prod_{j=1}^{k} n_j$ tende ad $\infty$. Sia $\phi \in R$. Ricordando l'Osservazione 2.32, possiamo supporre $\deg_y(\phi) < \infty$ e $\nu_k$ definito dalla (2.6). Allora esiste un $K$ tale che per ogni $k > K$ si ha $\deg_y(\phi) < \deg_y(U_k) = d_k$, quindi definitivamente compare solo il termine di grado 0 nella decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_k$, e $\nu_k(\phi) = \nu_K(\phi)$ per ogni $k \geq K$; quindi $\nu_k$ converge (rispetto alla topologia debole) ad una valutazione $\nu_\infty$.

(ii) Sia $n_j = 1$ per ogni $k \geq K$, e fissiamo $d := \max_j \deg_y(U_j) = d_K$. Per $k \geq K$, direttamente dalla definizione (2.2), si ha che:

$$U_{k+1} = U_k - \theta_k \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}. \tag{2.13}$$

Essendo $0 \leq m_{k,j} < n_j$, si ha che $m_{k,j} = 0$ per $K \leq j < k$. Dunque $(\beta_k)_{k \geq K}$ è una successione strettamente crescente di numeri reali appartenenti al lattice discreto $\sum_{j=0}^{K} \mathbb{Z}\beta_j$, e quindi $\beta_k \to \infty$. Scriviamo gli $U_k$ in forma di Weierstrass:

$$U_k = y^{d_k} + a_{d_k-1}^{(k)}(x) y^{d_k-1} + \ldots + a_0^{(k)}(x),$$

dove $a_n^{(k)}(0) = 0$ per ogni $n < k$, e $d_n = d$ per $k \geq K$. Siccome $m_{k,j} = 0$ per $K \leq j < k$, abbiamo, eguagliando i termini di grado $n$ nell'espressione (2.13), si ottiene:

$$a_n^{(k+1)}(x) = a_n^{(k)}(x) - \theta_k \sum_{(i_h, j_h) \in I_n} \prod_h a_{i_h}^{j_h}(x),$$

dove $I_n = \left\{ (i_h, j_h)_{h=1}^{l} \mid \#\{j_h = j\} = m_{k,j} \text{ e } i_1 + \ldots + i_l = n \right\}$. In particolare abbiamo che $a_n^{(k+1)}(x) - a_n^{(k)}(x) \in \mathfrak{m}^{M_k}$, dove $M_k := \sum_{j=0}^{K} m_{k,j}$. Ma la successione $(\beta_j)$ è crescente, e quindi

$$\sum_{j=0}^{K} m_{k,j} \geq \beta_K^{-1} \sum_{j=0}^{K} \beta_j m_{k,j} = \frac{\beta_k}{\beta_K} \to \infty,$$

e quindi $a_n^{(k+1)}(x) - a_n^{(k)}(x) \to 0$ per $k \to \infty$, per ogni $n < d$, e $U_k$ tende ad un elemento di $\mathbb{C}[[x]][y]$, di grado $d$ e monico nella $y$, che denotiamo con $U_\infty$.

Dalla (2.13) si ha per $k \geq K$ che $\nu_{k-1}(U_{k+1} - U_k) = \nu_{k-1}\left(\prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j m_{k,j} = \beta_k > n_{k-1}\beta_{k-1} = \nu_{k-1}(U_k)$, e dunque $U_{k+1} = U_k \pmod{\nu_{k-1}}$, e per transitività si ottiene $U_{k+l} = U_k \pmod{\nu_{k-1}}$ per ogni $l \geq 0$, e $k \geq K$, e quindi che $U_\infty = U_k \pmod{\nu_{k-1}}$.

Da ciò si deduce che $\nu_\infty(U_\infty) := \lim \nu_k(U_\infty) = \lim \nu_k(U_{k+1}) = \lim n_k \beta_k = \lim \beta_k = \infty$.

Sia ora $\phi \in R$, e scriviamo $\phi = \phi_0 + U_\infty \psi_0$, con $\deg_y(\phi_0) < \deg_y(U_\infty) = d$ (possiamo perché $U_\infty$ è monico nella $y$). Se $\phi_0 = 0$, fissiamo $\nu_\infty(\phi) := \lim \nu_k(\phi) = \nu_k(U_\infty \psi_0) = \lim (\nu_k(U_\infty) + \nu_k(\psi)) = \infty$. Altrimenti $\nu_k(U_\infty \psi_0) \to \infty$, e quindi, ricordando la Proposizione 1.31, si ha che per $k > K$ abbastanza grande, e per ogni $l \geq 0$, $\nu_{k+l}(\phi) = \nu_{k+l}(\phi_0)$. D'altra parte, essendo $\deg_y(\phi_0) < d$, direttamente dalla definizione (2.6) si ottiene che $\nu_{k+l}(\phi_0) = \nu_k(\phi_0)$. Quindi la successione $(\nu_k(\phi))_k$ è stazionaria per ogni $\phi \in R$, e posso definire $\nu_\infty(\phi) := \lim \nu_k(\phi)$.

Così definita $\nu_\infty$ risulta una valutazione (da verifica diretta), mentre dal fatto che $\nu_\infty(\phi) = \infty$ se e solo se $U_\infty \mid \phi$ se ne deduce che $U_\infty$ è primo (ricordando l'Osservazione 1.23), e quindi irriducibile, su $R$.

□

**Definizione 2.34.** Data $(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ una SKP di lunghezza $k$ finita o infinita, denoteremo con $\nu := \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ la **valutazione associata** alla SKP, costruita nel Teorema 2.13 o nel Teorema 2.33.

## 2.3 Studio dell'anello graduato di una valutazione SKP

In questa sezione studieremo la struttura delle valutazioni associate ad una SKP, cercando di studiarne l'anello graduato associato.

Fissiamo allora per il resto della sezione una SKP $(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$, con $1 \leq k \leq \infty$, con $n_j$ definiti come in (2.1), gli $m_{j,l}$, i $\theta_j$ e i $d_j$ come nella definizione di SKP. Denoteremo con $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)$ la valutazione associata, con $\sim$ la relazione d'equivalenza dell'Osservazione 1.43 rispetto alla valutazione $\nu$, poi per noi sarà $R = \mathbb{C}[[x, y]]$ (e $K$ il suo campo delle frazioni), $[\phi]$ una generica classe d'equivalenza in $R/\sim$, e $R_\nu$ l'anello graduato associato a $\nu$, ovvero $R_\nu := \mathrm{gr}_\nu R$

Studiamo allora la struttura di $R_\nu$, iniziando dal caso di una SKP di lunghezza finita.

**Teorema 2.35.** *Sia $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)$ la valutazione associata ad una SKP $(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$, con $1 \leq k < \infty$. Fissiamo $\phi \in R$.*

*(i) Se $n_k = \infty$, o equivalentemente $\beta_k \notin \mathbb{Q}\beta_0$, allora abbiamo che*

$$\phi \sim \alpha \prod_{j=0}^{k} U_j^{i_j}, \tag{2.14}$$

*con $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j < k$, $i_0, i_k \geq 0$;*

*(ii) Se $n_k < \infty$, o equivalentemente $\beta_k \in \mathbb{Q}\beta_0$, allora denotiamo con $m_{k,l} \in \mathbb{N}$ gli interi tali che $n_k\beta_k = \sum_{l=0}^{k-1} m_{k,l}\beta_l$, con $0 \leq m_{k,l} < n_l$ per ogni $1 \leq l < k$; allora*

$$\phi \sim p(T)\prod_{j=0}^{k} U_j^{i_j}, \tag{2.15}$$

*con $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j < k$, e $i_0, i_k \geq 0$, e $p$ un polinomio in $T = U_k^{n_k}\prod_{j=0}^{k-1} U_j^{-m_{k,j}}$.*

*Entrambe le scritture sono uniche.*

*Dimostrazione.* Fondamentale per la dimostrazione è l'Osservazione 2.9, che ci permette, nel caso la valutazione non assuma valori infiniti, di sostituire $R = \mathbb{C}[[x,y]]$ con $\mathbb{C}[x,y]$, ed utilizzare quindi le proprietà viste nella dimostrazione del Teorema 2.13.

Togliamoci subito il caso scomodo $\beta_0 = \infty$; in questo caso la tesi deriva dal calcolo diretto.

Vediamo gli altri casi, in cui $\beta_0 < \infty$. Prima di tutto supponiamo che $\deg_y(\phi) < d_k = \deg_y U_k$ (in particolare posso applicare l'Osservazione 2.9). Scriviamo allora $\phi = \sum_{i=0}^{n_{k-1}-1} \phi_i U_{k-1}^i$ la decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_{k-1}$ (e quindi $\deg_k(\phi_i) < d_{k-1}$). Iterando questa procedura, ovvero decomponendo man mano per tutti gli $U_j$, si ottiene $\phi = \sum \alpha_I \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{i_j}$, con $I = (i_0, \dots, i_{k-1})$, $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j \leq k-1$, $i_0 \geq 0$ (per la Proposizione 2.2), e $\alpha_I \in \mathbb{C}$.

Per semplicità di notazione, scriviamo $U^I = \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{i_j}$.

Sempre per ciò visto nella Proposizione 2.2, otteniamo che $\nu(U^I) = \nu(U^J)$ se e solo se $I = J$, e dunque in realtà $\phi$ è equivalente a $\alpha_I U^I$, con $I$ l'unico indice per cui otteniamo il valore minimo per $\nu(U^I)$, e otteniamo quindi il risultato in entrambi i casi, se $\deg_y(\phi) < d_k$ (nel caso (ii) $p(T) = \alpha_I$).

Nel caso generico, consideriamo separatamente i due casi per $n_k$. Scriviamo $\phi = \sum \phi_i U_k^i$, con $\deg_y(\phi_i) < d_k$.

(i) Supponiamo $n_k = \infty$. Direttamente dalla definizione (2.6), abbiamo che $\nu(\phi) = \min\{\nu(\phi_i) + i\beta_k\}$. Essendo $\nu_k = \infty$, se $\beta_k < \infty$, tutti i valori di cui si fa il minimo sono diversi, e quindi, chiamando $i_k$ l'unico indice che da il minimo, si ha che $\phi \sim \phi_{i_k} U_k^{i_k}$; a sua volta per quello visto prima, si ha che $\phi_i \sim \alpha_i U^I$, e quindi $\phi \sim \alpha_I U^I U_k^{i_k}$, ovvero la tesi.

    Se invece $\beta_k = \infty$, non posso più usare l'Osservazione 2.9; supponiamo che la decomposizione di $\phi$ rispetto a $U_k$ (esiste grazie all'Osservazione 2.32) abbia tutti i coefficienti minori di $i_k$ nulli, allora abbiamo che $\phi \sim U_k^{i_k}\phi_{i_k}$. A sua volta $\deg_y \phi_{i_k} < d_k$, e quindi possiamo utilizzare il risultato precedente per ottenere la tesi anche in questo caso.

(ii) Supponiamo ora che $n_k < \infty$. Consideriamo allora $\phi = \sum_I \alpha_I U^I$, con $I = (i_0, \dots, i_k)$, $i_0 \in \mathbb{Z}, i_k \geq 0$, $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j \leq k-1$, e $\alpha_I \in \mathbb{C}$, mettendo insieme i risultati ottenuti finora. Consideriamo un multiindice $I = (i_0, \dots, i_k)$ con $\alpha_I \neq 0$. Per divisione euclidea, posso considerare $i_k = q_k n_k + r_k$, con $0 \leq r_k < n_k$, e scrivere (in $\mathbb{C}(x, y)$)

$$U^I = U_k^{r_k} T^{q_k} U^{A^{(k)}},$$

dove $A^{(k)} = (a_0^{(k)}, \dots, a_{k-1}^{(k)})$, e $a_j^{(k)} = i_j + q_k m_{k,j}$, e $T = U_k^{n_k} \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{-m_{k,j}}$. Questo ci dice che le due espressioni sono equivalenti in $R_\nu$ (dove $T$ ha senso, visto che $[U_j]$ sono invertibili grazie al Lemma 2.23).

L'osservazione chiave è che $U_j^{n_j} \sim \theta_j \prod_{l=0}^{j-1} U_l^{m_{j,l}}$ per $1 \leq j < k$ (la differenza è $U_{j+1}$, dove $\nu$ assume il valore $\beta_{j+1} > n_j \beta_j$). Allora, ancora per divisione euclidea, posso considerare $a_{k-1} = q_{k-1} n_{k-1} + r_{k-1}$, con $0 \leq r_{k-1} < n_{k-1}$, così da poter scrivere

$$U^A \sim \theta_{k-1}^{q_{k-1}} U_{k-1}^{r_{k-1}} U^{A^{(k-1)}},$$

dove $A^{(k-1)} = (a_0^{(k-1)}, \dots, a_{k-2}^{(k-1)})$, e $a_j^{(k-1)} = a_j^{(k)} + q_{k-1} m_{k-1,j}$. Per induzione si ottiene dunque

$$U^I \sim \theta T^q U^R,$$

con $q = q_k \geq 0$, $\theta \in \mathbb{C}^*$, $R = (r_0, \dots, r_k)$, con $r_0 = a_0^{(1)} \geq 0$ (vedi la 2.2) e $0 \leq r_j < n_j$. Ricordando la Proposizione 2.2, si ha che $\nu(T^q U^R) = \nu(T^p U^S)$ (con $q, R$, e $p, S$ della forma appena vista), se e solo se $R = S$; inoltre $\nu$ assume un valore maggiore per la differenza (ovvero i due elementi sono equivalenti) se e solo se $p = q$ (e $R = S$). Avevamo già visto che $\phi$ era equivalente alla somma di elementi di questo genere, e così quindi si ottiene la tesi.

□

**Corollario 2.36.** *Sia $\nu$ una valutazione come nel teorema precedente. Allora gli elementi irriducibili di $R_\nu$ in $R/\sim$, ovvero della forma $[\phi]$, con $\phi \in R$ sono i seguenti:*

*(i) Se $n_k = \infty$, allora l'unico elemento è $[U_k]$.*

*(ii) Se $n_k < \infty$, allora sono $[U_k]$, e le classi di equivalenza di elementi della forma $U_k^{n_k} - \theta \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$, con $\theta \in \mathbb{C}^*$.*

*Dimostrazione.* Grazie al primo passo del Teorema 2.13, più precisamente al Lemma 2.22 e al Lemma 2.25, otteniamo che in entrambi i casi gli elementi proposti sono effettivamente irriducibili. Mostriamo ora che sono gli unici. Supponiamo quindi $[\phi]$ irriducibile, e suddividiamo il nostro studio nei due casi.

(i) Per il Teorema 2.35, sappiamo che $\phi \sim \alpha \prod_{j=0}^{k} U_j^{i_j}$. Ma per $j < k$, grazie al Lemma 2.23, sappiamo che $[U_j]$ è un'unità. Da questo segue che l'unico elemento irriducibile, a meno di unità, è proprio $[U_k]$.

(ii) Per il Teorema 2.35, sappiamo che $\phi \sim p(T) \prod_{j=0}^{k} U_j^{i_j}$. Fattorizziamo $p(T) = \prod_i (T - \theta_i)$. A meno di moltiplicare per delle unità (in particolare $L = \deg p$ volte per $\prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$, e dividendo per $U_j^{i_j}$ per ogni $0 \leq j < k$), otteniamo che

$$\phi \sim U_k^{i_k - Ln_k} \prod_i \left( U_k^{n_k} - \theta_i \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}} \right).$$

Abbiamo dunque scomposto nei fattori irriducibili proposti un generico elemento di $R/\sim$, il che conclude la dimostrazione.

□

Passiamo ora al caso di una SKP infinita.

**Teorema 2.37.** *Sia $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)$ la valutazione associata ad una SKP infinita $(U_j, \beta_j)_{j=0}^{\infty}$. Fissiamo $\phi \in R$.*

*(i) Se $n_j \geq 2$ frequentemente, allora esiste $k = k(\phi)$ tale che*

$$\phi \sim \alpha \prod_{j=0}^{k} U_j^{i_j}, \tag{2.16}$$

*con $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j \leq k$, e $i_0 \geq 0$.*

*(ii) Se $n_j = 1$ definitivamente, allora esiste $k = k(\phi)$ tale che*

$$\phi \sim \alpha U_\infty^n \prod_{j=0}^{k} U_j^{i_j}, \tag{2.17}$$

*con $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j \leq k$, $i_0 \geq 0$, e $n \geq 0$.*

*Entrambe le scritture sono uniche.*

*Dimostrazione.* Dividiamo il nostro studio nei due casi, sfruttando i risultati del Teorema 2.33.

(i) Supponiamo che $n_k \geq 2$ frequentemente, e quindi $d_k = \deg_y(U_k) \to \infty$. Come nella dimostrazione del Teorema 2.33, possiamo considerare un $k = k(\phi)$ tale che $\deg_y(\phi) < d_k$, per cui $\nu(\phi) = \nu_k(\phi)$. Procedendo come nel caso finito, abbiamo allora $\phi = \sum \alpha_I U^I$, con $I = (i_0, \dots, i_k)$, con $i_0 \geq 0$, e $0 \leq i_j < n_j$ per ogni $1 \leq j \leq k$. Per tutti questi addendi, si ha che $\nu(U^I) = \nu_k(U^I)$, mentre ricordando la Proposizione 2.2, abbiamo che $\nu_k$, e quindi $\nu$, assumono lo stesso valore sui due addendi $U^I$ e $U^J$ se e solo se $I = J$; da questo segue la tesi.

(ii) Direttamente dal Teorema 2.33, abbiamo che $\nu(\phi) = \infty$ se e solo se $U_\infty$ divide $\phi$, con $U_\infty$ irriducibile. Se invece $\nu(\phi) < \infty$, come prima esiste un $k = k(\phi)$ tale che $\nu(\phi) = \nu_n(\phi)$ per $n \geq k$. Scriviamo allora $\phi = U_\infty^n \psi$, con $\psi$ primo con $U_\infty$. Come prima si ricava che $\psi \sim \alpha U^I$ con $I = (i_0, \dots, i_k)$, con $i_0 \in \mathbb{Z}$, e $0 \leq i_j < n_j$ per ogni $1 \leq j \leq k$. Da questo si ricava la tesi.

□

## 2.4 SKP associata ad una valutazione

Vediamo ora come in realtà ad ogni valutazione centrata su $\mathbb{C}[[x, y]]$ sia associata un'unica SKP.

**Teorema 2.38.** *Per ogni valutazione centrata $\nu$ su $\mathbb{C}[[x, y]]$, esiste un'unica SKP $(U_j, \beta_j)_{j=0}^n$ con $1 \leq n \leq \infty$, tale che $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)$.*

*Dimostrazione.* Costruiamo l'SKP per ricorsione sulla lunghezza. Iniziamo allora come al solito come $U_0 = x$, $U_1 = y$, $\beta_0 = \nu(x)$, $\beta_1 = \nu(y)$, che costituisce il passo base. Supponiamo poi di aver definito una SKP di lunghezza $k$, denotiamo $\nu_k := \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$; la costruzione è in modo tale che $\nu(U_j) = \beta_j$ per ogni $0 \leq j \leq k$. Per il Teorema 2.13, abbiamo che $\nu \geq \nu_k$. Se vale l'uguale, abbiamo finito; supponiamo allora che esista $\phi \in \mathbb{C}[[x, y]]$ tale che $\nu(\phi) > \nu_k(\phi)$. Grazie al Lemma 2.8 possiamo supporre che $\phi \in \mathbb{C}(x)[y]$. Sia ora $D_k := \{\phi \in \mathbb{C}(x)[y] \mid \nu(\phi) > \nu_k(\phi)\} \cup \{0\}$. Denotiamo con $\sim$ la relazione d'equivalenza vista nell'Osservazione 1.43 relativa alla valutazione $\nu_k$, in $R = \mathbb{C}(x)[y]$. Allora vale il seguente

**Lemma 2.39.** *Sia $\phi \in D_k$. Se $\psi \sim \phi$ allora $\psi \in D_k$.*

*Dimostrazione.* Sia per assurdo la tesi falsa, ovvero $\nu_k(\psi) = \nu(\psi)$. Per definizione $\psi \sim \phi$ vuol dire che $\nu_k(\phi - \psi) > \nu_k(\phi) = \nu_k(\psi)$. Allora $\nu(\phi) > \nu_k(\phi) = \nu_k(\psi) = \nu(\psi)$, e quindi ricordando la Proposizione 1.31, si ha che $\nu(\phi - \psi) = \nu(\psi) = \nu_k(\psi) < \nu_k(\phi - \psi)$, il che ci da l'assurdo, visto che $\nu \geq \nu_k$. □

Questo lemma ci dice quindi che $\overline{D}_k := \{[\phi] \in R/\sim \mid \nu(\phi) > \nu_k(\phi)\} \cup \{[0]\}$ è ben definito. Inoltre si vede facilmente che $\overline{D}_k$ è chiuso per prodotto, e viceversa, se $[\phi\psi] \in \overline{D}_k$, allora c'è anche almeno uno tra $[\phi]$ e $[\psi]$.

Questo implica che esiste un $U_{k+1}$ tale che la sua classe d'equivalenza in $R/\sim$ sia irriducibile, e $\nu(U_{k+1}) > \nu_k(U_{k+1})$. Dal Corollario 2.36, $U_{k+1}$ è della forma $U_k^{n_k} - \theta_k \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$.

Inoltre se $\nu_k(\phi) = \nu_k(\psi)$, allora si può vedere che se $[\phi], [\psi] \in \overline{D}_k$, allora anche $[\phi]+[\psi] \in \overline{D}_k$. Infatti, ricordiamo che per definizione se $\nu_k(\phi+\psi) > \nu_k(\phi) = \nu_k(\psi)$, allora $[\phi]+[\psi] = [0]$ (e la tesi è banale), altrimenti $[\phi]+[\psi] = [\phi+\psi]$. Supponiamo allora di trovarci in questo secondo caso; allora $\nu(\phi+\psi) \geq \min\{\nu(\phi), \nu(\psi)\} > \min\{\nu_k(\phi), \nu_k(\psi)\} = \nu_k(\phi+\psi)$.

Supponiamo ora che esistano più scelte $\theta_k \neq \tilde{\theta}_k \in \mathbb{C}^*$ per $U_{k+1}$. Allora per quello appena visto, anche $(\theta_k - \tilde{\theta}_k) \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}} \in \overline{D}_k$. Ma questo elemento è un'unità in $\operatorname{gr}_{\nu_k} R$ (grazie al Lemma 2.23): assurdo. Si poteva concludere anche direttamente, notando che

$$\nu\left(\prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}\right) = \sum_{j_0}^{k-1} m_{k,j}\nu(U_j) = \sum_{j_0}^{k-1} m_{k,j}\nu_k(U_j) = \nu_k\left(\prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}\right),$$

dato che per ricorsione abbiamo che $\nu_k(U_j) = \beta_j = \nu(U_j)$.

Quindi abbiamo mostrato il passo ricorsivo per definire la nostra SKP, e come la scelta di $U_{k+1}$ e $\beta_{k+1}$ sia unica.

Questo processo può terminare, e in questo caso abbiamo finito, oppure può continuare all'infinito. In questo caso vogliamo dimostrare che $\nu = \operatorname{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^{\infty}$. Per farlo basta mostrare che per ogni $\phi \in R$, si ha che $\nu_k(\phi) \to \nu(\phi)$ (ricordiamo che comunque $\nu_k(\phi)$ assume valori sempre maggiori (o uguali) al crescere di $k$.

Se $\nu_k(\phi) = \nu(\phi)$ definitivamente, allora non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che $\nu_k(\phi) < \nu(\phi)$ per ogni $k \in \mathbb{N}^*$. per quello visto prima, abbiamo che $[U_{k+1}]$ divide $[\phi]$ in $\operatorname{gr}_{\nu_k} R$, per ogni $k$. In particolare, $\nu_{k+1}(\phi) > \nu_k(\phi)$ per il Teorema 2.13 (Q4), e $\deg_y(\phi) \geq \deg_y(U_{k+1}) = d_{k+1}$. Ne segue che $d_k$ è limitato, e $n_k = 1$ definitivamente. Per il Teorema 2.33, $U_k \to U_\infty$ serie formale in $\mathbb{C}[[x,y]]$, e inoltre $U_\infty$ divide $\phi$ in $\mathbb{C}[[x,y]]$ (altrimenti, sempre per il Teorema 2.33, la successione $\nu_k(\phi)$ sarebbe stazionaria). Ma allora $\nu(\phi) \geq \lim \nu_k(\phi) = \infty$, e quindi $\nu_k(\phi) \to \nu(\phi)$, e la tesi e dimostrata. □

**Osservazione 2.40.** Segue dalla costruzione vista nel Teorema 2.38 che $U_{k+1}$ è l'unico polinomio della forma $U = U_k^{n_k} - \theta \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$ (con $\theta \in \mathbb{C}^*$) tale che $\nu(U) > \nu_k(U)$.

**Definizione 2.41.** Sia $\nu$ una valutazione centrata su $\mathbb{C}[[x,y]]$. Indicheremo con $\operatorname{SKP}(\nu)$ la **SKP associata** a $\nu$, data dal Teorema 2.38.

**Esempio 2.42.** Consideriamo la valutazione della curva $C = \{\phi = 0\}$, con $\phi = y - x - xy$. Volendo calcolare varie molteplicità d'intersezione, come abbiamo visto nell'Osservazione 1.19, è utile trovare una parametrizzazione di $\phi$, rispetto ad $x$ (visto che $\{x=0\}$ è trasversa a $C$). Dato che la molteplicità $m(\phi)=1$, la parametrizzazione sarà della forma $(x,y(x))$. Allora $y-x-xy=0 \leftrightarrow y(1-x)=x$, ovvero $y=\frac{x}{1-x}=\sum_{i=1}^{\infty} x^i$. Allora abbiamo che $\nu_C(\psi)=\phi\cdot\psi$ è dato dal termine di grado minore che compare nella serie formale in $\mathbb{C}[[x]]$ data da $\psi(x,y(x))$.

Cerchiamo allora l'SKP associata a $\nu_C$.

Il passo iniziale è il solito: $U_0=x$, $U_1=y$, mentre $\beta_0:=\nu_C(x)=1$, $\beta_1:=\nu_C(y)=1$, e si ottiene:

| (a) | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\theta_{j-1}$ | $\diagup$ | $\diagup$ |
| $U_j$ | $x$ | $y$ |
| $\beta_j$ | 1 | 1 |
| $n_j$ | $\diagup$ | 1 |
| $m_{j,l}$ | $\diagup$ | 1 |

A questo punto, $\nu_1$ non è altri che la valutazione di molteplicità: ci deve essere un (unico) elemento, della forma $\psi=y-\theta_1 x$ in cui $\nu(\psi)>\nu_C(\psi)=1$. Ricordando la parametrizzazione, questo si ottiene per $\theta_1=1$: $\psi(x,y(x))=y(x)-x=-x+x+x^2+\cdots=\sum_{i=2}^{\infty} x^i$, e quindi $\beta_2:=\nu_C(\psi)=2$, e la SKP si prolunga:

| (b) | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\theta_{j-1}$ | $\diagup$ | $\diagup$ | 1 |
| $U_j$ | $x$ | $y$ | $y-x$ |
| $\beta_j$ | 1 | 1 | 2 |
| $n_j$ | $\diagup$ | 1 | 1 |
| $m_{j,l}$ | $\diagup$ | 1 | $2,0$ |

Ancora non siamo arrivati alla fine, infatti $\nu_2$ non ammette mai il valore $\infty$, mentre $\nu_C$ lo assume in $(\phi)$. Andando avanti così si ottiene una SKP infinita, associata alla valutazione $\nu_C$.

| (c) | 0 | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_{j-1}$ | $\diagup$ | $\diagup$ | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
| $U_j$ | $x$ | $y$ | $y-x$ | $y-x-x^2$ | $\cdots$ | $y-\sum_{i=1}^{n-1} x^i$ | $\cdots$ |
| $\beta_j$ | 1 | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
| $n_j$ | $\diagup$ | 1 | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
| $m_{j,l}$ | $\diagup$ | 1 | $2,0$ | $3,0,0$ | $\cdots$ | $n,0,\dots,0$ | $\cdots$ |

Notiamo che $U_k$ tende in effetti a $U_\infty=y-\frac{x}{1-x}$, che è equivalente (come curva) a $\phi$.

## 2.5 Classificazione e calcolo degli invarianti numerici

Abbiamo finalmente mostrato che ad ogni SKP è associata una e una sola valutazione centrata su $\mathbb{C}[[x,y]]$. Possiamo ora definire i vari tipi di valutazione, a partire dal comportamento delle relative SKP.

**Definizione 2.43.** Sia $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$, con $1 \leq k \leq \infty$, una valutazione centrata su $\mathbb{C}[[x, y]]$. Assumiamo che $\nu$ sia normalizzata (ovvero $\nu(\mathfrak{m}) = \min\{\beta_0, \beta_1\} = 1$). Allora diremo che $\nu$ è

(i) **monomiale** (nelle coordinate $(x, y)$) se $k = 1$, e $\beta_0, \beta_1 < \infty$;

(ii) **quasimonomiale** se $k < \infty$, e $\beta_0, \beta_k < \infty$;

(iii) **divisoriale** se è quasimonomiale, e $\beta_0, \beta_k \in \mathbb{Q}$;

(iv) **irrazionale** se è quasimonomiale ma non divisoriale, ovvero se $\beta_k \notin \mathbb{Q}$ o $\beta_k \notin \mathbb{Q}$;

(v) **infinitamente singolare** se $k = \infty$, e $d_j \to \infty$, o analogamente $n_j \geq 2$ frequentemente;

(vi) **di curve** se $k = \infty$, e $d_j = d < \infty$, o equivalentemente $n_j = 1$, definitivamente, oppure se $k < \infty$, e $\beta_0$ o $\beta_k$ sono $\infty$.

Se $\nu$ non è normalizzata, allora il tipo di $\nu$ è definito come il tipo della sua normalizzazione $\nu/\nu(\mathfrak{m})$.

Quello che cercheremo di fare ora è calcolare il (semi)gruppo dei valori e il campo residuo di una generica valutazione $\nu$, a partire dall'SKP associata, grazie allo studio di $\mathrm{gr}_\nu \mathbb{C}(x)[y]$ che abbiamo svolto nelle sezioni precedenti.

**Teorema 2.44.** *Sia $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)$ una valutazione associata ad una certa SKP di lunghezza k finita o infinita (o meglio la valutazione di Krull ad essa associata). Scriviamo $R = \mathbb{C}[[x, y]]$, $K = \mathbb{C}((x, y))$, in modo che $\nu(R^*)$ e $\nu(K^*)$ siano il semigruppo e il gruppo dei valori di $\nu$. Allora $\nu$ è una valutazione:*

*(i) divisoriale se e solo se* $\mathrm{rk}(\nu) = \mathrm{ratrk}(\nu) = \mathrm{trdeg}(\nu) = 1$, *e* $\nu(K^*) = \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbb{Z}$;

*(ii) irrazionale se e solo se* $\mathrm{rk}(\nu) = 1$, $\mathrm{ratrk}(\nu) = 2$ *e* $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$, *e* $\nu(K^*) = \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbb{Z}$;

*(iii) infinitamente singolare se e solo se* $\mathrm{rk}(\nu) = \mathrm{ratrk}(\nu) = 1$ *e* $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$, *e* $\nu(K^*) = \sum_{j=0}^\infty \beta_j \mathbb{Z}$;

*(iv) di curve se e solo se* $\mathrm{rk}(\nu) = \mathrm{ratrk}(\nu) = 2$ *e* $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$; *inoltre* $\nu(K^*) = \mathbb{Z} \times \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \mathbb{Z}$ *se* $k < \infty$ *e* $\beta_k = \infty$, $\nu(K^*) = \mathbb{Z} \times \beta_1 \mathbb{Z}$ *se* $k = 1$ *e* $\beta_0 = \infty$, $\nu(K^*) = \mathbb{Z} \times \sum_{j=0}^\infty \beta_j \mathbb{Z}$ *se* $k = \infty$.

*Con* $\sum_{j=0}^\infty \beta_j \mathbb{Z}$ *si intendono combinazioni lineari finite dei* $\beta_j$ *a coefficienti in* $\mathbb{Z}$.

*Dimostrazione.* Procediamo prima col calcolo del gruppo dei valori. Se abbiamo una SKP di lunghezza $k$ finita, con i $\beta_j$ tutti finiti, ovvero se $\nu$ è quasimonomiale, possiamo procedere per induzione, e ottenere direttamente dalla definizione (2.6) la tesi. Nel caso invece $\beta_k$ o $\beta_0$ sia infinito, e quindi $\nu$ è una valutazione di curve, sempre dalla definizione (2.6) si ottiene che $\nu(\phi)$ vale o $\infty$ (se $U_k$ divide $\phi$), oppure prende i valori di $\nu_{k-1}$, e quindi di nuovo si ottiene la tesi.

Se invece $k = \infty$, nel caso di una valutazione infinitamente singolare, dal Teorema 2.33 si ottiene che $\nu(\phi) = \nu_j(\phi)$ definitivamente, e quindi si ottiene la tesi; nel caso di una valutazione di curve invece, sempre dal Teorema 2.33 che se $\nu(\phi) < \infty$, allora ancora una volta $\nu(\phi) = \nu_j(\phi)$ definitivamente. Invece $\nu(\phi) = \infty$ se e solo se $U_\infty$ divide $\phi$. Ricordando la definizione della valutazione di Krull associata ad una valutazione, si ottiene la tesi anche in quest'ultimo caso.

Dal gruppo dei valori si deducono direttamente $\mathrm{rk}(\nu)$ e $\mathrm{ratrk}(\nu)$. Rimane da calcolare $\mathrm{trdeg}(\nu)$, e per farlo calcoleremo $k_\nu$ il campo dei residui. Direttamente dalla definizione si ha che $k_\nu = \{\nu \geq 0\}/\{\nu > 0\}$, ovvero non è altro che il campo degli elementi in $K/\sim$ la cui valutazione è nulla; con $\sim$ indichiamo la relazione d'equivalenza dell'Osservazione 1.43 (o dell'Osservazione 1.47 nel caso di una valutazione di curve). Ma gli elementi di $\mathbb{C}((x,y))/\sim$ a valutazione nulla non sono altro che il rapporto di elementi di $\mathbb{C}[[x,y]]/\sim$ che abbiano la stessa valutazione.

Consideriamo allora due elementi $[\phi]$ e $[\psi]$, vedendo quando $\nu$ assume lo stesso valore su di loro.

Supponiamo dapprima $k < \infty$. Utilizziamo allora i risultati del Teorema 2.35. Se $n_k = \infty$ allora dalla (2.14) abbiamo che $\phi \sim \alpha \prod_{j=0}^k U_j^{i_j}$, la cui valutazione è $\sum_{j=0}^k i_j \beta_j$. Scriviamo poi $\psi \sim \gamma \prod_{j=0}^k U_j^{h_j}$. Allora $\nu(\phi) = \nu(\psi)$ se e solo se $i_j = h_j$ per ogni $j$, direttamente dalla definizione di $n_k$ che è uguale a $\infty$ (è un argomento analogo a quello utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 2.2). Dunque un generico elemento di $k_\nu$ è della forma $[\phi/\psi]$ con $\nu(\phi) = \nu(\psi)$, e in questo caso abbiamo che $\phi/\psi \sim \alpha/\gamma \in \mathbb{C}^*$. Dunque $k_\nu \cong \mathbb{C}$, e $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$ in questo caso (ovvero per le valutazioni irrazionali e per quelle di curve con SKP finita).

Se invece $n_k < \infty$ (cioè siamo nel caso di una valutazione divisoriale), allora dalla (2.15) abbiamo $\phi \sim p(T) \prod_{j=0}^k U_j^{i_j}$, con $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j < k$, e $i_0, i_k \geq 0$, e analogamente $\psi \sim q(T) \prod_{j=0}^k U_j^{h_j}$, con $p, q \in \mathbb{C}[T]$ polinomi in $T$. Anche qui si ottiene che $\nu(\phi) = \nu(\psi)$ se e solo se $i_j = h_j$ per ogni $j$. In particolare $\phi/\psi \sim p(T)/q(T)$, e $k_\nu \cong \mathbb{C}(T)$, e $\mathrm{trdeg}(\nu) = 1$.

Studiamo ora il caso di una SKP infinita, e utilizziamo i risultati del Teorema 2.37. Se $n_j \geq 2$ frequentemente, ovvero se siamo nel caso di una valutazione infinitamente singolare, dalla (2.16) abbiamo che $\phi \sim \alpha \prod_{j=0}^k U_j^{i_j}$ per un certo $k < \infty$, con $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j \leq k$, e $i_0 \geq 0$. Analogamente $\psi \sim \gamma \prod_{j=0}^k U_j^{h_j}$ (possiamo prendere lo stesso $k$, basta prendere il maggiore dei due). Ancora una volta $\nu(\phi) = \nu(\psi)$ se e solo se $i_j = h_j$ per ogni $j$, e se ne deduce che $\phi/\psi \sim \alpha/\gamma \in \mathbb{C}^*$, $k_\nu \cong \mathbb{C}$ e ancora $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$.

Infine se $n_j = 1$ definitivamente, e quindi siamo nel caso di $\nu$ valutazione di curve, dalla (2.16) abbiamo che $\phi \sim \alpha U_\infty^{i_\infty} \prod_{j=0}^k U_j^{i_j}$ per un certo $k < \infty$, con $0 \leq i_j < n_j$ per $1 \leq j \leq k$, $i_0, i_\infty \geq 0$. Analogamente $\psi \sim \gamma U_\infty^{h_\infty} \prod_{j=0}^k U_j^{h_j}$. Di nuovo $\nu(\phi) = \nu(\psi)$ se e solo se $i_j = h_j$ per ogni $j \leq \infty$ (con $\nu$ intendiamo ora la valutazione di Krull associata, a valori in $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$). Dunque $\phi/\psi \sim \alpha/\gamma \in \mathbb{C}^*$, $k_\nu \cong \mathbb{C}$ e $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$.

Osserviamo che essendo le terne diverse a seconda dei tipi delle valutazioni, questi invarianti numerici caratterizzano i quattro tipi descritti. $\square$

**Osservazione 2.45.** Con il Teorema 2.44 abbiamo mostrato come, scelte delle coordinate locali $(x, y)$, diversi tipi di valutazioni abbiano diversi invarianti numerici, che sono indipendenti dalla scelta delle coordinate. Questo ci dice che la definizione di valutazione divisoriale, irrazionale, infinitamente singolare e di curve a partire dal comportamento della SKP è indipendente dalla scelta delle coordinate locali.

## 2.6 Calcolo esplicito sugli irriducibili

Concludiamo questo capitolo mostrando un modo per calcolare il valore di una valutazione $\nu$ su un elemento $\phi$ irriducibile, a partire dalle SKP.

**Definizione 2.46.** Sia $\nu, \mu \in \mathcal{V}$, Scriviamo $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)$ e $\mu = \mathrm{val}(V_j, \alpha_j)$. Supponiamo $\nu \neq \mu$ Definiamo allora l'**ordine di contatto** tra $\nu$ e $\mu$ come

$$\mathrm{con}(\nu, \mu) = \max\{j \mid U_j = V_j\} \in \mathbb{N}^*.$$

Sia ora $\nu \in \mathcal{V}$, $\phi$ un elemento irriducibile di $\mathbb{C}[[x, y]]$, e indichiamo con $\nu_\phi$ la valutazione della curva $\phi$. Scriviamo le due valutazioni in termini delle SKP: $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)$ e $\nu_\phi = \mathrm{val}(U_j^\phi, \beta_j^\phi)_{j=0}^h$ ($h$ può essere finito e infinito). Denotiamo inoltre con $n_j^\phi$ i valori definiti da (2.1) relativi a $\nu_\phi$, mentre per ogni $k$ tale che $1 \leq k < h$ definiamo $\gamma_k^\phi := \prod_{k \leq j < h} n_j^\phi \in \mathbb{N}^*$, e $\gamma_h = 1$ se $h < \infty$. Possiamo allora scrivere da questi dati il valore di $\nu(\phi)$.

**Proposizione 2.47.** *Se $\phi = ux$ (con $u \in \mathbb{C}[[x, y]]$ è unità), allora $\nu(\phi) = \beta_0$. Altrimenti*

$$\nu(\phi) = \frac{\gamma_k^\phi}{\beta_0^\phi} \min\{\beta_k, \beta_k^\phi\} \min\{\beta_0, \beta_0^\phi\}, \tag{2.18}$$

*con $k = \mathrm{con}(\nu, \nu_\phi)$.*

Per la dimostrazione, si veda [FJ1, Proposition 2.33].

Quando nel terzo capitolo definiremo la distorsione, saremo interessati a calcolare $\nu(\phi)/m(\phi)$, con $m$ la molteplicità. Grazie alla proposizione precedente otteniamo facilmente il seguente risultato.

**Corollario 2.48.** *Nelle solite ipotesi, se $\phi = ux$ (con $u \in \mathbb{C}[[x,y]]$ è unità), allora $\nu(\phi) = \beta_0$. Altrimenti*

$$\frac{\nu(\phi)}{m(\phi)} = d_k^{-1} \min\{\beta_k, \beta_k^\phi\} \min\{\beta_0, \beta_0^\phi\}, \tag{2.19}$$

*con $k = \operatorname{con}(\nu, \nu_\phi)$ e $d_k = \deg_y(U_k)$.*

*Dimostrazione.* Applichiamo la Proposizione 2.47 per $\nu_{\mathfrak{m}}$: $\operatorname{con}(\nu_{\mathfrak{m}}, \nu_\phi) = 1$, mentre $\beta_0 = \beta_1 = 1$, e quindi $m(\phi) = \gamma_1^\phi/\beta_0^\phi$. Applicando la Proposizione 2.47 anche a $\nu$, si ottiene la tesi, ricordando che $\gamma_1/\gamma_k = \prod_{j=1}^{k-1} n_j^\phi = \prod_{j=1}^{k-1} n_j = d_k$ (per definizione di ordine di contatto). $\square$

# Capitolo 3

# L'albero delle valutazioni

## 3.1 Strutture ad albero

### 3.1.1 Alberi non metrici con radice

**Definizione 3.1.** Consideriamo un insieme parzialmente ordinato, o **poset**, che denotiamo con $(\mathcal{T}, \leq)$. Diremo che un sottoinsieme totalmente ordinato $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ è detto **pieno** se per ogni $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}$ e $\tau \in \mathcal{T}$ tale che $\sigma_1 \leq \tau \leq \sigma_2$ allora $\tau \in \mathcal{S}$.

**Definizione 3.2.** Un **albero non metrico con radice** è un poset $(\mathcal{T}, \leq)$ tale che:

(T1) $\mathcal{T}$ ha un unico elemento minimale $\tau_0$, detta la **radice** di $\mathcal{T}$;

(T2) se $\tau \in \mathcal{T}$, allora l'insieme $\{\sigma \in \mathcal{T} \mid \sigma \leq \tau\}$ è isomorfo (come insieme ordinato) ad un intervallo di $\mathbb{R}$;

(T3) ogni sottoinsieme totalmente ordinato e pieno di $\mathcal{T}$ è isomorfo (come insieme ordinato) ad un intervallo di $\mathbb{R}$.

**Osservazione 3.3.** Possiamo definire analogamente alberi modellati su un qualsiasi insieme totalmente ordinato $\Lambda$, sostituendo $\Lambda$ a $\mathbb{R}$, e ottenendo il concetto di **$\Lambda$-albero** (non metrico con radice).

**Proposizione 3.4.** *Sia $(\mathcal{T}, \leq)$ un poset tale che valgano (T1) e (T2). Allora vale (T3) se e solo se vale:*

*(T4) se $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{T}$, senza maggioranti in $\mathcal{T}$, allora esiste una successione (numerabile) crescente in $\mathcal{S}$, senza maggioranti in $\mathcal{T}$.*

*Dimostrazione.* Mostriamo le due implicazioni.

Supponiamo prima che valgano (T1), (T2) e (T3), e dimostriamo che vale anche (T4). Sia allora $\mathcal{S}$ un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{T}$, senza maggioranti in $\mathcal{T}$. Definisco:

$$\mathcal{S}' := \{\tau \in \mathcal{T} \mid \exists\ \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S} \text{ tale che } \sigma_1 \leq \tau \leq \sigma_2\}.$$

Dimostriamo che $\mathcal{S}'$ è un sottoinsieme totalmente ordinato e pieno di $\mathcal{T}$. Siano allora $\tau_1 \leq \tau_2 \in \mathcal{S}'$; quindi esistono $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \in \mathcal{S}$ tali che $\sigma_1 \leq \tau_1 \leq \sigma_2$ e $\sigma_3 \leq \tau_2 \leq \sigma_4$. $\mathcal{S}$ è totalmente ordinato, quindi esiste il massimo tra $\sigma_2$ e $\sigma_4$, che chiamo $\sigma$. Consideriamo $\mathcal{T}_\sigma = \{\tau \in \mathcal{T} \mid (\tau_0 \leq)\ \tau \leq \sigma\}$. Per (T2) $\mathcal{T}_\sigma$ è isomorfo ad un'intervallo reale; in particolare è totalmente ordinato. Ma $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_\sigma$, e quindi sono uno maggiore o uguale all'altro, e anche $\mathcal{S}'$ è totalmente ordinato. Se poi $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, allora $\sigma_1 \leq \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \leq \sigma_4$, e dunque $\tau \in \mathcal{S}'$, e $\mathcal{S}'$ è pieno. Per (T3) si ha che $\mathcal{S}'$ è isomorfo ad un intervallo reale. Questo intervallo non ha un massimo, altrimenti $\mathcal{S}$ avrebbe un maggiorante. Prendiamo allora una successione crescente $(\tau_n)$ in $\mathcal{S}'$, che tende all'estremo superiore. Per ogni $n$, dalla definizione di $\mathcal{S}'$, abbiamo che esiste $\sigma_n \in \mathcal{S}$ tale che $\tau_n \geq \sigma_n$. A meno di sottosuccessione possiamo scegliere i $\sigma_n$ crescenti ($\{\sigma_n\}$ è un insieme infinito, altrimenti $(\tau_n)$ sarebbe limitata). Allora $(\sigma_n)$ è una successione crescente in $\mathcal{S}$, senza maggioranti in $\mathcal{T}$ (se ne avesse, ne avrebbe anche tutto $\mathcal{S}$).

Viceversa supponiamo che valgano (T1), (T2) e (T4), e dimostriamo che vale anche (T3). Sia quindi $\mathcal{S}$ un sottoinsieme totalmente ordinato e pieno di $\mathcal{T}$. Supponiamo dapprima che $\mathcal{S}$ ammetta un maggiorante $\sigma$ in $\mathcal{T}$; in questo caso $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_\sigma = \{\tau \in \mathcal{T} \mid (\tau_0 \leq)\ \tau \leq \sigma\}$. Per (T2) $\mathcal{T}_\sigma$ è isomorfo ad un'intervallo reale, e $\mathcal{S}$ è isomorfo a un suo sottoinsieme pieno, e quindi ad un'intervallo. Supponiamo allora che $\mathcal{S}$ non ammetta maggioranti in $\mathcal{T}$. Allora per (T4) esiste una successione crescente $(\sigma_n)$ in $\mathcal{S}$ senza maggioranti in $\mathcal{T}$. Per ogni $\sigma \in \mathcal{S}$, indichiamo con $\mathcal{S}_\sigma := \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_\sigma = \{\tau \in \mathcal{S} \mid \tau \leq \sigma\}$. Allora si ha che

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\sigma_0} \cup \bigcup_n \{\tau \in \mathcal{T} \mid \sigma_n \leq \tau \leq \sigma_{n+1}\}.$$

Infatti banalmente vale il $\supseteq$, mentre se $\sigma \in \mathcal{S}$, allora esiste un $n$ tale che $\sigma \leq \sigma_n$ (altrimenti $\sigma$ sarebbe un maggiorante per $(\sigma_n)$), e quindi si ottiene anche il $\subseteq$. Ma $\mathcal{S}_{\sigma_0}$ è isomorfo ad un intervallo reale, per quello che abbiamo visto prima; inoltre ha come massimo $\sigma_0$ in $\mathcal{S}$, e quindi l'intervallo a cui è isomorfo ha l'estremo superiore, che possiamo supporre essere 0. Per lo stesso motivo, $\{\sigma_n \leq \tau \leq \sigma_{n+1}\}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato pieno con maggiorante $\sigma_{n+1}$ (e quindi possiamo applicare quello che abbiamo visto in questo caso), e con minorante $\sigma_n$; quindi è isomorfo ad un'intervallo reale chiuso, che possiamo supporre essere $[n, n+1]$. Incollando i vari isomorfismi, si ottiene un isomorfismo tra $\mathcal{S}$ e un intervallo reale (illimitato a destra). $\square$

**Definizione 3.5.** Sia $\mathcal{T}$ un albero non metrico con radice. Segue dalla completezza di $\mathbb{R}$ che ogni sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ ammette un estremo inferiore, denotato con $\bigwedge_{\sigma \in \mathcal{S}} \sigma$. Infatti, $\{\tau \in \mathcal{T} \mid \tau \leq \sigma \forall \sigma \in \mathcal{S}\}$ è isomorfo all'intersezione di intervalli reali chiusi con estremo sinistro comune, e quindi ammette un massimo.

**Definizione 3.6.** Sia $\mathcal{T}$ un albero non metrico con radice, e $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ due punti. Allora denotiamo con $[\tau_1, \tau_2]$ l'insieme

$$[\tau_1, \tau_2] := \{\tau \in \mathcal{T} \mid \tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau \leq \tau_1 \text{ o } \tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau \leq \tau_2\},$$

che chiamiamo **segmento** di **estremi** $\tau_1$ e $\tau_2$. Definiamo analogamente $[\tau_1, \tau_2) := [\tau_1, \tau_2] \setminus \{\tau_2\}$, $(\tau_1, \tau_2] := [\tau_1, \tau_2] \setminus \{\tau_1\}$ e $(\tau_1, \tau_2) := [\tau_1, \tau_2] \setminus \{\tau_1, \tau_2\}$.

**Osservazione 3.7.** Un segmento non dipende dall'ordine degli estremi: $[\tau_1, \tau_2] = [\tau_2, \tau_1]$, e analogamente per gli intervalli senza uno o due estremi. Inoltre se $\tau_0$ è la radice di $\mathcal{T}$, allora il segmento $[\tau_0, \tau]$ è totalmente ordinato (è isomorfo ad un intervallo reale grazie a (T2)).

**Definizione 3.8.** Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ due alberi non metrici con radici $\sigma_0$ e $\tau_0$ rispettivamente. Allora una funzione $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ è un **morfismo** di alberi non metrici (con radice), se per ogni $\sigma \in \mathcal{S}$, la funzione $\Phi$ dà un morfismo (come insieme ordinato) bigettivo tra $[\sigma_0, \sigma]$ e $[\tau_0, \Phi(\sigma)]$. Se $\Phi$ inoltre è una bigezione, allora è detta un **isomorfismo** di alberi non metrici (con radice), e $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono detti **isomorfi**.

**Definizione 3.9.** Un **sottoalbero** di un albero non metrico con radice $(\mathcal{T}, \leq)$ è un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ tale che se $\sigma \in \mathcal{S}$ e $\tau \in \mathcal{T}$ tale che $\tau \leq \sigma$ allora anche $\tau \in \mathcal{S}$. Chiaramente allora $(\mathcal{S}, \leq)$ è un albero non metrico con radice $\tau_0$. Diremo che $\mathcal{S}$ è un sottoalbero **finito** (risp. **numerabile**) se $\mathcal{S}$ è unione finita (risp. numerabile) di segmenti.

**Definizione 3.10.** Sia $\mathcal{S}$ un poset, e $\mathcal{T}$ un ($\Lambda$-)albero non metrico con radice. $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ è un'**immersione d'albero** se $\Phi(s_1) < \Phi(s_2)$ se e solo se $s_1 < s_2$.

**Definizione 3.11.** Un albero non metrico con radice $\mathcal{T}$ è detto **completo** se ogni successione crescente $(\tau_j)_{j \geq 1}$ in $\mathcal{T}$ ha un maggiorante in $\mathcal{T}$, ovvero un elemento $\tau_\infty \in \mathcal{T}$ tale che $\tau_j \leq \tau_\infty$ per ogni $j$.

Grazie a (T3), ogni albero non metrico con radice ammette un **completamento** $\overline{\mathcal{T}}$, aggiungendo punti corrispondenti alle successioni crescenti senza maggiorante in $\mathcal{T}$. Un elemento massimale di $\overline{\mathcal{T}}$ è detto **fine**. Quindi tutti gli elementi di $\overline{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}$ sono fini. Denoteremo con $\mathcal{T}^\circ$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{T}$ che non sono fini. $\mathcal{T}^\circ$ forma un sottoalbero di $\mathcal{T}$.

**Definizione 3.12.** Sia $\mathcal{T}$ un albero non metrico con radice e $\tau$ un suo punto. Definiamo una relazione d'equivalenza su $\mathcal{T} \setminus \{\tau\}$, ponendo $\sigma_1$ e $\sigma_2$ in $\mathcal{T} \setminus \{\tau\}$ equivalenti se e solo se $(\tau, \sigma_1] \cap (\tau, \sigma_2] \neq \emptyset$. Una classe d'equivalenza è detta **vettore tangente** a $\tau$, e l'insieme dei vettori tangenti in $\tau$ è denotato con $T_\tau\mathcal{T}$.

**Definizione 3.13.** Sia $\mathcal{T}$ un albero non metrico con radice. Un punto in $\mathcal{T}$ si dice **terminazione**, **regolare**, o **di diramazione** se il suo spazio tangente ha uno, due, o più di due elementi rispettivamente.

**Osservazione 3.14.** Il concetto di fine e quello di terminazione sono fortemente correlati. Infatti se $\tau \in \mathcal{T}$ è una fine di un albero non metrico con radice $\tau_0$, allora il suo spazio tangente è formato da un solo elemento, e quindi $\tau$ è anche una terminazione: infatti non esistono elementi di $\mathcal{T} \setminus \{\tau\}$ maggiori di $\tau$; preso un $\sigma \neq \tau$, ho che $\sigma \wedge \tau < \tau$; per (T2) si ha che $\{\sigma < \tau\}$ è isomorfo ad un intervallo reale, in particolare è totalmente ordinato. Ne segue che dati due punti $\sigma_1$ e $\sigma_2$ diversi da $\tau$, è ben definito il massimo tra $\sigma_1 \wedge \tau$ e $\sigma_2 \wedge \tau$, che denotiamo con $\sigma$, e risulta strettamente minore di $\tau$; ne segue che gli intervalli $[\sigma_1, \tau)$ e $[\sigma_2, \tau)$ si intersecano in $[\sigma, \tau)$, e quindi rappresentano lo stesso vettore tangente.

Viceversa ogni terminazione è una fine, a meno che la radice stessa non sia una terminazione: infatti se $\tau$ è una terminazione, allora, avendo un solo elemento nel tangente, o sono punti minimali o punti massimali dell'albero con radice, che per (T1) ha un solo punto minimale, che è la radice stessa.

In particolare, se la radice non è una terminazione, allora terminazioni e fini coincidono.

Spesso confonderemo i due concetti di terminazione e fine, visto che gli alberi che vedremo hanno tutti come radice un punto di diramazione.

### 3.1.2 Alberi parametrizzati

**Definizione 3.15.** Una **parametrizzazione** di un albero non metrico con radice $(\mathcal{T}, \leq)$ è una funzione crescente $\alpha : \mathcal{T} \to [-\infty, +\infty]$ la cui restrizione ad ogni sottoinsieme totalmente ordinato e pieno sia una bigezione con un intervallo di $[-\infty, +\infty]$. Un albero non metrico con radice si dice **parametrizzabile** se ammette una parametrizzazione. Una volta scelta una parametrizzazione $\alpha$, l'albero $(\mathcal{T}, \leq, \alpha)$ è detto **albero parametrizzato**

**Osservazione 3.16.** A meno di comporre con una funzione crescente da $[-\infty, +\infty]$ in se (ad esempio la funzione arctg), si può supporre che la parametrizzazione sia a valori in $[0, +\infty]$ o $[0, 1]$.

**Osservazione 3.17.** Si vede facilmente che un albero non metrico con radice è parametrizzabile se e solo se lo è il suo completamento.

**Definizione 3.18.** Un **morfismo** tra due alberi parametrizzati $(\mathcal{T}_1, \leq_1, \alpha_1)$ e $(\mathcal{T}_2, \leq_2, \alpha_2)$ è un morfismo $\Phi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ tra i relativi alberi non metrici con radice, e tale che $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \Phi$. Se inoltre $\Phi$ è bigettivo, allora è detto **isomorfismo** tra i due alberi parametrizzati, che sono detti **isomorfi**. Ovviamente due alberi parametrizzati isomorfi lo sono anche semplicemente come alberi non metrici con radice.

**Esempio 3.19.** Fissiamo un insieme $X$, e consideriamo $\mathcal{T} = X \times [0,\infty)/X \times \{0\}$. Allora $\mathcal{T}$ ammette una struttura di albero non metrico con radice in $X \times \{0\}$, se dotato dell'ordine parziale $(x,s) \leq (y,t)$ se e solo se $s = t = 0$, o $x = y$ e $s \leq t$. Data una funzione $g : X \to (0,\infty)$, possiamo definire una parametrizzazione $\alpha_g : \mathcal{T} \to [0,\infty)$ fissando $\alpha_g(x,s) := g(x)s$. Tutte queste parametrizzazioni sono equivalenti, come si vede dall'isomorfismo $\Phi_f(x,s) := (x, f(x)s)$, con $f = g/h$.

### 3.1.3 La topologia debole

Definiamo su un albero non metrico (con radice) una topologia.

**Definizione 3.20.** Sia $\mathcal{T}$ un albero non metrico (con radice). Dato un punto $\tau \in \mathcal{T}$, e un vettore tangente $\overrightarrow{v} \in T_\tau\mathcal{T}$, si definisce

$$U_\tau(\overrightarrow{v}) := \{\sigma \in \mathcal{T} \mid \sigma \text{ rappresenta } \overrightarrow{v}\}. \tag{3.1}$$

Allora gli insiemi $U_\tau(\overrightarrow{v})$ al variare di $\tau \in \mathcal{T}$ e $\overrightarrow{v} \in T_\tau\mathcal{T}$ formano la prebase di una topologia, detta **topologia debole** su $\mathcal{T}$.

**Osservazione 3.21.** Si vede facilmente che la topologia debole è di Hausdorff. Inoltre ogni sottoalbero completo $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ è chiuso per la topologia debole, e l'inclusione $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ risulta continua e omeomorfismo locale. In particolare ogni segmento $\gamma = [\tau_1, \tau_2]$ in $\mathcal{T}$ è chiuso, e la topologia indotta su $\gamma$ dalla topologia debole di $\mathcal{T}$ coincide con la topologia standard di $[0,1]$ (una volta identificato $\gamma$ con $[0,1]$).

**Proposizione 3.22.** *Se $\alpha : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ è una parametrizzazione di un albero non metrico con radice, allora $\alpha$ è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole di $\mathcal{T}$.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo mostrare che l'insieme $\mathcal{T}_t = \{\tau \mid \alpha(\tau) > t\}$ è aperto per ogni $t$. Consideriamo $t$ tale che $\mathcal{T}_t$ non sia vuoto (altrimenti è ovvio), e sia $\tau \in \mathcal{T}_t$. in particolare $\alpha(\tau) > t$. Sia allora $\sigma < \tau$, tale che $t \leq \alpha(\sigma) < \alpha(\tau)$, e sia $\overrightarrow{v} \in T_\sigma\mathcal{T}$ il vettore tangente in $\sigma$ rappresentato da $\tau$. Allora per crescenza $\alpha > t$ su $U_\sigma(\overrightarrow{v})$, che risulta essere un intorno aperto di $\tau$ in $\mathcal{T}_t$. □

**Osservazione 3.23.** Consideriamo $\mathcal{T}$ un albero non metrico con radice $\tau_0$. Ad ogni segmento $I = [\tau_1, \tau_2]$ con $\tau_1 \leq \tau_2$ è associata una **retrazione** $\pi_I : \mathcal{T} \to I$: se $\tau \in \mathcal{T}$, definiamo $\pi_I(\sigma)$ come l'elemento massimo di $I \cap [\tau_0, \sigma]$, se questo insieme è non vuoto, e come $\tau_1$ altrimenti. In altri termini:

$$\pi_I(\sigma) = \begin{cases} \sigma \wedge \tau_2 & \text{se } \sigma(\wedge\tau_2) \geq \tau_1 \ , \\ \tau_1 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Allora $\pi_I$ è surgettiva per ogni $I$, e $\pi_I|_I = \mathrm{id}_I$.

**Proposizione 3.24.** *La topologia debole di $\mathcal{T}$ è la topologia più debole per cui $\pi_I$ è continua per ogni segmento $I$.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo innanzitutto che $\pi_I$ è (debolmente) continua per ogni $I = [\tau_1, \tau_2]$. Per farlo basta considerare un aperto $U$ di $I$, e vedere che la sua controimmagine tramite $\pi_I$ è un aperto di $\mathcal{T}$. Possiamo limitarci a supporre $U$ un elemento di una prebase per $I$: $U = [\tau_1, \tau)$ o $U = (\tau, \tau_2]$, con $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Supponiamo di essere nel primo caso, con $\tau > \tau_1$ (altrimenti $U = \emptyset$). Allora $\pi_I^{-1}(U) = \{\sigma \mid \sigma \wedge \tau_2 < \tau\}$. Ma $\sigma \wedge \tau_2 < \tau$ se e solo se $\sigma$ rappresenta lo stesso vettore tangente della radice $\tau_1$ in $\tau$, e quindi $\pi_I^{-1}(U) = U_\tau([\tau_1])$, ed è quindi aperto.

Analogamente nel secondo caso ($\tau < \tau_2$, altrimenti $U = \emptyset$), $\pi_I^{-1}(U) = \{\sigma \mid \sigma \wedge \tau_2 > \tau\} = U_\tau([\tau_2])$ è di nuovo un aperto.

D'altro canto se supponiamo che $\pi_I$ sia continua per ogni $I$ per una certa topologia, allora per ogni $\tau_1 < \tau < \tau_2$, si ha che $U_\tau([\tau_1])$ e $U_\tau([\tau_2])$ devono essere aperti. Dunque questa topologia contiene quella debole, e la tesi è dimostrata. $\square$

Più avanti avremo bisogno di una retrazione su un sottoalbero $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ che sia completo; diamone ora la costruzione.

**Definizione 3.25.** Sia $\mathcal{S}$ un sottoalbero completo di $\mathcal{T}$ albero non metrico con radice $\tau_0$. Per ogni $\tau \in \mathcal{T}$ consideriamo il segmento $[\tau_0, \tau]$. Allora $[\tau_0, \tau] \cap \mathcal{S} = [\tau_0, \sigma_\tau]$ per un (unico) $\sigma_\tau \in \mathcal{S}$ (segue direttamente dalle proprietà di sottoalbero e di completezza). Definiamo allora $\pi_\mathcal{S} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$, ponendo $\pi_\mathcal{S}(\tau) := \sigma_\tau$. La $\pi_\mathcal{S}$ è detta **retrazione** sul sottoalbero $\mathcal{S}$.

### 3.1.4 Alberi simpliciali ed $\mathbb{N}$-alberi

**Definizione 3.26.** Un **albero simpliciale** è una coppia $(V, E)$, con $V$ un insieme di **vertici**, ed $E$ un insieme di sottoinsiemi di $V$ di cardinalità 2 (che identificano un **arco**), tali che per ogni $\sigma, \tau \in V$ distinti esiste un'unica successione $(\sigma_i)_{i=0}^n$, con $\sigma_0 = \sigma$ e $\sigma_n = \tau$, di vertici distinti e tali che $\{\sigma_{i-1}, \sigma_i\} \in E$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Scriviamo $[\sigma, \tau] := \{\sigma_i\}_{i=0}^n$ il **segmento** tra $\sigma$ e $\tau$.

Un **albero simpliciale con radice** è una tripla $(V, E, \tau_0)$, con $(V, E)$ un albero simpliciale e $\tau_0$ un vertice fissato, detto **radice**.

**Osservazione 3.27.** Se $(V, E, \tau_0)$ è un albero simpliciale con radice, allora possiamo definire su $V$ un ordine parziale, dichiarando che $\tau_1 \leq \tau_2$ se e solo se $[\tau_0, \tau_1] \subseteq [\tau_0, \tau_2]$. Allora segue banalmente che $(V, \leq)$ è un $\mathbb{N}$-albero non metrico con radice $(\tau_0)$.

Viceversa, sia $(\mathcal{T}, \leq)$ un $\mathbb{N}$-albero non metrico con radice $(\tau_0)$, e mostriamo come si possa associare un albero simpliciale con radice $(V, E, \tau_0)$. Si fissa $V = \mathcal{T}$, mentre $\{\tau_1, \tau_2\} \in E$ se e solo se $[\tau_1, \tau_2]$ contiene esattamente 2 elementi. Si verifica facilmente che $(V, E, \tau_0)$ è effettivamente un albero simpliciale con radice; abbiamo dunque dimostrato l'equivalenza tra gli $\mathbb{N}$-alberi non metrici con radice e gli alberi simpliciali con radice.

### 3.1.5 Dai $\mathbb{Q}$-alberi agli $\mathbb{R}$-alberi

Mostriamo ora un modo naturale per passare dai $\mathbb{Q}$-alberi agli $\mathbb{R}$-alberi, in un certo senso aggiungendo i punti irrazionali. Prima però un utile lemma per caratterizzare gli intervalli di $\mathbb{Q}$.

**Lemma 3.28.** *Un insieme totalmente ordinato $\Lambda$ è isomorfo ad un intervallo in $\mathbb{Q}$ se e solo se $\Lambda$ è numerabile e non ha salti, nel senso che se $\lambda_1 < \lambda_2$ sono elementi di $\Lambda$, allora esiste un $\lambda \in \Lambda$ tale che $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.*

*Dimostrazione.* Ovviamente un intervallo di $\mathbb{Q}$ ha la proprietà richiesta. Mostriamo il viceversa.

Fissiamo allora un insieme totalmente ordinato e numerabile $\Lambda$, senza salti. Possiamo supporre senza ledere la generalità che $\Lambda$ abbia estremi superiore ed inferiore.

Numeriamo allora gli elementi di $\Lambda$: scriviamo $\Lambda = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo allora per ricorsione un isomorfismo di insiemi ordinati $\chi : \Lambda \to [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Possiamo supporre a meno di riordinare che $\lambda_0$ e $\lambda_1$ siano il minimo e il massimo in $\Lambda$. Consideriamo su $I := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ due ordini totali: quello indotto da $\mathbb{Q}$, che denotiamo con $\leq$, e quello lessicografico, dopo aver scritto gli elementi di $I$ come $p/q$, con $p$ e $q$ naturali primi tra loro, considerando prima il denominatore e poi il numeratore, che denotiamo con $\preceq$. Allora definiamo $\chi(\lambda_0) = 0$ e $\chi(\lambda_1) = 1$ come passo base, e supponiamo di aver definito $\chi(\lambda_m)$ per ogni $m < n$. Siano allora $\lambda' = \max\{\lambda_m \mid m < n, \lambda_m < \lambda_n\}$, e $\lambda'' = \min\{\lambda_m \mid m < n, \lambda_m > \lambda_n\}$ (esistono entrambi perché il minimo è su un insieme finito e non vuoto, visto che ci sono $\lambda_0$ e $\lambda_1$ rispettivamente). Abbiamo dunque già definito per ricorsione $r' = \chi(\lambda')$, e $r'' = \chi(\lambda'')$; consideriamo allora $r$ il minimo razionale rispetto a $\preceq$ tale che $r' < r < r''$, e definiamo $\chi(\lambda_n) = r$.

Evidentemente la $\chi$ così costruita è iniettiva; dimostriamo ora la surgettività. Supponiamo allora che esista un $r = p/q$ che non sia nell'immagine di $\chi$, prendiamo quello minimo rispetto all'ordine $\preceq$. Consideriamo allora gli insiemi $A' = \{a \in I \mid a \in \chi(\Lambda) \text{ e } a \prec r\}$ e $A'' = \{a \in I \mid a \in \chi(\Lambda) \text{ e } a \succ r\}$. Questi due insiemi sono non vuoti, infatti $0 \in A'$ e $1 \in A''$, dunque esistono $\lambda' = \max\{\lambda \in \Lambda \mid \chi(\lambda) \in A'\}$ e $\lambda'' = \min\{\lambda \in \Lambda \mid \chi(\lambda) \in A''\}$. Siccome $\Lambda$ non ha salti, esiste $\lambda \in \Lambda$ tale che $\lambda' < \lambda < \lambda''$; consideriamo quello con indice minore rispetto alla numerazione fissata. Ma allora, per definizione $\chi(\lambda) = r$, che quindi appartiene all'immagine: assurdo. □

Vediamo ora come un $\mathbb{Q}$-albero può essere immerso in maniera canonica in un $\mathbb{R}$-albero; per la dimostrazione si rimanda al [FJ1, Proposition 3.12].

**Proposizione 3.29.** *Sia $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-albero non metrico con radice $\tau_0$. Allora esiste $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ un $\mathbb{R}$-albero non metrico con radice, e $i : \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ un'immersione che preserva l'ordine, tali che:*

*(i) $i(\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})$ è debolmente denso in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$;*

*(ii) ogni punto in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \setminus i(\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})$ è un punto regolare di $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$;*

*(iii) se $i' : \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}'_{\mathbb{R}}$ è un'iniezione che preserva l'ordine in un altro $\mathbb{R}$-albero non metrico con radice, con immagine debolmente densa, allora esiste un morfismo iniettivo $\Phi : \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{T}'_{\mathbb{R}}$ tale che $\Phi \circ i = i'$ e che si estende ad un'isomorfismo di alberi non metrici con radici tra $\overline{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}}$ e $\overline{\mathcal{T}'_{\mathbb{R}}}$.*

*Inoltre se $\alpha_{\mathbb{Q}} : \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}_+$ è una parametrizzazione, allora esiste un'unica parametrizzazione $\alpha_{\mathbb{R}} : \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$ tale che $\alpha_{\mathbb{R}} \circ i = \alpha_{\mathbb{Q}}$.*

## 3.2 L'albero delle valutazioni

Mostriamo ora come l'insieme delle valutazioni normalizzate abbia una struttura di albero non metrico con radice $\nu_{\mathfrak{m}}$ la valutazione di molteplicità.

Ricordiamo allora la relazione d'ordine definita su $\mathcal{V}$ nel primo capitolo, che ci dice che se ho due valutazioni normalizzate $\nu_1$ e $\nu_2$, allora $\nu_1 \leq \nu_2$ se e solo se $\nu_1(\phi) \leq \nu_2(\phi)$ per ogni $\phi$. Allora vediamo come questa relazione si legge nell'ambito delle SKP.

**Osservazione 3.30.** Notiamo prima che se $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ e $\mu = \mathrm{val}(U_j, \alpha_j)_{j=0}^k$ con $1 \leq k < \infty$, e $\alpha_j = \beta_j$ per $0 \leq j < k$; allora $\nu < \mu$ se e solo se $\beta_k < \alpha_k$.

Nel caso di $k = 1$ questo segue direttamente dalla definizione, e dalle proprietà delle valutazioni monomiali. Per $k > 1$, segue dalla definizione (2.6); denotiamo con $\nu_{k-1} = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^{k-1} = \mu_{k-1}$, e consideriamo un generico elemento $\phi = \sum_i \phi_i U_k^i \in \mathbb{C}(x)[y]$ decomposto rispetto a $U_k$. Allora se $\beta_k < \alpha_k$

$$\nu(\phi) = \min_i \{\nu_{k-1}(\phi_i) + i\beta_k\} \leq \min_i \{\mu_{k-1}(\phi_i) + i\alpha_k\} = \mu(\phi),$$

e quindi $\nu \leq \mu$. Ma $\nu(U_k) = \beta_k < \alpha_k = \mu(U_k)$, e quindi $\nu < \mu$.

L'implicazione inversa si ricava invertendo il ruolo di $\nu$ e $\mu$.

**Proposizione 3.31.** *Siano $\nu, \mu$ due valutazioni centrate normalizzate (quindi in $\mathcal{V}$), che supponiamo diverse. Scegliamo delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $1 =$*

$\nu(x) = \mu(x)$ *(e quindi* $\nu(y), \mu(y) \geq 1$*). Scriviamo* $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ *e* $\mu = \mathrm{val}(V_j, \alpha_j)_{j=0}^h$*, con* $1 \leq h, k \leq \infty$*. Allora* $\nu < \mu$ *se e solo se:*

$$\infty > k \leq h, \qquad U_j = V_j \text{ per ogni } 0 \leq j \leq k, \qquad \beta_k \leq \alpha_k.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che se valgono queste tre condizioni, allora $\beta_j = \alpha_j$ per ogni $0 \leq j < k$.

Supponiamo dapprima che le tre condizioni siano verificate; allora per il Teorema 2.13 (proprietà (Q2)), abbiamo che $\mu \geq \nu'$, con $\nu' = \mathrm{val}((U_j); (\beta_j)_{j_0}^{k-1}, \alpha_k)$; ma per l'Osservazione 3.30, $\nu' \geq \nu$, e così si ottiene $\mu \geq \nu$.

Viceversa, supponiamo $\mu > \nu$. Mostriamo per induzione che $U_j = V_j$ per ogni $0 \leq j \leq k$ (per $k = \infty$ ovviamente lo mostriamo per $j < \infty$). Il passo base è immediato, $U_0 = V_0 = x$ e $U_1 = V_1 = y$. Supponiamo allora che $U_i = V_i$ per ogni $0 \leq i < j$, e in particolare $\beta_i = \alpha_i$ per ogni $0 \leq i < j-1$. Sia allora $\nu_{j-1} = \mathrm{val}(U_i, \beta_i)_{i=0}^{j-1}$; abbiamo che $\mu(U_j) \geq \nu(U_j) > \nu_{j-1}(U_j)$. Segue dunque dall'Osservazione 2.40 che $V_j = U_j$ (e quindi $\alpha_{j-1} = \beta_{j-1}$). Se per assurdo $k = \infty$, allora $U_j = V_j$ per ogni $j$, e dunque $\nu = \mu$. Quindi $k < \infty$. Infine $\alpha_k = \mu(U_k) \geq \nu(U_k) = \beta_k$. $\square$

**Osservazione 3.32.** La Proposizione 3.31 può essere riletta nel seguente modo. Fissata una $\nu \in \mathcal{V}$, fissiamo delle coordinate locali $(x, y)$, in modo tale che $\nu(x) = 1$. Allora la Proposizione 3.31 ci dice quando una valutazione $\mu \in \mathcal{V}$ tale che $\mu(x) = 1$ è maggiore di $\nu$. Vediamo ora cosa succede se invece $\mu(x) > 1$. Supponiamo dunque $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$, $\mu = \mathrm{val}(V_j, \alpha_j)_{j=0}^h$, con $\beta_0 = \alpha_1 = 1$, e $\alpha_0 > 1$. Supponiamo allora $\nu \leq \mu$ e vediamo cosa si può dire delle due SKP.

Innanzitutto, $\beta_1 = \nu(y) \leq \mu(y) = \alpha_1 = 1$, da cui segue $\beta_1 = 1$. Se $k = 1$, allora $\nu = \nu_{\mathfrak{m}}$ è la valutazione di molteplicità, che è minore o uguale a ogni altra valutazione. Supponiamo allora $k > 1$: in particolare si ottiene che $U_2 = y - \theta_1 x$ con $\theta_1 \in \mathbb{C}^*$, e $\beta_2 > \beta_1$. Se $\alpha_0 \notin \mathbb{Q}$, allora $h = 1$, e $\mu(U_2) = \min\{\mu(x), \mu(y)\} = \min\{\alpha_0, 1\} = 1 < \beta_2 = \nu(U_2)$, e quindi $\mu \not\geq \nu$. Sia allora $\alpha_0 = p/q \in \mathbb{Q}$, con $p$ e $q$ primi tra loro. Essendo $\alpha_0 > 1$, ne segue che $p > 1$, e quindi $\deg_y(U_2) = 1 < p = \deg_y(V_2)$. Dalla definizione (2.6) segue dunque $\mu(U_2) = \mu_1(U_2)$ dove con $\mu_1 = \mathrm{val}((x, y); (\alpha_0, 1))$. Ma $\mu_1(U_2) = \min\{\mu_1(x), \mu_1(y)\} = \min\{\alpha_0, 1\} = 1 < \beta_2 = \nu(U_2)$, e ancora una volta $\mu \not\geq \nu$.

Abbiamo dunque dimostrato che se $\nu(x) = 1$, e $\nu \neq \nu_{\mathfrak{m}}$, allora non ci sono valutazioni $\mu \geq \nu$ con $\mu(x) > 1$.

**Osservazione 3.33.** Supponiamo di avere una famiglia di valutazioni in $\mathcal{V}$. Scegliamo delle coordinate locali $(x, y)$. Allora per ogni valutazione esiste al più un $[a : b] \in \mathbb{CP}^1$ tale che $\nu(ax + by) > 1$ (altrimenti avremmo che $\nu(\mathfrak{m}) > 1$, contro l'ipotesi di normalizzazione). Ne segue che se la famiglia di valutazioni è numerabile, posso scegliere delle coordinate locali in modo tale che $\nu(x) = 1$ per ogni valutazione della famiglia.

**Lemma 3.34.** *Sia $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ un sottoinsieme delle valutazioni centrate e normalizzate totalmente ordinato. Allora posso scegliere delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $\nu(x) = 1$ per ogni $\nu \in \mathcal{S}$.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di $\mathbb{C}[[x, y]]$. Consideriamo $N_\nu = \{\phi \in \mathbb{C}[[x, y]] \mid \nu(\phi) = 1\} \subset \mathfrak{m}$. Questi insiemi hanno la proprietà che se $\nu \leq \mu$ allora $N_\nu \supseteq N_\mu$: infatti se $\mu(\phi) = 1$, allora $\nu(\phi) \leq \mu(\phi) = 1$. Ma $\nu$ è normalizzata e quindi $\nu(\phi) = 1$.

Mettiamo su $\mathbb{C}[[x, y]]$ una topologia, data dalla norma associata alla valutazione di molteplicità:

$$|\phi| := e^{-m(\phi)},$$

con $m(\phi)$ che indica la molteplicità di $\phi$.

Dalle proprietà di una valutazione segue subito che questa norma definisce una distanza (ultrametrica) su $\mathbb{C}[[x, y]]$.

Vogliamo mostrare ora che $N_\nu$ è un compatto per ogni $\nu$. Visto che rispetto alla distanza introdotta, $\mathbb{C}[[x, y]]$ ha diametro finito (uguale ad 1), basta dimostrare che $N_\nu$ è chiuso. Per far questo devo mostrare che se $\phi \notin N_\nu$, allora esiste un $t$ tale che se $|\phi - \psi| < e^{-t}$, o equivalentemente se $m(\phi - \psi) > t$, allora anche $\psi \notin N_\nu$. Ma $\nu(\phi - \psi) \geq m(\phi - \psi) > t$; se considero $t > \nu(\psi)$, allora $\nu(\psi) = \nu(\phi)$, e in particolare $\psi \notin N_\nu$.

Dunque, considerando gli $N_\nu$ al variare di $\nu \in \mathcal{S}$, ho una famiglia inscatolata di compatti in $\mathbb{C}[[x, y]]$, e quindi la loro intersezione è non vuota.

Esiste dunque un $x$ tale che $\nu(x) = 1$ per ogni $\nu \in \mathcal{S}$. □

Mostriamo finalmente che $\mathcal{V}$ ha una struttura di albero non metrico con radice.

**Teorema 3.35.** *L'insieme $\mathcal{V}$ delle valutazioni centrate su $\mathbb{C}[[x, y]]$ e normalizzate ammette una struttura di albero non metrico con radice la valutazione di molteplicità $\nu_\mathfrak{m}$ (rispetto alla relazione d'ordine $\leq$ definita prima). Inoltre $(\mathcal{V}, \leq)$ come albero non metrico con radice è completo.*

*Dimostrazione.* Che $(\mathcal{V}, \leq)$ sia un poset con unico elemento minimale $\nu_\mathfrak{m}$, e quindi la condizione (T1) della definizione di albero non metrico con radice è verificata.

Verifichiamo ora (T2), e fissiamo $\nu \in \mathcal{V}$. Scegliamo delle coordinate $(x, y)$ in modo tale che $1 = \nu(x) \leq \nu(y)$, e scriviamo $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$. Fissiamo $\mathcal{V}_\nu = \{\mu \in \mathcal{V} \mid \nu_\mathfrak{m} \leq \mu \leq \nu\}$: vogliamo dimostrare che $\mathcal{V}_\nu$ è isomorfo come insieme totalmente ordinato ad un intervallo reale (chiuso). Osserviamo che se $\mu(x) > 1$, allora $\mu \notin \mathcal{V}_\nu$; possiamo dunque applicare i risultati della Proposizione 3.31.

**Lemma 3.36.** *Sia $\nu \in \mathcal{V}$, e scriviamo $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$, dopo aver fissato delle coordinate $(x, y)$, in modo tale che $1 = \nu(x) \leq \nu(y)$; fissiamo poi*

$$\mathcal{V}_\nu = \{\mu \in \mathcal{V} \mid \nu_\mathfrak{m} \leq \mu \leq \nu\}.$$

*Consideriamo la successione $(\gamma_j)_{j=0}^k$, con $\gamma_j = \beta_j/d_j$ per $j \geq 1$ e $\gamma_0 = 0$. Allora $(\gamma_j)$ è strettamente crescente, e $\mathcal{V}_\nu$ è isomorfo all'intervallo $[1,\gamma]$, con $\gamma = \sup_j \gamma_j$ (ovvero è $\gamma_k$ per $k$ finito, mentre è il limite della successione per $k$ infinito).*

*Dimostrazione.* Denotiamo con $d_j = \deg_y(U_j)$ per $0 \leq j \leq k$. Grazie al Lemma 2.5 e alla definizione di SKP $\beta_{j+1}/d_{j+1} > (n_j\beta_j)/(n_jd_j) = \beta_j/d_j$ per $j \geq 1$, mentre $\gamma_1 = \beta_1 \geq 1 > 0$, e quindi $(\gamma_j)$ è strettamente crescente.

Supponiamo dapprima $k < \infty$; sia allora $t \in I$; esiste un unico intero $l$, con $1 \leq l \leq k$, tale che $\gamma_{l-1} < t \leq \gamma_l$. Poniamo $\nu_t = \mathrm{val}((U_j)_{j=0}^l; (\beta_j)_{j_0}^{l-1}, td_l)$, ($td_l$ varia in $(\beta_{l-1}n_{l-1}, \beta_l]$).

Dalla Proposizione 3.31 abbiamo che se $\mu = \mathrm{val}(V_j, \alpha_j)_{j=0}^h$ allora $\mu \leq \nu$ se e solo se $h \leq k$, $V_j = U_j$ per $0 \leq j \leq h$, e $\alpha_h \leq \beta_h$. Ne segue che $t \mapsto \nu_t$ è un isomorfismo tra $I$ e $\mathcal{V}_\nu$.

Nel caso $k = \infty$, se $\nu_l = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^l$, allora per il risultato nel caso finito abbiamo degli isomorfismi $\Phi_l : [1, \gamma_l] \to \mathcal{V}_{\nu_l}$, uno estensione dell'altro al crescere di $l$. Possiamo considerare allora $\gamma = \lim_l \gamma_l$, e $\Phi : [1,\gamma] \to \mathcal{V}_\nu$, definito da $\Phi(\mu) = \Phi_l(\mu)$ se $\mu \leq \nu_l (< \nu)$, e $\Phi(\nu) = \gamma$; $\Phi$ è l'isomorfismo cercato. □

Questo lemma dimostra dunque che per $\mathcal{V}$ vale (T2); per dimostrare che $\mathcal{V}$ è un albero non metrico, resta da mostrare (T3). In questo caso ci resta più semplice dimostrare (T4), equivalente a (T3) grazie alla Proposizione 3.4. Inoltre (T4) e la completezza seguono direttamente se dimostriamo che ogni sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{V}$ ha un maggiorante (infatti così non esistono sottoinsiemi totalmente ordinati senza maggiorante, e tutte le successioni crescenti hanno un maggiorante).

Consideriamo allora un sottoinsieme totalmente ordinato $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$. Grazie al Lemma 3.34, posso scegliere delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $\nu(x) = 1$ per ogni $\nu \in \mathcal{S}$. Possiamo così applicare la Proposizione 3.31, che ci dice che la lunghezza delle SKP associate alle valutazioni $\nu \in \mathcal{S}$ è una funzione non decrescente (in $\nu$). Se questa lunghezza tende ad infinito, allora $\nu$ tende ad una valutazione con SKP infinita (quindi di curve o infinitamente singolare) che le maggiora tutte. Se invece la lunghezza rimane limitata, allora sarà costante definitivamente, supponiamo uguale a $k$. Avremo dunque $\nu = \mathrm{val}((U_j)_{j=0}^k; (\beta_j)_{j=0}^{k-1}, \beta_k^{(\nu)})$. Sempre per la Proposizione 3.31, $\beta_k^{(\nu)}$ è una funzione crescente di $\nu$, e i $\beta_k^{(\nu)}$ saranno dominati da un certo $\beta_k \in \overline{\mathbb{R}}_+$. La valutazione $\mu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ maggiora tutte le $\nu \in \mathcal{S}$.

Abbiamo dunque dimostrato che $\mathcal{V}$ è un albero non metrico completo. □

**Corollario 3.37.** *Sia $\{\nu^{(i)} \mid i \in I\}$ una famiglia di valutazioni in $\mathcal{V}$ tale che esistano delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $1 = \nu^{(i)}(x) \leq \nu^{(i)}(y)$ per ogni $i \in I$. Sia $\nu^{(i)} = \mathrm{val}(U_j^{(i)}, \beta_j^{(i)})$ una SKP di lunghezza $k^{(i)}$. Allora l'estremo inferiore dei*

$(\nu^{(i)})$ *è dato da:*

$$\bigwedge_i \nu^{(i)} = \mathrm{val}(U_j, \beta_k)_{j=0}^k,$$

*dove* $1 \leq k < \infty$ *è il massimo intero tale* $U_j^{(i)} = U_j^{(h)} =: U_j$ *al variare di* $i, h \in I$, *per* $0 \leq j \leq k$ *(e quindi* $\beta_j^{(i)} = \beta_j^{(h)} =: \beta_j$ *al variare di* $i, h \in I$, *per* $0 \leq j < k$*), mentre* $\beta_k := \inf_{i \in I} \beta_k^{(i)}$.

*Dimostrazione.* L'esistenza di $\bigwedge_i \nu^{(i)}$ segue direttamente dalla struttura di albero non metrico data a $\mathcal{V}$ nel Teorema 3.35. Invece l'espressione di $\bigwedge_i \nu^{(i)}$ in termini di SKP segue immediatamente dalla Proposizione 3.31. □

Col prossimo teorema, vedremo che ruolo assumono i quattro tipi di valutazioni che abbiamo definito (divisoriali, irrazionali, infinitamente singolari e di curve), nella struttura di albero non metrico con radice che abbiamo dato a $\mathcal{V}$.

**Teorema 3.38.** *La struttura di albero non metrico con radice di* $\mathcal{V}$ *ha le seguenti proprietà:*

*(i) le fini di* $\mathcal{V}$ *sono tutte e sole le valutazioni di curve o le valutazioni infinitamente singolari;*

*(ii) per ogni vettore tangente in* $\mathcal{V}$ *si può scegliere un rappresentante che sia una valutazione di curve, e un rappresentante che sia una valutazione infinitamente singolare;*

*(iii) i punti regolari di* $\mathcal{V}$ *sono tutte e sole le valutazioni irrazionali;*

*(iv) i punti di ramificazione di* $\mathcal{V}$ *sono tutte e sole le valutazioni divisoriali. Inoltre lo spazio tangente ad una valutazione divisoriale è in bigezione con* $\mathbb{P}^1 = \mathbb{CP}^1$.

*Dimostrazione.* Dimostriamo i punti ad uno ad uno.

(i) Sia $\nu \in \mathcal{V}$ una valutazione quasimonomiale, e scegliamo delle coordinate locali $(x, y)$. Allora $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ con $k \leq \infty$ e $\beta_0, \beta_k < \infty$. Deduciamo allora dalla Proposizione 3.31 che $\nu$ è dominata ad esempio dalla valutazione $\mathrm{val}((U_j)_{j=0}^k; (\beta_j)_{j=0}^{k-1}, \infty)$, e quindi nessuna valutazione quasimonomiale può essere una fine.

Viceversa, fissiamo $\nu$ una valutazione di curve o infinitamente singolare; consideriamo un'altra valutazione $\mu \in \mathcal{V}$, e supponiamo che sia $\mu \geq \nu$. Grazie al Lemma 3.34, posso scegliere delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $1 = \nu(x) = \mu(x)$; allora per la Proposizione 3.31, si ha che $\nu = \mu$, e $\nu$ è dunque una fine.

(ii) Sia $\nu \in \mathcal{V}$ una valutazione, e consideriamo $\overrightarrow{v} \in T_\nu\mathcal{V}$ un vettore tangente in $\nu$. Supponiamo dapprima che $\overrightarrow{v}$ non sia rappresentato da $\nu_\mathfrak{m}$. Allora $\nu$ non può essere una fine, e quindi per il punto (i) è una valutazione quasimonomiale; inoltre $\overrightarrow{v}$ può rappresentato da una valutazione quasimonomiale $\mu > \nu$ (posso sempre supporre che un vettore tangente sia rappresentato da un punto che non sia una fine). Scegliamo delle coordinate locali $(x, y)$, e scriviamo $\mu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$, con $k, \beta_0, \beta_k < \infty$. Allora per la Proposizione 3.31 la valutazione di curve $\mathrm{val}((U_j)_{j=0}^k; (\beta_j)_{j=0}^{k-1}, \infty)$ domina $\mu$, e quindi rappresenta $\overrightarrow{v}$. Si può anche costruire una valutazione infinitamente singolare che domini $\mu$. Per farlo, basta considerare $\alpha_j = \beta_j$ per $j < k$, $\alpha_k \geq \beta_k$ in modo tale che $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, e poi continuare per ricorsione scegliendo degli $\alpha_j \in \mathbb{Q}$, in modo tale che $\alpha_{j+1} > \alpha_j n_j$, e che $n_{j+1} \geq 2$ (basta frequentemente), per poi costruire un'SKP infinita scegliendo dei valori per $\theta_j$ (ad esempio $\theta_j = 1$ per ogni $j \geq k$). In questo modo $\mathrm{val}(U_j, \alpha_j)_{j=0}^\infty$ è una valutazione infinitamente singolare che domina $\mu$.

Supponiamo ora che $\overrightarrow{v}$ sia rappresentato da $\nu_\mathfrak{m}$; in particolare $\nu > \nu_\mathfrak{m}$. Scegliamo delle coordinate locali $(x, y)$ in modo tale che $1 = \nu(x) \leq \nu(y)$. Consideriamo la valutazione di curve $\nu_x$, la cui SKP è $((x, y); (\infty, 1))$. Da un calcolo diretto, le valutazioni minori di $\nu_x$ sono le valutazioni monomiali la cui SKP è $((x, y); (\beta_0, 1))$ con $1 \leq \beta_0 < \infty$. In particolare l'unica valutazione minore sia di $\nu_x$ sia di $\nu$ è la valutazione di molteplicità $\nu_\mathfrak{m}$; dunque $\nu_x$ rappresenta un vettore tangente $\overrightarrow{w}$ in $\nu_\mathfrak{m}$ diverso dal vettore rappresentato da $\nu$. Ne segue che ogni rappresentante di $\overrightarrow{w}$ è anche un rappresentante di $\overrightarrow{v}$. Ma per quello visto prima abbiamo che $\overrightarrow{w}$ può essere rappresentato sia da una valutazione di curve ($\nu_x$ ad esempio), sia da una valutazione infinitamente singolare.

Mostriamo ora come è fatto lo spazio tangente ad una valutazione quasimonomiale, dimostrando i punti (iii) e (iv). Sia allora $\nu$ una valutazione quasimonomiale, e consideriamo un vettore tangente $\overrightarrow{v} \in T_\nu\mathcal{V}$. Sia $\nu_C$ una valutazione di curve che rappresenta $\overrightarrow{v}$, e supponiamo dapprima che $\nu_C \wedge \nu < \nu$. Allora il segmento $(\nu, \nu_C]$ interseca il segmento $(\nu, \nu_\mathfrak{m}]$ in $(\nu, \nu_C \wedge \nu]$, e quindi $\nu_C$ e $\nu_\mathfrak{m}$ rappresentano lo stesso vettore tangente (si vede immediatamente che vale anche l'implicazione opposta).

Sia ora $\nu_C > \nu$.

(iii) Supponiamo $\nu$ irrazionale. Vogliamo dimostrare che tutte le valutazioni di curve $\nu_C$ tali che $\nu_C > \nu$ rappresentano lo stesso vettore tangente. Siano allora $\nu_C$ e $\nu_D$ due valutazioni di curve, maggiori di $\nu$. Scegliamo delle coordinate locali in modo tale che $\nu(x) = \nu_C(x) = \nu_D(x) = 1$ (ricordiamo l'Osservazione 3.33). Allora dal Corollario 3.37, $\nu_C \wedge \nu_D$ è divisoriale, mentre essendo $\nu$ irrazionale, si ha che $\nu < \nu_C \wedge \nu_D$, e quindi $\nu_C$ e $\nu_D$ rappresentano lo stesso vettore tangente. Ne segue che lo spazio tangente ad una valutazione irrazionale è formato da due soli vettori, e quindi le valutazioni irrazionali sono punti regolari dell'albero delle valutazioni.

(iv) Supponiamo $\nu$ divisoriale, ma diversa da $\nu_{\mathfrak{m}}$. Fissiamo delle coordinate locali $(x, y)$ in modo tale che $\nu(x) = 1$. Scriviamo $\mu = \nu_C = \mathrm{val}(V_j, \alpha_j)_{j=0}^h$. Allora grazie all'Osservazione 3.32 e alla Proposizione 3.31, $\mu > \nu$ se e solo se $U_j = V_j$ per ogni $j \leq k$, e quindi $\beta_j = \alpha_j$ per ogni $j < k$, e $\alpha_k \geq \beta_k$.

Se $\alpha_k > \beta_k$, allora $\mu$ rappresenta lo stesso vettore della valutazione $\nu_\infty := \mathrm{val}((U_j)_{j=0}^k; (\beta_j)_{j=0}^{k-1}, \infty)$.

Se invece $\alpha_k = \beta_k$, consideriamo $V_{k+1} = U_k^{n_k} - \theta \prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$, con $\theta \in \mathbb{C}^*$. Definiamo $\nu_\theta = \mathrm{val}((V_j)_{j=0}^{k+1}; (\beta_j)_{j=0}^k, \infty)$, mentre denotiamo con $\mu_l = \mathrm{val}(V_j, \beta_j)_{j=0}^l$ per ogni $l$. Allora $\mu \wedge \nu_\theta = \mu_{k+1} > \mu_k = \nu$, e quindi $\mu$ e $\nu_\theta$ rappresentano lo stesso vettore tangente.

Inoltre si vede (usando la Proposizione 3.31) che tutti i rappresentanti che abbiamo dato rappresentano vettori tangenti diversi, e quindi

$$T_\nu \mathcal{V} = \{[\nu_{\mathfrak{m}}], [\nu_\infty], [\nu_\theta] \mid \theta \in \mathbb{C}^*\},$$

che è in bigezione con $\mathbb{CP}^1$.

Rimane da vedere il caso $\nu = \nu_{\mathfrak{m}}$. In questo caso non esistono valutazioni minori, e quindi manca il primo vettore tangente che abbiamo trovato per le valutazioni quasimonomiali. Invece lo studio che abbiamo fatto per le divisoriali vale ancora, tranne per il fatto che questa volta esistono delle valutazioni $\mu \geq \nu$ (condizione vuota in questo caso), con $\mu(x) > 1$.

Dunque, abbiamo classificato i vettori rappresentati da valutazioni $\mu$ con $\mu(x) = \mu(y) = 1$ (associate a $\nu_\theta$, per $\theta \in \mathbb{C}^*$), quelle con $1 = \mu(x) < \mu(y)$ (associate a $\nu_\infty$), mentre rimangono da studiare quelle con $1 = \mu(y) < \mu(x)$.

Per farlo, basta studiare le valutazioni nelle coordinate locali $(y, x)$. Facendolo ritorniamo nel caso già visto, e vediamo che tutte queste valutazioni rappresentano lo stesso vettore tangente. Scegliamo un rappresentante come prima: $\nu_0 := \mathrm{val}((y, x); (1, \infty))$, che non è altri che $\nu_x$ la valutazione associata alla curva $x$. Ancora una volta abbiamo quindi che $T_\nu \mathcal{V}$ è in bigezione con $\mathbb{CP}^1$.

$\square$

Dal Teorema 3.38 segue che $\mathcal{V}^\circ =: \mathcal{V}_{qm}$ l'insieme delle valutazioni quasimonomiali di $\mathcal{V}$, in realtà forma un sottoalbero (non completo).

## 3.3 Parametrizzazioni

In questa sezione introdurremo delle parametrizzazioni per l'albero delle valutazioni, che saranno utilissime per lo studio che faremo nei prossimi capitoli.

### 3.3.1 Distorsione

**Definizione 3.39.** Sia $\nu \in \mathcal{V}$ una valutazione. Definiamo la **distorsione** (skewness) $\alpha(\nu) \in [1, \infty]$ di $\nu$ come

$$\alpha(\nu) := \sup \left\{ \frac{\nu(\phi)}{m(\phi)} \ : \ \phi \in \mathfrak{m} \right\}, \tag{3.3}$$

dove $m(\phi)$ indica la molteplicità di $\phi$.

Quello che vedremo è che la distorsione è una parametrizzazione di $\mathcal{V}$, e per mostrarlo, useremo l'identificazione delle valutazioni con le SKP. Sarà quindi molto utile calcolare la distorsione di una valutazione di data SKP.

**Osservazione 3.40.** Una proprietà che risulterà molto utile è che il massimo nella definizione (3.3) della distorsione può essere preso sugli elementi irriducibili di $\mathfrak{m}$. Infatti se per ogni $\psi$ irriducibile si ha che $\nu(\psi) \leq \alpha m(\psi)$, e consideriamo poi $\phi = \prod \phi_i$ con $\phi_i$ irriducibili, allora

$$\nu(\phi) = \sum_i \nu(\phi_i) \leq \alpha \sum_i m(\phi) = \alpha m(\phi).$$

**Lemma 3.41.** *Sia $\nu \in \mathcal{V}$, e, dopo aver fissato delle coordinate $(x, y)$, scriviamo $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$. Indichiamo con $\alpha$ la funzione di distorsione. Allora:*

*(i) se $\nu$ è quasimonomiale, allora $\alpha(\nu) = d_k^{-1}\beta_k\beta_0$, con $d_k = \deg_y(U_k)$; in particolare $\nu$ quasimonomiale è divisoriale se e solo se $\alpha(\nu) \in \mathbb{Q}$;*

*(ii) se $\nu$ è una valutazione di curve, allora $\alpha(\nu) = \infty$;*

*(iii) se $\nu$ è infinitamente singolare, allora $\alpha(\nu) = \lim_j d_j^{-1}\beta_j\beta_0 \in (1, \infty]$.*

*Dimostrazione.* Se $\nu = \nu_\phi$ è una valutazione di curve, allora $\alpha(\nu) \geq \nu(\phi)/m(\phi) = \infty$, che dimostra (ii).

Consideriamo gli altri due casi; grazie all'Osservazione 3.40 possiamo considerare solo gli elementi $\phi \in \mathfrak{m}$ irriducibili. Scriviamo allora $\nu_\phi = \mathrm{val}(U_j^\phi, \beta_j^\phi)$, e sia $l = \mathrm{con}(\nu, \nu_\phi)$ (in particolare $l \leq k$). Ricordiamo che $(\beta_j/d_j)_{j=1}^k$ è una successione crescente. Applicando il Corollario 2.48 si ottiene:

$$\frac{\nu(\phi)}{m(\phi)} = d_l^{-1} \min\{\beta_l, \beta_l^\phi\} \min\{\beta_0, \beta_0^\phi\} \leq \sup_{j \leq k} d_j^{-1}\beta_j\beta_0. \tag{3.4}$$

Allora se $\nu$ è quasimonomiale, e quindi $k < \infty$, si ha che l'uguaglianza in (3.4) vale se $l = k$ e $\beta_k^\phi = \beta_k$ (si fissa l'SKP di $\nu_\phi$ fino a $k$, poi si prolunga fino ad ottenere una valutazione di curve), dimostrando (i).

Se invece $\nu$ è infinitamente singolare, e quindi $k = \infty$, allora per ogni $j$ possiamo scegliere $\phi$ con $l = j$ e $\beta_l^\phi = \beta_l$ (come prima fissando quei valori fino a $j$ e poi prolungando l'SKP fino ad ottenere una valutazione di curve). Dunque $\nu(\phi)/m(\phi) \geq d_j^{-1}\beta_j\beta_0$; mandando $j \to \infty$, otteniamo la tesi. □

Mostriamo allora che la distorsione ci da una parametrizzazione di $\mathcal{V}$.

**Teorema 3.42.** *La distorsione definisce una parametrizzazione $\alpha : \mathcal{V} \to [1, \infty]$ dell'albero non metrico $\mathcal{V}$ con radice la valutazione di molteplicità $\nu_\mathfrak{m}$. Inoltre:*

*(i) se $\nu$ è divisoriale, allora $\alpha(\nu)$ è razionale;*

*(ii) se $\nu$ è irrazionale, allora $\alpha(\nu)$ è irrazionale;*

*(iii) se $\nu$ è di curve, allora $\alpha(\nu) = \infty$;*

*(iv) se $\nu$ è infinitamente singolare, allora $\alpha(\nu) \in (1, \infty]$.*

*Dimostrazione.* I punti da (i) a (iv) seguono direttamente dal Lemma 3.41; resta dunque da dimostrare che la distorsione è effettivamente una parametrizzazione. Per farlo bisogna mostrare che per ogni fine $\nu$, posto $\mathcal{V}_\nu = \{\mu \in \mathcal{V} \mid \nu_\mathfrak{m} \leq \mu \leq \nu\}$, $\alpha$ ci da un morfismo tra $\mathcal{V}_\nu$ e $[1, \alpha(\nu)]$.

Scegliamo allora delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $1 = \nu(x) \leq \nu(y)$, e applichiamo i risultati del Lemma 3.36: basta ripercorrere la sua dimostrazione e notare che, se $\Phi : \mathcal{V}_\nu \to [1, \sup_k \gamma_k]$, allora per il Lemma 3.41 si ha $\Phi(\nu) \cdot \beta_0 = \alpha(\nu)$, ma per la scelta delle coordinate $\beta_0 = 1$, e dunque abbiamo la tesi. □

Vediamo ora un utile risultato per calcolare il valore di una valutazione su un elemento irriducibile a partire dalla distorsione.

**Proposizione 3.43.** *Per ogni valutazione $\nu \in \mathcal{V}$, e per ogni $\phi \in \mathfrak{m}$ irriducibile, abbiamo*

$$\nu(\phi) = \alpha(\nu \wedge \nu_\phi)m(\phi). \tag{3.5}$$

*In particolare $\nu(\phi) \leq \alpha(\nu)m(\phi)$, con l'uguaglianza se e solo se $\nu_\phi \geq \nu$.*

*Dimostrazione.* Se $\nu = \nu_\phi$ allora $\nu(\phi) = \infty$, ma anche $\alpha(\nu \wedge \nu_\phi) = \alpha(\nu_\phi) = \infty$ dal Lemma 3.41, e abbiamo ottenuto la tesi in questo caso.

Supponiamo allora $\nu \neq \nu_\phi$, e sia $l = \mathrm{con}(\nu, \nu_\phi) < \infty$. Allora segue dal Corollario 3.37 che $\nu \wedge \nu_\phi = \mathrm{val}((U_j)_{j=0}^l; (\beta_j)_{j=0}^{l-1}, \beta)$, con $\beta = \min\{\beta_l, \beta_l^\phi\}$. Allora usando i risultati del Lemma 3.41 e della Proposizione 2.47, otteniamo:

$$\alpha(\nu \wedge \nu_\phi) = d_l^{-1}\beta\beta_0 = \nu(\phi)/m(\phi),$$

ovvero la tesi. □

Abbiamo visto come la distorsione parametrizza i segmenti dalla radice ad una fine: possiamo dunque dare la seguente definizione.

**Definizione 3.44.** Sia $C = \{\phi = 0\}$ una curva irriducibile, e sia $t \in [1, \infty]$. Denotiamo allora con $\nu_{C,t}$ o con $\nu_{\phi,t}$ l'unica valutazione nel segmento $[\nu_{\mathfrak{m}}, \nu_\phi]$ con distorsione $\alpha(\nu_{\phi,t}) = t$.

### 3.3.2 Molteplicità

Nel primo capitolo abbiamo definito per ogni $\phi \in \mathbb{C}[[x, y]]$ la molteplicità $m(\phi)$. In particolare quindi se $\phi$ è un elemento irriducibile, possiamo associare a $\nu_\phi$ la molteplicità $m(\nu_\phi) = m(\phi)$. Vogliamo ora estendere la molteplicità a tutto $\mathcal{V}$.

**Definizione 3.45.** Sia $\nu \in \mathcal{V}$ una valutazione, definiamo la funzione di **molteplicità** $m : \mathcal{V} \to \overline{\mathbb{N}}^*$. Se $\nu = \nu_\phi$ è una valutazione di curve, allora definiamo $m(\nu_\phi) = m(\phi)$. Se $\nu \in \mathcal{V}_{qm}$, ovvero $\nu$ è quasimonomiale, definiamo:

$$m(\nu) = \min\{m(\nu_\phi) \mid \nu_\phi \geq \nu\}.$$

Infine se $\nu$ è infinitamente singolare, grazie al fatto che $m : \mathcal{V}_{qm} \to \mathbb{N}$ è crescente, possiamo definire $m(\nu)$ come il limite che assume nel segmento $[\nu_{\mathfrak{m}}, \nu]$. In questo caso $m(\nu)$ può assumere anche il valore infinito (vedremo con la Proposizione 3.47 che in effetti questo succede sempre per le valutazioni infinitamente singolari).

**Lemma 3.46.** *Sia $\nu \in \mathcal{V}$, e scegliamo delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $1 = \nu(x) \leq \nu(y)$. Sia poi $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$. Allora $m(\nu) = \sup_j \deg_y U_j$.*

*Dimostrazione.* Applicando la Proposizione 2.47 a $\nu = \nu_{\mathfrak{m}}$, nel caso di $\phi = U_l$, si ottiene che $m(U_l) = \prod_{j=1}^{l-1} n_j = d_l$, grazie al Lemma 2.5. In particolare la molteplicità è dunque una funzione non decrescente in $l$. Utilizzando il criterio visto nella Proposizione 3.31 (e ricordando l'Osservazione 3.32), otteniamo così la tesi. □

**Proposizione 3.47.** *Se $\mu < \nu$, allora $m(\mu)$ divide $m(\nu)$ (o $m(\nu) = \infty$). Inoltre*

*(i) $m(\nu) = \infty$ se e solo se $\nu$ è infinitamente singolare;*

*(ii) $m(\nu) = 1$ se e solo se $\nu$ è monomiale in certe coordinate locali $(x, y)$, o è una valutazione di curve di un parametro locale.*

*Dimostrazione.* Supponiamo $\mu \leq \nu$, e fissiamo delle coordinate locali $(x, y)$ in modo tale che $1 = \mu(x) = \nu(x)$. Scriviamo poi $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$ e $\mu = \mathrm{val}(V_j, \alpha_j)_{j=0}^h$. Allora per la Proposizione 3.31 si ottiene che $h \leq k$, e $U_j = V_j$ per ogni $j \leq h$. Dal Lemma 3.46, deduciamo allora che $m(\mu) = \deg_y U_h$, mentre $m(\nu) = \sup_{j \leq k} \deg_y U_j$. Dal Lemma 2.5 segue che $m(\mu) \mid m(\nu)$, a meno che non sia $m(\nu) = \infty$.

(i) Dalla definizione segue immediatamente che se $m(\nu) = \infty$, allora $\nu$ è infinitamente singolare. Viceversa se $\nu$ è infinitamente singolare, scegliamo delle coordinate in modo tale che $1 = \nu(x) \leq \nu(y)$; allora $m(\nu) = \lim d_j = \infty$, con $d_j = \deg_y(U_j)$, e $U_j$ i polinomi della SKP associata a $\nu$.

(ii) Se $\nu$ è monomiale in certe coordinate $(x, y)$, allora $\nu \leq \nu_x$ o $\nu \leq \nu_y$, e quindi $m(\nu) = 1$. Viceversa, supponiamo che $m(\nu) = 1$. Consideriamo allora una curva irriducibile $C$ tale che $\nu_C \geq \nu$, e $m(C) = m(\nu) = 1$. Possiamo allora considerare delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $C = \{y = 0\}$, e quindi $\nu_C = \nu_y$. Consideriamo allora il segmento $[\nu_{\mathfrak{m}}, \nu_y]$ parametrizzato dalla distorsione (che varia in $[1, \infty]$). Sia poi $\nu_t$ (per $t \in [1, \infty)$ la valutazione monomiale in $(x, y)$ con pesi 1 e $t$ rispettivamente. Allora $\nu_t \leq \nu_y$ e $\alpha(\nu_t) = t$. Ne segue che se $\alpha(\nu) = t < \infty$, allora $\nu = \nu_t$ è monomiale (in queste coordinate); altrimenti $\nu = \nu_y$ è la valutazione del parametro locale $y$.

$\square$

Grazie alla molteplicità possiamo distinguere i due tipi di fine (di curve o infinitamente singolare): le valutazioni infinitamente singolari sono infatti caratterizzate dalla molteplicità infinita (da cui il nome).

Possiamo estendere la molteplicità anche ai vettori tangenti, come segue.

**Definizione 3.48.** Sia $\nu \in \mathcal{V}$, e $\overrightarrow{v} \in T_\nu\mathcal{V}$. Possiamo definire la **molteplicità** di $\overrightarrow{v}$, che denotiamo con $m(\overrightarrow{v})$, nel seguente modo: se $\nu_{\mathfrak{m}}$ rappresenta $\overrightarrow{v}$, allora $m(\overrightarrow{v}) := m(\nu)$; altrimenti, $m(\nu) = \min\{m(C) \mid \nu_C \text{ rappresenta } \overrightarrow{v}\}$.

**Osservazione 3.49.** Se $\overrightarrow{v} \in T_\nu\mathcal{V}$, si ha sempre che $m(\overrightarrow{v}) \geq m(\nu)$, essendo il primo membro o esattamente uguale per definizione, o il minimo di un insieme più piccolo. È utile allora sapere come si comporta la molteplicità di un vettore tangente rispetto alla molteplicità della valutazione a cui è tangente. Se il punto non è di diramazione, allora si ottiene facilmente che $m(\overrightarrow{v}) = m(\nu)$. Per le valutazioni divisoriali abbiamo il seguente risultato.

**Proposizione 3.50.** *Sia $\nu \in \mathcal{V}$ una valutazione divisoriale. Allora esiste un intero positivo $b(\nu)$, divisibile per $m(\nu)$, tale che valga esattamente una tra le seguenti opzioni:*

*(i) tutti i vettori tangenti hanno la stessa molteplicità $b(\nu) = m(\nu)$;*

*(ii) ci sono esattamente due vettori tangenti, uno dei due rappresentato da $\nu_{\mathfrak{m}}$, con molteplicità uguale a $m(\nu)$, mentre tutti gli altri hanno la stessa molteplicità $b(\nu) > m(\nu)$.*

*Dimostrazione.* Riprendiamo le notazioni viste nel Teorema 3.38, quando abbiamo dimostrato l'esistenza di un isomorfismo tra $T_\nu\mathcal{V}$ e $\mathbb{P}^1$. Supponiamo allora $\nu \neq \nu_\mathfrak{m}$, e scegliamo delle coordinate in modo tale che $1 = \nu(x) \leq \nu(y)$. Scriviamo poi $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$. Se denotiamo con $U_{k+1}(\theta)$, il polinomio che prolungherebbe la SKP di $\nu$ di coefficiente di fase $\theta$, ovvero $U_{k+1}(\theta) := U_k^{n_k} - \theta\prod_{j=0}^{k-1} U_j^{m_{k,j}}$ (con le notazioni come in (2.2)), abbiamo visto allora che un generico elemento $\overrightarrow{v} \in T_\nu\mathcal{V}$ è rappresentato o da $\nu_\mathfrak{m}$, o da $\nu_\infty = \nu_{U_k}$, o da $\nu_\theta = \nu_{U_{k+1}(\theta)}$ per un qualche $\theta \in \mathbb{C}^*$.

Per definizione $m([\nu_\mathfrak{m}]) = m(\nu)$, mentre $m([\nu_\infty]) \leq m(U_k) = m(\nu)$ (grazie al Lemma 3.46), e quindi anche $m([\nu_\infty]) = m(\nu)$.

Infine, $m([\nu_\theta]) \leq m(U_{k+1}(\theta)) = n_k m(\nu)$ (sempre grazie al Lemma 3.46, ricordando il Lemma 2.5); vogliamo mostrare che anche in questo caso vale l'uguale.

Fissiamo un $\theta$. Segue allora dalla Proposizione 3.31, e da quello che abbiamo visto nel Teorema 3.38, che una valutazione rappresenta $[\nu_\theta]$ se e solo se la sua SKP inizia con $(U_j)_{j=0}^k$ e $U_{k+1}(\theta)$. Consideriamo le valutazioni di curve $\nu_\phi$ che rappresentano $[\nu_\theta]$. Allora dal Lemma 3.46 segue che $(\phi) \geq m(U_{k+1}(\theta)) = n_k m(\nu)$, e quindi otteniamo l'uguaglianza.

Ne segue che $b(\nu) = n_k m(\nu)$; se $n_k = 1$ siamo nel primo caso, se $n_k \geq 2$ siamo nel secondo.

Resta da dimostrare la tesi per $\nu = \nu_\mathfrak{m}$, ma in questo caso è più semplice. Infatti ancora una volta abbiamo, come rappresentanti di un generico vettore tangente, $\nu_\infty = \nu_y$, $\nu_\theta = \nu_{y-\theta x}$ per $\theta \in \mathbb{C}^*$, mentre al posto di $\nu_\mathfrak{m}$, in questo caso abbiamo $\nu_0 = \nu_x$. Per i primi due tipi, il risultato si ritrova come prima; per l'ultimo, abbiamo che $m([\nu_0]) \leq m(x) = 1$, e quindi ancora $m([\nu_0]) = 1$ (e quindi in caso $b(\nu_\mathfrak{m}) = m(\nu_\mathfrak{m}) = 1$). □

**Definizione 3.51.** Sia $\nu \in \mathcal{V}$ una valutazione divisoriale. Allora $b(\nu)$ definita nella Proposizione 3.50 è detta **molteplicità generica** della valutazione $\nu$.

### 3.3.3 Successioni approssimanti

**Proposizione 3.52.** *Per ogni valutazione $\nu \in \mathcal{V}$ di molteplicità finita (quindi non infinitamente singolare), esiste un'unica successione finita di valutazioni divisoriali $(\nu_i)_{i=0}^g$ e di valori strettamente crescenti $(m_i)_{i=1}^{g+1} \subset \mathbb{N}^*$ tali che*

$$\nu_\mathfrak{m} = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_g < \nu_{g+1} = \nu,$$

*e tali che $m(\mu) = m_i$ per $\mu \in (\nu_{i-1}, \nu_i]$ con $1 \leq i \leq g+1$; inoltre $m_1 = 1$, ed $m_i$ divide $m_{i+1}$; infine $\nu_i$ ha molteplicità generica $m_{i+1}$ per $1 \leq i \leq g$.*

*Dimostrazione.* La molteplicità (nelle valutazioni non divisoriali) è una funzione crescente a valori in $\mathbb{N}^*$, che è discreto, quindi $m$ è costante a tratti in ogni segmento (totalmente ordinato), tranne in un numero finito di punti di salto. Grazie alla

Proposizione 3.47, questo ci dice che esistono le due successioni così come richiesto; resta da mostrare che i punti di salto sono valutazioni divisoriali, e la relazione tra le molteplicità generiche. Ma questo deriva direttamente dal Lemma 3.46 e dalla Proposizione 3.50: scegliendo delle coordinate locali $(x, y)$ tali che $\nu(x) = 1$, scriviamo $\nu = \mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^k$; allora i punti di salto sono della forma $\mathrm{val}(U_j, \beta_j)_{j=0}^h$, per $h < k$, in particolare sono quelli per cui $n_{h-1} > 1$; sono dunque divisoriali, e della molteplicità generica voluta. □

**Definizione 3.53.** Definiamo la **successione approssimante** di una valutazione $\nu \in \mathcal{V}$ come $(\nu_i)_{i=0}^g$ vista nella Proposizione 3.52 nel caso che $\nu$ non sia infinitamente singolare, altrimenti come l'opportuno limite di questa procedura (ottenendo una successione infinita).

### 3.3.4 Sottigliezza

Vedremo ora un modo per legare molteplicità e distorsione di una valutazione, che ci darà un altro modo per parametrizzare $\mathcal{V}$.

**Definizione 3.54.** Sia $\nu \in \mathcal{V}$ una valutazione normalizzata. Allora definiamo la **sottigliezza** di $\nu$ come

$$A(\nu) := 2 + \int_{\nu_{\mathfrak{m}}}^{\nu} m(\mu) d\alpha(\mu), \tag{3.6}$$

dove $m$ indica la molteplicità, e $\alpha$ la distorsione. Il valore dell'integrale è definito da $\int_{\nu_{\mathfrak{m}}}^{\nu} m(\mu) d\alpha(\mu) = \int_1^t m(\nu_{C,s}) ds$, se $\nu = \nu_{C,t}$, con $\nu_{C,s}$ in accordo con le notazioni della Definizione 3.44, nel caso che $\nu$ non sia infinitamente singolare; altrimenti si definisce come un opportuno limite crescente.

**Osservazione 3.55.** Nella definizione di sottigliezza, c'è un singolare addendo 2, sicuramente non indispensabile per fare della sottigliezza una parametrizzazione. Il motivo per cui viene presa questa come definizione sarà più chiaro nel quarto capitolo, quando col Teorema 4.48 mostreremo che la sottigliezza dell'albero delle valutazioni coincide naturalmente con il parametro di Farey del grafo duale universale.

**Osservazione 3.56.** Ricordiamo che $m$ è non decrescente e a valori in $\overline{\mathbb{N}}$, dunque in realtà il calcolo di $A(\nu)$ si ridurrà ad una somma (finita o infinita a seconda di $m(\nu)$); in particolare si può calcolare facilmente la sottigliezza di una valutazione, se si conosce la sua successione approssimante $(\nu_i)_{i=0}^g$:

$$A(\nu) = 2 + \sum_{i=1}^{g+1} m_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}), \tag{3.7}$$

dove $\alpha_i = \alpha(\nu_i)$, e $m_i = m(\nu_i)$ come nella Proposizione 3.52. La formula vale anche nel caso di $\nu$ infinitamente singolare, e in questo caso la somma è infinita.

**Proposizione 3.57.** *La sottigliezza definisce una parametrizzazione $A : \mathcal{V} \to [2, \infty]$ dell'albero delle valutazioni. Inoltre:*

*(i) se $\nu$ è divisoriale, allora $A(\nu)$ è razionale;*

*(ii) se $\nu$ è irrazionale, allora $A(\nu)$ è irrazionale;*

*(iii) se $\nu$ è una valutazione di curve, allora $A(\nu) = \infty$;*

*(iv) se $\nu$ è infinitamente singolare, allora $A(\nu) \in (2, \infty]$.*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Teorema 3.42, e dall'Osservazione 3.56. $\square$

**Osservazione 3.58.** Sia $\nu_C$ una valutazione di curve, e $\nu \leq \nu_C$; notiamo che la successione approssimante per $\nu$ coincide con quella di $\nu_C$, tranne per il fatto che potrebbe essere più corta. Supponiamo che invece sia esattamente la stessa, e quindi $\nu \geq \nu_g$, e riscriviamo la (3.7) vista nell'Osservazione 3.56: $A(\nu) = 2 + \sum i = 1^g m_i(\alpha(\nu_i) - \alpha(\nu_{i-1})) + m_{g+1}\alpha(\nu) - m_{g+1}\alpha(\nu_g)$; in particolare $A(\nu) = m_{g+1}\alpha(\nu) + B$, con $B$ una qualche costante reale, $B \geq 2$ (e $m_{g+1} = m(C)$). In generale si vede facilmente che $A(\nu)$ è lineare a tratti sui segmenti (se parametrizzati con la distorsione), con discontinuità nelle $\nu_i$ i punti di salto della molteplicità.

## 3.4 Potenziali d'albero

**Definizione 3.59.** Definiamo l'insieme dei **potenziali** dell'albero delle valutazioni $\mathcal{V}$ come il più piccolo insieme di funzioni $P : \mathcal{V}_{qm} \to \mathbb{R}_+$ che contiene le funzioni $\nu \mapsto \nu(\phi)$ per ogni $\phi \in \mathbb{C}[[x, y]]$, e chiuso per combinazioni lineari positive finite, minimo e limite puntuale.

I potenziali di cui avremo bisogno saranno associati ad un elemento $\phi \in \mathbb{C}[[x, y]]$, ovvero della forma $P_\phi : \nu \mapsto \nu(\phi)$, oppure ad un ideale $I \subset \mathbb{C}[[x, y]]$, ovvero della forma $P_I : \nu \mapsto \nu(I)$; in particolare se $I = \langle \phi_i \rangle_i$, con $i$ dei generatori di $I$, allora $P_I = \min_i P_{\phi_i}$.

**Osservazione 3.60.** I potenziali sono funzioni non decrescenti dell'albero delle valutazioni: infatti lo è $P_\phi$ per ogni elemento irriducibile $\phi \in \mathbb{C}[[x, y]]$, e la non decrescenza è mantenuta per combinazioni lineari finite positive, minimi e limiti puntuali. In particolare un potenziale può essere esteso a valori in tutto $\mathcal{V}$: se $\nu$ è una fine di $\mathcal{V}$, definiamo $P(\nu) := \lim_{\mu \nearrow \nu} P(\mu)$, che è ben definito per non decrescenza di $P$; in questo caso però dobbiamo ammettere anche il valore $+\infty$.

**Proposizione 3.61.** *Sia $\phi \in \mathbb{C}[[x,y]]$, e consideriamo il potenziale $P_\phi : \nu \mapsto \nu(\phi)$. Fattorizziamo $\phi = \sum_i \phi_i^{h_i}$. Allora $P_\phi$ è localmente costante solo al di fuori di un sottoalbero finito di $\mathcal{V}$ (con fini $\nu_{\phi_i}$ per ogni $i$); inoltre $P_\phi$ è non decrescente e, per ogni segmento totalmente ordinato $\mathcal{I}$, parametrizzato tramite la distorsione, allora $P_\phi$ è concava su $\mathcal{I}$, e lineare affine a tratti con pendenza intera (non negativa).*

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima $\phi$ irriducibile. Allora per la Proposizione 3.43 abbiamo che

$$P_\phi(\nu) := \nu(\phi) = m(\phi)\alpha(\nu \wedge \nu_\phi). \tag{3.8}$$

Se $\nu \not\leq \nu_\phi$, allora $\tau := \nu \wedge \nu_\phi < \nu$. Consideriamo l'aperto $U = U_\tau(\overrightarrow{v})$ come definito in (3.1), dove $\overrightarrow{v}$ è il vettore tangente a $\tau$ rappresentato da $\nu$. Dunque $U$ è un intorno aperto di $\nu$, e per ogni $\mu \in U$ si ha che $\alpha(\mu \wedge \nu_\phi) = \alpha(\tau)$, e quindi $\mu(\phi) = \nu(\phi)$, e $P_\phi$ è localmente costante in $\nu$. D'altra parte non può essere localmente costante sul segmento $[\nu_\mathfrak{m}, \nu(\phi)]$, visto che $\nu(\phi) = m(\phi)\alpha(\nu)$, con $\alpha(\nu)$ strettamente crescente su questo segmento (vedi il Teorema 3.42).

La non decrescenza di $P_\phi$ deriva direttamente dalla (3.8).

Verifichiamo ora le ultime proprietà per $P_\phi$, e fissiamo un segmento $\mathcal{I} = [\nu_1, \nu_2]$ con $\nu_1 \leq \nu_2$. Per la concavità, dobbiamo mostrare che se $\nu \in \mathcal{I}$ è tale che $\alpha(\nu) = (1-t)\alpha(\nu_1) + t\alpha(\nu_2)$, con $t \in (0,1)$, allora $\nu(\phi) \geq (1-t)\nu_1(\phi) + t\nu_2(\phi)$. Se $\nu \leq \nu_\phi$, allora anche $\nu_1 \leq \nu_\phi$, e si ha $\nu(\phi)/m(\phi) = \alpha(\nu) = (1-t)\alpha(\nu_1) + t\alpha(\nu_2) \geq (1-t)\nu_1(\phi)/m(\phi) + t\alpha(\nu_2 \wedge \nu_\phi) = [(1-t)\nu_1(\phi) + t\nu_2(\phi)]/m(\phi)$. Se invece $\nu \not\leq \nu_\phi$, allora $\nu_2 \wedge \nu_\phi = \nu \wedge \nu_\phi \geq \nu_1 \wedge \nu_\phi$, e in questo caso $\nu(\phi)/m(\phi) = \alpha(\nu \wedge \nu_\phi) \geq (1-t)\alpha(\nu_1 \wedge \nu_\phi) + t\alpha(\nu_2 \wedge \nu_\phi) = [(1-t)\nu_1(\phi) + t\nu_2(\phi)]/m(\phi)$. Per arbitrarietà di $\nu_1$ e $\nu_2$, $P_\phi$ è concava nel senso dell'enunciato.

Per la linearità a tratti, osserviamo che se il segmento (o meglio la sua parte interna) è al di fuori del segmento $\mathcal{I}_\phi = [\nu_\mathfrak{m}, \nu_\phi]$, allora abbiamo visto che $P_\phi$ è localmente costante, e quindi costante sul segmento (in particolare la pendenza è $0 \in \mathbb{N}$). Se invece il segmento è contenuto in $\mathcal{I}_\phi$, allora abbiamo che $\nu(\phi) = m(\phi)\alpha(\nu \wedge \nu_\phi) = m(\phi)\alpha(\nu)$, e quindi $P_\phi$ è lineare anche in questo segmento, con pendenza $m(\phi) \in \mathbb{N}^*$. Segue quindi la linearità a tratti (si spezza in due il segmento generico $[\nu_1, \nu_2]$ con $\nu_1 \leq \nu_2$ in $\nu_2 \wedge \nu_\phi$).

Supponiamo ora che $\phi = \prod_i \phi_i^{h_i}$ con $\phi_i$ irriducibili. Allora $\nu(\phi) = \sum_i h_i \nu(\phi_i)$, e quindi $P_\phi$ è una combinazione lineare a coefficienti interi positivi di potenziali d'albero $P_{\phi_i}$ associati ad elementi irriducibili, per cui abbiamo dimostrato tutte le proprietà volute. Ma queste proprietà si estendono tutte per questo tipo di combinazioni lineari; in particolare si ottiene che $P_\phi$ è non localmente costante nel sottoalbero che ha come fini $\nu_{\phi_i}$ per ogni $i$. □

**Corollario 3.62.** *Sia $I$ un ideale di $\mathbb{C}[[x,y]]$, e consideriamo il potenziale $P_I : \nu \mapsto \nu(I)$. Allora $P_I$ è localmente costante al di fuori di un sottoalbero finito di $\mathcal{V}$ (con fini $\nu_{\phi_i}$, con $\phi_i$ gli elementi irriducibili in $I$, a meno di invertibili); inoltre $P_I$ è non* *decrescente e, per ogni segmento totalmente ordinato $\mathcal{I}$, parametrizzato tramite la distorsione, allora $P_\phi$ è concava su $\mathcal{I}$, e lineare affine a tratti con pendenza intera (non negativa).*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla Proposizione 3.61: infatti se $I = \langle \psi_j \rangle$, con $\psi_j$ un numero finito di generatori per $I$ (posso supporre il numero finito per noetherianità di $\mathbb{C}[[x, y]]$), allora $P_I = \min_j P_{\psi_j}$. Allora la tesi deriva dalle proprietà dimostrate nella Proposizione 3.61, visto che quelle proprietà si mantengono tutte per minimo in una famiglia finita. □

**Osservazione 3.63.** Notiamo una piccola differenza tra la Proposizione 3.61 e il Corollario 3.62: mentre nel primo caso si ha che $P_\phi$ è non localmente costante esattamente dove indicato, nel secondo caso, si sa solo che al di fuori di quell'albero finito $P_I$ è localmente costante, ma potrebbe esserlo anche dentro. Questo perché, presi due generatori, e un punto dove uno dei due non è localmente costante, il minimo potrebbe essere realizzato dal generatore localmente costante in quel punto. Quello che però si può dimostrare è che comunque $P_I$ è non localmente costante in un sottoalbero chiuso dell'albero finito già dato. Possiamo supporre che l'ideale sia generato da 2 elementi, $\phi$ e $\psi$; il caso generale si ottiene poi per induzione. Allora se $\nu$ è tale che $P_I$ non è localmente costante su $\nu$, allora almeno quello che rende il minimo in $\nu$ tra $P_\phi$ e $P_\psi$ è non localmente costante (supponiamo il primo), e quindi è lineare a tratti, concavo e con pendenza strettamente positiva su tutto $[\nu_\mathfrak{m}, \nu]$ (grazie alla Proposizione 3.61). Se per un qualche $\mu < \nu$ è $P_\psi$ a dare il minimo, sarebbe a sua volta non localmente costante su $\mu$, e si otterrebbe lo stesso risultato. Che l'albero sia chiuso è immediato: se $P_I$ è localmente costante in un punto, lo è anche in un suo intorno.

# Capitolo 4

# Il grafo duale universale

## 4.1 Costruzione del grafo duale universale

Riconsideriamo ora $\mathfrak{B}$ l'insieme delle modificazioni sull'origine, ovvero l'insieme delle funzioni $f : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$, dove $X$ è una 2-varietà complessa, e $\pi$ è una mappa olomorfa e propria, e un biolomorfismo al di fuori del divisore eccezionale $\pi^{-1}(0)$. Grazie al Teorema 1.50, ogni modificazione è una composizione finita di scoppiamenti di punti.

L'insieme $\mathfrak{B}$ ammette un naturale ordine parziale: scriveremo allora che $\pi_1 \trianglerighteq \pi_2$ se e solo se $\pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{\pi}$, con $\tilde{\pi} : X_1 \to X_2$ una certa composizione di scoppiamenti di punti (in $\pi_2^{-1}(0)$).

**Definizione 4.1.** Un poset $\mathcal{B}$ si dice **insieme diretto** se ogni sottoinsieme finito di $\mathcal{B}$ ammette un estremo superiore; si dice invece **insieme inverso** se ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{B}$ ammette un estremo inferiore.

**Lemma 4.2.** *L'insieme $\mathfrak{B}$ delle modificazioni è un insieme diretto e un insieme inverso.*

*Dimostrazione.* Vedi [FJ1, Lemma 6.1]. □

**Definizione 4.3.** Siano $\pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{B}$. Denotiamo con $\pi_1 \vee \pi_2$ l'estremo superiore di $\pi_1$ e $\pi_2$, che chiameremo **join** di $\pi_1$ e $\pi_2$ (mentre come al solito indicheremo con $\pi_1 \wedge \pi_2$ l'estremo inferiore).

### 4.1.1 Grafo duale

**Definizione 4.4.** Ad ogni $\pi \in \mathfrak{B}$ possiamo associare un **grafo duale** $\Gamma_\pi$ nel seguente modo. I vertici di $\Gamma_\pi$ sono (in bigezione con) le componenti irriducibili del divisore eccezionale $\pi^{-1}(0)$, che chiamiamo componenti eccezionali, e ne denotiamo l'insieme con $\Gamma_\pi^*$; due componenti sono legate da un'arco se e solo se hanno intersezione non vuota.

**Definizione 4.5.** Sia $\pi \in \mathfrak{B}$, e $p \in \pi^{-1}(0)$. Allora $p$ si dice **libero** (risp. **satellitare**) se $p$ è un punto regolare (risp. singolare) di $\pi^{-1}(0)$.

**Osservazione 4.6.** Decomponendo una modificazione $\pi$ in una composizione di scoppiamenti, possiamo costruire ricorsivamente $\Gamma_\pi$ come segue.

Il passo base è costituito dal singolo scoppiamento dell'origine $\pi_0$. C'è allora una sola componente eccezionale $E_0$, e quindi $\Gamma_{\pi_0}$ è costituito dal solo punto $E_0$. Passiamo alla ricorsione: posso scrivere $\pi = \pi' \circ \pi_p$, con $\pi_p$ il singolo scoppiamento di un punto $p$ in $(\pi')^{-1}(0)$, che ci da una nuova componente eccezionale $E_p$. Ci sono due tipi di scoppiamenti singoli (altrimenti detti **modificazioni elementari**) a seconda di $p$.

Se $p$ è libero, ovvero $p \in E$ per un'unica componente irriducibile $E \subset (\pi')^{-1}(0)$, allora lo scoppiamento $\pi_p$ consiste nell'aggiungere il vertice $E_p$ e l'arco tra $E$ e $E_p$. In questo caso diremo che la modificazione elementare $\pi_p$ è del **primo tipo**.

Se $p$ invece è satellitare, allora segue direttamente dalla costruzione di uno scoppiamento che $p \in E_1 \cap E_2$ per esattamente due componenti eccezionali $E_1, E_2$. Allora lo scoppiamento $\pi_p$ consiste nell'aggiungere un $\mathbb{P}^1$ al posto di $p$, che interseca $E_1$ e $E_2$ in due punti distinti, e perciò corrisponde all'aggiungere un vertice $E_p$ nell'arco tra $E_1$ e $E_2$ (che esiste per ricorsione, visto che $E_1 \cap E_2 = \{p\}$). In questo caso diremo che la modificazione elementare $\pi_p$ è del **secondo tipo**.

Da questa costruzione segue che il grafo duale di una modificazione è un albero simpliciale finito.

### 4.1.2 Il grafo duale universale

Come abbiamo visto, possiamo vedere ogni albero simpliciale (con radice) $\Gamma_\pi$ come un $\mathbb{N}$-albero non metrico (con radice) (confronta l'Osservazione 3.27), che denotiamo con $(\Gamma_\pi, \leq_\pi)$.

Se poi $\pi_1 \trianglerighteq \pi_2$, ovvero $\pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{\pi}$, per una certa composizione di scoppiamenti di punti (in $\pi_2^{-1}(0)$), allora il grafo duale $\Gamma_{\pi_1}$ si ottiene dal grafo $\Gamma_{\pi_2}$ tramite una sequenza di modificazioni elementari (di primo o secondo tipo). Questo ci da una iniezione naturale $i_{\pi_1\pi_2} : \Gamma_{\pi_2}^* \to \Gamma_{\pi_1}^*$; inoltre se $\pi_1 \trianglerighteq \pi_2 \trianglerighteq \pi_3$, allora $i_{\pi_1\pi_2} \circ i_{\pi_2\pi_3} = i_{\pi_1\pi_3}$.

Mostriamo che queste iniezioni preservano l'ordine. Per induzione basta mostrarlo quando $\pi_1 = \pi_2 \circ \pi_p$, con $\pi_p$ un singolo scoppiamento di un punto $p \in \pi_2^{-1}$.

Come abbiamo visto, possiamo avere due tipi di modificazioni elementari: di un punto libero e di un punto satellitare. Se siamo nel primo caso, allora $E_p$ il nuovo punto aggiunto è una fine dell'albero $\Gamma_{\pi_1}$, e $i_{\pi_1\pi_2}$ preserva l'ordine.

Se siamo nel secondo caso, allora $E_p$ il nuovo punto aggiunto è nell'arco che congiunge $E_1$ e $E_2$, le due componenti eccezionali che si intersecano in $p$. In particolare ci sono esattamente due vettori tangenti in $E_p$: quello rappresentato da $E_1$ e quello rappresentato da $E_2$. Negli aperti da loro individuati $i_{\pi_1\pi_2}$ è l'identità, e quindi preserva l'ordine, mentre $F_1 \leq E_1 < E_2 \leq F_2$ in $\Gamma_{\pi_2}$ se e solo se $F_1 \leq E_1 < E_p < E_2 \leq F_2$ in $\Gamma_{\pi_1}$; dunque $i_{\pi_1\pi_2}$ preserva l'ordine su tutto $\Gamma_{\pi_2}$, e la tesi è dimostrata.

**Definizione 4.7.** Sia $B$ un poset, e $(C_b, \leq_b)_{b\in B}$ una famiglia di poset indicizzati su $B$. Se per ogni $b_1 \leq b_2$ esistono dei morfismi $i_{b_2b_1} : C_{b_1} \to C_{b_2}$ che mantengono l'ordine, e tali che se $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ allora $i_{b_3b_2} \circ i_{b_2b_1} = i_{b_3b_1}$, e $i_{bb} = \mathrm{id_b}$ per ogni $b \in B$, allora la famiglia $(C_b, \leq_b)$ è detta **sistema diretto**.

Abbiamo quindi visto che $(\Gamma_\pi, \leq_\pi)_{\pi\in\mathfrak{B}}$ è un sistema diretto, con $\mathfrak{B}$ un insieme diretto. Possiamo dunque considerare il suo limite diretto (o iniettivo).

**Definizione 4.8.** Chiameremo **grafo duale universale** il limite diretto delle $(\Gamma_\pi, \leq_\pi)$, al variare di $\pi \in \mathfrak{B}$:

$$(\Gamma^*, \leq) = \varinjlim (\Gamma^*_\pi, \leq_\pi).$$

In questo caso $\Gamma^* = \bigsqcup_{\pi\in\mathfrak{B}} \Gamma^*_\pi / \sim$, dove $E_1 \in \Gamma_{\pi_1}$ e $E_2 \in \Gamma_{\pi_2}$ sono equivalenti, $E_1 \sim E_2$, se e solo se $i_{\overline{\pi}\pi_1}(E_1) = i_{\overline{\pi}\pi_2}(E_2)$, dove $\overline{\pi} = \pi_1 \vee \pi_2$ è il join di $\pi_1$ e $\pi_2$.

Mantenendo sempre queste notazioni, l'ordine parziale $\leq$ è definito da $[E_1] \leq [E_2]$ se e solo se $i_{\overline{\pi}\pi_1}(E_1) \leq_{\overline{\pi}} i_{\overline{\pi}\pi_2}(E_2)$.

**Osservazione 4.9.** Si verifica facilmente che la relazione d'equivalenza definita prima è effettivamente tale: è evidentemente riflessiva e simmetrica, mentre la transitività segue dal fatto che se $\pi_1 \trianglelefteq \pi_2 \trianglelefteq \pi_3$ allora $i_{\pi_3\pi_2} \circ i_{\pi_2\pi_1} = i_{\pi_3\pi_1}$.

In sostanza con $\Gamma^*$ stiamo considerando tutte le possibili componenti eccezionali di una qualsiasi modificazione, identificando quelle che individuano la stessa modificazione.

**Osservazione 4.10.** È molto utile notare che se ho un numero finito di elementi $\{[E_i]\}$ in $\Gamma^*$, allora esiste un $\pi \in \mathfrak{B}$ tale che posso prendere dei rappresentanti $F_i \in \Gamma^*_\pi$ (basta prendere dei rappresentanti qualsiasi nei grafi duali di alcune modificazioni $\pi_i$, e considerare poi $\pi = \bigvee_i \pi_i$ il loro join).

**Proposizione 4.11.** *Il grafo duale universale $(\Gamma^*, \leq)$ è un $\mathbb{Q}$-albero non metrico con radice $[E_0]$ il singolo scoppiamento dell'origine (o meglio la sua classe d'equivalenza).*

*Dimostrazione.* Mostriamo che per $\Gamma^*$ valgono le (T1), (T2) e la (T3), o equivalentemente la (T4), della definizione di $\mathbb{Q}$-albero non metrico con radice. Per quanto riguarda la (T1), questa è banale: $E_0$ è l'unico elemento minimale per ogni $\Gamma^*_\pi$, e quindi $[E_0]$ lo è per $\Gamma^*$.

Passiamo a (T2). Per ogni $E \in \Gamma^*$, consideriamo l'insieme $\mathcal{S}_E := \{F \in \Gamma^* \mid F \leq E\}$, e dimostriamo che è isomorfo ad un intervallo in $\mathbb{Q}$. Grazie al Lemma 3.28, questo equivale a dimostrare che $\mathcal{S}_E$ è totalmente ordinato, numerabile e senza salti. È totalmente ordinato perché lo è $\mathcal{S}_E \cap \Gamma^*_\pi$ per ogni $\pi \in \mathfrak{B}$. Mostriamo che non ci possono essere salti: supponiamo per assurdo che esistano $E_1 < E_2 \leq E$ in $\Gamma^*$ tali che non esista nessuna $F \in \Gamma^*$ tale che $E_1 < F < E_2$. Allora $E_1$ ed $E_2$ sono vertici adiacenti in un qualche $\Gamma^*_\pi$; possiamo dunque scoppiare il punto di intersezione di $E_1$ ed $E_2$ (che è quindi satellitare), ed il vertice $F$ aggiunto con questa operazione sarebbe tale che $E_1 < F < E_2$, il che è assurdo.

Rimane da dimostrare che $\mathcal{S}_E$ è numerabile. Sia allora $\pi \in \mathfrak{B}$ la minima modificazione tale che $E \in \Gamma^*_\pi$. Vogliamo mostrare che ogni $F \in \mathcal{S}_E$ può essere ottenuta tramite un numero finito di scoppiamenti di punti satellitari, a partire da $\mathcal{S}_E \cap \Gamma^*_\pi$. In particolare definiamo una successione di modificazioni crescenti $\pi = \pi_0 \trianglelefteq \pi_1 \trianglelefteq \pi_2 \trianglelefteq \dots$ ricorsivamente, descrivendo i loro grafi duali associati. Una volta definito $\pi_n$, consideriamo $\pi_{n+1} = \pi_n \circ \tilde{\pi}_n$, dove $\tilde{\pi}_n$ è la composizione degli scoppiamenti di tutti i punti satellitari di $\mathcal{S}_E \cap \Gamma^*_{\pi_n}$. Allora ogni $\Gamma_{\pi_n}$ è finito, e $\mathcal{S}_E = \bigcup_n \left(\mathcal{S}_E \cap \Gamma^*_{\pi_n}\right)$ è dunque numerabile.

Abbiamo dunque dimostrato (T2); mostriamo ora (T4). Consideriamo allora un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \Gamma^*$ totalmente ordinato e illimitato; dobbiamo mostrare che esiste una successione crescente in $\mathcal{S}$ senza maggiorante in $\Gamma^*$. Partiamo da un $E_1 \in \mathcal{S}$, e consideriamo il minimo $\pi_1 \in \mathfrak{B}$ tale che $E_1 \in \Gamma^*_1 := \Gamma^*_{\pi_1}$. Possiamo supporre (a meno di sostituire $E_1$), che $E_1 = \max \Gamma^*_1 \cap \mathcal{S}$ (che è totalmente ordinato, e quindi ammette massimo). Siccome $\mathcal{S}$ è illimitato, esiste un $E_2 > E_1$; l'aver chiesto $E_1 = \max \Gamma^*_1 \cap \mathcal{S}$ implica che la modificazione minimale $\pi_2 \in \mathfrak{B}$ tale che $E_2 \in \Gamma^*_2 := \Gamma^*_{\pi_2}$ è ottenuta da $\pi_1$ tramite una composizione finita di scoppiamenti, il primo dei quali deve essere di un punto libero (in particolare $\pi_2 \trianglerighteq \pi_1$). Ricorsivamente si costruisce una successione $(E_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{S}$, con la proprietà che la modificazione minima $\pi_n$ per ottenere $n$ ha almeno $n$ scoppiamenti di punti liberi. Se per assurdo ci fosse un elemento $E \in \Gamma^*$ che maggiori questa successione, la modificazione minima $\pi \in \mathfrak{B}$ tale che $E \in \Gamma^*_\pi$ dovrebbe essere composta da un numero infinito di scoppiamenti di punti liberi: assurdo.

Dunque $\Gamma^*$ è un $\mathbb{Q}$-albero non metrico con radice $E_0$.

□

Come abbiamo visto nella Proposizione 3.29, possiamo associare in maniera canonica ad un $\mathbb{Q}$-albero (non metrico con radice), un $\mathbb{R}$-albero (non metrico con radice), in modo tale che i punti aggiunti per completare $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$ siano tutti punti regolari.

**Definizione 4.12.** Denotiamo con $\Gamma^\circ$ il completamento di $\Gamma^*$ dato dalla Proposizione 3.29, e con $\Gamma$ il suo completamento (nel senso di un albero non metrico con radice), $\Gamma = \overline{\Gamma^\circ}$. Chiameremo $\Gamma$ il **grafo duale universale** (con abuso di nomenclatura, cercheremo di distinguere chiamando $\Gamma^*$ l'insieme dei punti di diramazione del grafo duale universale).

Spesso ometteremo le classi d'equivalenza sia del completamento, sia della definizione di $\Gamma^*$, per non appesantire la notazione. Inoltre indicheremo con $\Gamma^*$ la sua immersione in $\Gamma$, dimenticandoci della mappa d'immersione.

**Proposizione 4.13.** *Il grafo duale universale $\Gamma$ è un albero non metrico (con radice $E_0$) completo, i cui punti di diramazione sono esattamente quelli di $\Gamma^*$, mentre i punti regolari sono tutti e soli i punti di $\Gamma^\circ \setminus \Gamma^*$, e le terminazioni sono tutti e soli i punti di $\Gamma \setminus \Gamma^\circ$.*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla Proposizione 4.11 e dalla Proposizione 3.29. □

### 4.1.3 Spazi tangenti

La prossima proposizione permette di dare un'interpretazione geometrica dello spazio tangente ad un elemento (di diramazione) del grafo duale universale.

**Proposizione 4.14.** *Sia $E \in \Gamma^*$, e sia $\pi \in \mathfrak{B}$ tale che $E \in \Gamma^*_\pi$. Per ogni $p \in E$, sia $E_p$ la componente eccezionale ottenuta dallo scoppiamento in $p$, e sia $\overrightarrow{v_p}$ il vettore tangente in $E$ rappresentato da $E_p$. Allora la mappa $p \mapsto \overrightarrow{v_p}$ da una bigezione tra $E$ e $T_E\Gamma^*$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo un vettore $\overrightarrow{v}$ tangente in $E$, rappresentato da una certa componente $F$, e consideriamo (grazie all'Osservazione 4.10) una modificazione $\pi'$ tale che $E, F \in \Gamma^*_{\pi'}$ (con $\pi' \trianglerighteq \pi$). C'è allora un'unica componente eccezionale $E' \in (E, F] \cap \Gamma^*_{\pi'}$ che interseca $E$ (in un certo punto $p$); ne segue che $E'$ rappresenta $\overrightarrow{v}$. Ma anche $E_p$ rappresenta $\overrightarrow{v}$, dove $E_p$ è ottenuta scoppiando il punto $p \in E \cap E'$. Ne segue che la $p \mapsto \overrightarrow{v_p}$ è surgettiva. Per dimostrare la sua iniettività, consideriamo $E_p \neq E_q$. In particolare considerando la modificazione $\tilde{\pi}$ ottenuta da $\pi$ e facendo i due scoppiamenti in $p \neq q$, abbiamo che $E, E_p, E_q \in \Gamma^*_{\tilde{\pi}}$, dove $E_p$ ed $E_q$ rappresentano due vettori diversi in $E$. Dunque $\overrightarrow{v_p}$ e $\overrightarrow{v_q}$ rappresentano vettori tangenti diversi anche visti in $\Gamma^*$ (per costruzione il tangente visto in $\Gamma^*_\pi$ si immerge in quello visto in $\Gamma^*$). □

## 4.2 Punti infinitamente vicini

**Definizione 4.15.** Un punto $p$ è detto **punto infinitamente vicino** (all'origine) se $p \in \pi^{-1}(0)$ per una qualche modificazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ (o $p = 0$ l'origine di $\mathbb{C}^2$).

**Definizione 4.16.** Con **successione di punti infinitamente vicini** indicheremo una successione $(p_j)_{j=0}^n$, con $0 \leq n \leq \infty$, di punti infinitamente vicini all'origine costruiti per ricorsione nel modo seguente.

Per il passo base, $p_0 = 0$ è l'origine di $\mathbb{C}^2$ e $\tilde{\pi}_0 : X_0 \to (\mathbb{C}^2, 0)$ è lo scoppiamento dell'origine, di divisore eccezionale $E_0$. Per la ricorsione, supponiamo di avere $j < n$, e di aver definito $p_i, \tilde{\pi}_i : X_i \to X_{i-1}$ e $E_i$ per $i \leq j$. Allora $p_{j+1}$ è un punto in $E_j$, $\tilde{\pi}_{j+1} : X_{j+1} \to X_j$ è lo scoppiamento di $p_{j+1}$ in $X_j$, e $E_{j+1} = \tilde{\pi}_{j+1}^{-1}(p_{j+1})$ è il divisore eccezionale di $\tilde{\pi}_{j+1}$.

Chiameremo inoltre $n$ la **lunghezza** della successione $\overline{p}$.

### 4.2.1 Successione di punti infinitamente vicini e valutazioni di Krull

Mostriamo ora come associare ad una valutazione di Krull (centrata) su $\mathbb{C}[[x, y]]$ una successione di punti infinitamente vicini (all'origine), che denoteremo con $\Pi[\nu]$.

**Definizione 4.17.** Consideriamo una valutazione di Krull (centrata) $\nu$ su $R = \mathbb{C}[[x, y]]$. Il centro di $\nu$ in $\mathbb{C}^2$ è, praticamente per definizione, l'origine, che chiamo $p_0 = 0$. Ora consideriamo $\tilde{\pi}_0 : X_0 \to (\mathbb{C}^2, p_0)$ lo scoppiamento di $p_0$, e solleviamo $\nu$ ad una valutazione in $X_0$. Consideriamo allora il centro di $\nu$ in $X_0$. Ricordando il Teorema 1.52, ci sono due possibilità:

(i) o $\nu$ ha come centro la componente irriducibile $E_0$, e in questo caso la costruzione termina, e $\Pi(\nu) = (p_0)$ (è il caso della valutazione di molteplicità $\nu_{\mathfrak{m}}$);

(ii) o $\nu$ ha come centro un punto $p \in E_0$, e in questo caso definiamo $p_1 := p$, e continuiamo il procedimento.

Abbiamo mostrato dunque il passo base di una ricorsione per costruire una successione di punti infinitamente vicini associata ad una valutazione di Krull.

Il passo ricorsivo è analogo: supponiamo di aver definito $p_1, \ldots p_n$. Consideriamo allora lo scoppiamento di $p_n$ ottenendo $\tilde{\pi}_n : X_n \to X_{n-1}$. Sempre per il Teorema 1.52, ci sono due possibilità:

(i) o $\nu$ ha come centro la componente irriducibile $E_n = \tilde{\pi}_n^{-1}(p_n)$, e in questo caso la costruzione termina;

(ii) o $\nu$ ha come centro un punto $p \in E_n$, e in questo caso definiamo $p_{n+1} := p$, e continuiamo il procedimento.

Otteniamo così una successione (finita o infinita) $\Pi[\nu] = (p_j)_{j=0}^n$, $0 \leq n \leq \infty$, detta la **successione di punti infinitamente vicini** associata alla valutazione $\nu$.

Il procedimento appena visto può essere invertito:

**Definizione 4.18.** Sia $\overline{p} = (p_j)_{j=0}^n$ una successione di punti infinitamente vicini (all'origine). Manteniamo la solita notazione, e indichiamo con $\pi_j = \tilde{\pi}_0 \circ \ldots \circ \tilde{\pi}_j$ la modificazione $\pi_j : X_j \to (\mathbb{C}^2, 0)$ fatta dai primi $j+1$ scoppiamenti.

Definiamo un anello di valutazione $R_{\overline{p}}$. Se $n < \infty$, consideriamo $R_{\overline{p}} = \{\phi \in K \mid \pi_n^* \phi \in \mathcal{O}_{X_n, E_n}\}$, con $\mathcal{O}_{X_n, E_n}$ l'anello delle funzioni regolari in $E_n$. Se $n = \infty$, allora dichiariamo $\phi \in R_{\overline{p}}$ se e solo se esiste $j \geq 1$ tale che $\pi_j^* \phi$ sia regolare in $p_{j+1}$; analogamente, se con $\overline{p}_k$ indico la successione troncata al termine $p_k$, allora $R_{\overline{p}} = \bigcup_k R_{\overline{p}_k}$, che è un'unione crescente di anelli.

Abbiamo già visto che $R_{\overline{p}}$ è un anello nel caso di $n < \infty$, e segue quindi anche per $n = \infty$.

Si verifica poi che è anche un anello di valutazione: se $\phi$ ha termine noto (ovvero è un'unità di $R = \mathbb{C}[x, y]$), allora è regolare in 0, e quindi appartiene ad ogni $R_{\overline{p}}$. Altrimenti o $\phi$ o $\phi^{-1}$ mi danno una curva per l'origine, che può essere resa liscia a meno di una modificazione finita.

Allora definiamo la **valutazione di Krull** associata alla successione di punti infinitamente vicini $\overline{p}$, che denotiamo con $\mathrm{val}[\overline{p}]$, come la valutazione di Krull associata all'anello di valutazione $R_{\overline{p}}$, tramite l'Osservazione 1.33.

**Proposizione 4.19.** *La mappa $\overline{p} \mapsto \mathrm{val}[\overline{p}]$ è una bigezione tra le successioni di punti infinitamente vicini e $\mathcal{V}_K$ le valutazioni di Krull centrate, con inversa $\nu \mapsto \Pi[\nu]$.*

*Dimostrazione.* Vedi [FJ1, pag. 23] □

**Definizione 4.20.** Sia $C$ una curva irriducibile, e $\nu_C$ la valutazione della curva $C$. ad essa è associata la successione di punti infinitamente vicini $\Pi[\nu_C]$, che chiameremo **successione di punti infinitamente vicini associata** a $C$, e a volte denoteremo con $\Pi[C]$.

**Osservazione 4.21.** La successione di punti infinitamente vicini associata ad una curva irriducibile $C$ può essere costruita ricorsivamente come segue: $p_0 = 0$ è l'origine, mentre $p_{j+1}$ è l'intersezione tra $E_j$ il divisore eccezionale dello scoppiamento in $p_j$ e $\tilde{C}_j$ la trasformata propria di $C$ rispetto alla modificazione associata ai punti infinitamente vicini da $p_0$ a $p_j$.

**Corollario 4.22.** *Per ogni valutazione di Krull $\nu$, sono equivalenti:*

*(i) esiste una modificazione $\pi$ e una componente eccezionale $E$ tale che $\nu = \nu_E$;*

*(ii) $\nu$ è divisoriale;*

*(iii) la successione $\Pi[\nu]$ di punti infinitamente vicini associata a $\nu$ è finita.*

*Dimostrazione.* Chiaramente dalla costruzione, segue che (iii) implica (i). D'altra parte ogni valutazione che soddisfa (i) deve essere divisoriale nel senso delle SKP: infatti il gruppo dei valori è isomorfo a $\mathbb{Z}$ come insieme ordinato, e quindi $\mathrm{rk}(\nu) = \mathrm{ratrk}(\nu) = 1$, ovvero è divisoriale o infinitamente singolare, ma non può essere infinitamente singolare (ad esempio il gruppo dei valori è finitamente generato su $\mathbb{Z}$); quindi (i) implica (ii). Mostriamo allora che (ii) implica (iii), concludendo la dimostrazione.

Sia per assurdo allora $\nu$ divisoriale e $\Pi[\nu]$ infinita. Consideriamo una generica $\phi \in R_\nu \setminus \mathfrak{m}_\nu$. Allora per costruzione $\pi_j^*\phi$ è regolare in $p_{j+1}$ per $j$ abbastanza grande. Siccome $\phi \notin \mathfrak{m}_\nu$, allora è invertibile in $R_\nu$, e a meno di aumentare $j$ possiamo supporre che anche $\pi_j^*\phi^{-1}$ sia regolare in $p_{j+1}$. Questo implica che $\pi_j^*\phi$ non si annulla in $p_j$, e quindi $\phi \sim \phi(0)$ in $k_\nu := R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$. Il campo dei residui di $\nu$ è perciò isomorfo a $\mathbb{C}$, e quindi $\mathrm{trdeg}(\nu) = 0$, il che è assurdo (per il Teorema 2.44). □

### 4.2.2 Classificazione

Per i risultati di questa sottosezione rimandiamo al [FJ1, Section 6.2].

**Definizione 4.23.** Sia $\overline{p} = (p_j)_{j=0}^n$, con $0 \leq n \leq \infty$, una successione di punti infinitamente vicini. Allora $\overline{p}$ si dice di tipo:

0. se $n < \infty$;

1. se $n = \infty$ e $\overline{p}$ contiene infiniti punti liberi e infiniti punti satellitari;

2. se $n = \infty$, contiene solo un numero finito di punti liberi, infiniti punti satellitari, e non è del tipo 3;

3. se $n = \infty$, contiene solo un numero finito di punti liberi, e esiste un (unico) $j_0 \geq 1$ tale che se $j > j_0$, allora $p_{j+1}$ è il punto satellitare definito dall'intersezione tra $E_j$ e la trasformata propria di $E_{j_0}$ (rispetto alla composizione degli scoppiamenti dei $p_i$ con $j_0 \leq i \leq j$).

4. se $n = \infty$ e contiene solo un numero finito di punti satellitari.

**Definizione 4.24.** Fissiamo una successione di punti infinitamente vicini $\overline{p} = (p_j)_{j=0}^{n}$ del tipo 0 (ovvero $n < \infty$). sia $\pi_n \in \mathfrak{B}$ la composizione di scoppiamenti di $p_0, \ldots p_n$, e definiamo $\gamma(\overline{p}) \in \Gamma^*$ come la componente eccezionale in $\Gamma^*_{\pi_n}$ relativa allo scoppiamento di $p_n$.

**Proposizione 4.25.** *La mappa $\overline{p} \mapsto \gamma(\overline{p})$ è una bigezione tra le successioni di punti infinitamente vicini di tipo* 0 *e gli elementi di* $\Gamma^*$.

**Proposizione 4.26.** *Sia $\overline{p} = (p_j)_{j=0}^{\infty}$ una successione di punti infinitamente vicini di lunghezza infinita, non del tipo* 3*. Definiamo il troncamento alla lunghezza $n$ come $\overline{p}_n = (p_j)_{j=0}^{n}$, per $n < \infty$. Allora la successione $\gamma(\overline{p}_n)$ converge debolmente in $\Gamma$ ad un elemento $\gamma(\overline{p})$. Inoltre:*

*(i)* $\gamma(\overline{p})$ *è una fine in* $\Gamma$ *se e solo se* $\overline{p}$ *è di tipo* 1 *o* 4*;*

*(ii)* $\gamma(\overline{p})$ *è un punto regolare in* $\Gamma$ *se e solo se* $\overline{p}$ *è di tipo* 2.

*La mappa $\overline{p} \mapsto \gamma(\overline{p})$ dà una bigezione tra le successioni di punti infinitamente vicini non del tipo* 3 *e* $\Gamma$.

**Proposizione 4.27.** *Sia $\overline{p} = (p_j)_{j=0}^{\infty}$ una successione di punti infinitamente vicini del tipo* 3*. Con le notazioni analoghe a quelle della Proposizione 4.26, la successione $\gamma(\overline{p}_n) \in \Gamma^*$ converge debolmente ad un elemento $\gamma(\overline{p}) \in \Gamma^*$. Per $n$ abbastanza grande, si ha $[\gamma(\overline{p}), \gamma(\overline{p}_{n+1})] \subset [\gamma(\overline{p}), \gamma(\overline{p}_n)]$: in particolare per $n$ abbastanza grande i $\gamma(\overline{p}_n)$ definiscono lo stesso vettore tangente in $\gamma(\overline{p})$, che scriviamo come $\overrightarrow{v}(\overline{p})$.*

*La mappa $\overline{p} \mapsto \overrightarrow{v}(\overline{p})$ da una bigezione tra le successioni di punti infinitamente singolari del tipo* 3 *e i vettori tangenti dei punti di $\Gamma^*$ (ovvero dei punti di diramazione di $\Gamma$).*

**Proposizione 4.28.** *La successione $\overline{p} = \Pi[C]$ di punti infinitamente vicini associata ad una curva irriducibile $C$ è di tipo* 4*. Viceversa, ogni successione di punti infinitamente vicini di tipo* 4 *è associata ad un'unica curva irriducibile $C$.*

# 4.3 Parametrizzazioni

## 4.3.1 Peso di Farey e parametro di Farey

**Definizione 4.29.** Associamo ad ogni elemento $E \in \Gamma^*$ un vettore $(a(E), b(E)) \in (\mathbb{N}^*)^2$, che chiameremo **peso di Farey** di $E$.

Definiremo $(a, b)$ su ogni $\Gamma^*_\pi$, con $\pi \in \mathfrak{B}$, ricorsivamente sulla cardinalità di $\Gamma^*_\pi$, per poi notare che questa relazione passa anche al limite diretto $\Gamma^*$.

Iniziamo dal passo base; se $\pi_0$ è il singolo scoppiamento dell'origine, in modo tale che $\Gamma_{\pi_0}$ consiste di un solo punto $E_0$, definiamo allora $(a(E_0), b(E_0)) := (2, 1)$.

Altrimenti, supponiamo di avere definito $(a, b)$ su $\Gamma^*_\pi$, e consideriamo $\tilde{\pi} = \pi \circ \pi_p$, con $\pi_p$ lo scoppiamento di un punto $p \in \pi^{-1}(0)$. Allora la modificazione è di tipo 1 o 2 (risp. se $p$ è libero o satellitare). In entrambi i casi, se $E \in i_{\tilde{\pi}\pi}(\Gamma^*_\pi)$ (ovvero se non è il vertice che sto aggiungendo), allora definisco $(a, b)$ come il valore già definito per $E$ come elemento di $\Gamma^*_\pi$. Nel caso che $E$ sia il vertice che sto aggiungendo passando da $\Gamma^*_\pi$ a $\Gamma^*_{\tilde{\pi}}$:

se $p$ è libero, allora esiste un'unica componente eccezionale $F \in \Gamma^*_\pi$ tale che $p \in F$, e definisco $(a(E), b(E)) := (a(F) + 1, b(F))$;

se $p$ è satellitare, allora esistono esattamente due componenti eccezionali $F_1, F_2 \in \Gamma^*_\pi$ tali che $\{p\} = F_1 \cap F_2$, e definiamo $(a(E), b(E)) := (a(F_1)+a(F_2), b(F_1)+b(F_2))$.

**Osservazione 4.30.** Che il peso di Farey sia ben definito su $\Gamma^*$ segue direttamente dalla definizione: se $E_1 \sim E_2$, ovvero se coincidono quando viste nel grafo associato al join delle due modificazioni alle quali appartengono, allora lì devono assumere lo stesso valore. Ma il peso di Farey rimane invariato per inclusioni dei grafi (per definizione).

**Definizione 4.31.** Sia $E \in \Gamma^*$ di peso di Farey $(a(E), b(E))$. Allora definiamo il **parametro di Farey** di $E$ come $A(E) := a(E)/b(E)$.

**Proposizione 4.32.** *Il parametro di Farey $A$ è una parametrizzazione per il $\mathbb{Q}$-albero $\Gamma^*$.*

*Dimostrazione.* Per mostrare che $A$ è strettamente crescente su $\Gamma^*$, basta mostrarlo su $\Gamma^*_\pi$ per ogni $\pi \in \mathfrak{B}$. Questa verifica segue direttamente procedendo per induzione sul numero di modificazioni elementari. Per mostrare invece che $A$ è effettivamente una parametrizzazione, basta riprendere la dimostrazione della Proposizione 4.11, in particolare del fatto che un intervallo in $\Gamma^*$ è numerabile. In quel caso, procedendo per induzione sulle modificazioni lì costruite, si ottiene la tesi. □

**Corollario 4.33.** *Il parametro di Farey $A$ si estende ad una parametrizzazione del grafo duale universale $\Gamma$.*

*Dimostrazione.* Segue dalla Proposizione 4.32, e dalla Proposizione 3.29. □

### 4.3.2 Molteplicità

Possiamo usare il peso di Farey per definire un concetto di molteplicità nel grafo duale universale.

**Definizione 4.34.** Sia $E \in \Gamma^\circ$. Si definisce la **molteplicità** di $E$ come

$$m(E) := \min\{b(F) \mid F \in \Gamma^*, F \geq E\},$$

dove $(a(F), b(F))$ indica il peso di Farey di $F$. Per definizione $m(E)$ è una funzione crescente a valori in $\mathbb{N}$. Si può quindi estendere la $m(E)$ anche per $E \in \Gamma \setminus \Gamma^\circ$ una fine (prendendo il limite di $m(F)$ per $F$ che cresce fino ad $E$); in questo caso bisogna ammettere anche il valore $\infty$, ottenendo così una funzione a valori in $\overline{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$.

**Lemma 4.35.** *Sia $E \in \Gamma^*$, e supponiamo che $F$ sia ottenuto da $E$ tramite lo scoppiamento di un punto libero $p \in E$. Allora $m(F) = b(F) = b(E)$. Inoltre la molteplicità è costante (uguale a $b(E)$) su tutto il segmento $(E, F]$ (in $\Gamma$).*

*Dimostrazione.* Sia $(a, b)$ il peso di Farey di $E$. $F$ è ottenuto da uno scoppiamento del primo tipo, e quindi per definizione il suo peso di Farey è $(a+1, b)$. In particolare $b(F) = b(E)$. Dimostriamo ora che $m(F) = b(F)$; $m(F) \leq b(F)$ per definizione, quindi resta da provare la disuguaglianza opposta. Consideriamo $G \geq F$: in particolare la successione di punti infinitamente vicini associata a $G$ prolunga quella di $F$, iniziando con un punto libero (se fosse satellitare, avremmo che $F \wedge G < F$). Ne segue che $b(G) \geq b(F)$ (le due componenti dei pesi di Farey non fanno che aumentare aggiungendo scoppiamenti), questo per ogni $G \geq F$, quindi ne segue che $m(F) \geq b(F)$, e dunque la tesi.

Inoltre, se $G \in (E, F]$, allora come prima la successione di punti infinitamente vicini associata a $G$ prolunga quella di $E$, iniziando con un punto libero, e $m(G) \geq b(E)$. Ma la molteplicità è crescente, e su $F$ assume il valore $m(F) = b(F) = b(E)$, e dunque su tutto il segmento $(E, F]$ è costante, uguale a $b(E)$. □

Essendo la molteplicità crescente e a valori in $\mathbb{N}$, anche in $\Gamma^\circ$, come nell'albero delle valutazioni, abbiamo un concetto di successione approssimante (estendibile a tutto $\Gamma$, a patto di prendere successioni infinite). Vediamo cosa succede in particolare per un elemento $E \in \Gamma^*$.

**Proposizione 4.36.** *Sia $E \in \Gamma^*$. Allora esistono degli unici $E_0, \ldots, E_g$ crescenti in $\Gamma^*$, tali che*

$$1 = m(E_0) < m(E_1) \ldots < m(E_g) < m(E),$$

*e tale che la molteplicità sia costante in $(E_i, E_{i+1}]$ per ogni $i = 0, \ldots, g$.*

*Dimostrazione.* Come abbiamo già detto, segue direttamente dal fatto che la molteplicità è una funzione crescente a valori in $\mathbb{N}^*$. □

**Definizione 4.37.** Definiamo la **successione approssimante** di una componente eccezionale $E \in \Gamma^*$ come $(E_i)_{i=0}^g$ vista nella Proposizione 4.36.

**Osservazione 4.38.** Grazie al Lemma 4.35, possiamo rendere più esplicita la costruzione della successione approssimante di una componente eccezionale. Consideriamo allora $E$, una componente eccezionale associata ad una successione di punti infinitamente vicini $\overline{p} = (p_j)_{j=0}^n$. Chiamiamo con $(F_j)_{j=0}^n$ le componenti eccezionali associate agli scoppiamenti dei punti $p_j$ (in particolare $E = F_n$). Se $p_j$ è libero (e $j \geq 1$), allora per il Lemma 4.35 sappiamo che la molteplicità è costante su tutto il segmento $(F_{j-1}, F_j]$, con $m(F_j) = b(F_j) = b(F_{j-1})$. Induttivamente quindi se hai una serie di punti liberi, la molteplicità rimane invariata. D'altra parte se hai un punto satellitare, allora $F_{j-2} < F_j < F_{j-1}$, e quindi $m(F_j) = m(F_{j-1})$, e ancora non ho un salto. Però $b(F_j) = b(F_{j-1}) + b(F_{j-1}) > b(F_{j-1})$: non appena si incontra un altro punto $p_k$ libero, allora $m(F_k) = b(F_k) = b(F_{k-1}) > b(F_{j-1}) = m(F_{j-1})$, e in questo caso c'è un salto. Ricapitolando: c'è un salto ogni volta che si passa da un punto satellitare ad un punto libero.

Inoltre tramite questa costruzione, si può vedere (per induzione vedendo cosa succede al peso di Farey) che non solo le molteplicità della successione approssimante sono crescenti, ma si dividono l'un l'altra, come nel caso della successione approssimante e della molteplicità nel caso dell'albero delle valutazioni.

**Corollario 4.39.** *Un elemento in $\Gamma$ ha molteplicità infinita se e solo se è associato ad una successione di punti infinitamente vicini di tipo* 1.

*Dimostrazione.* Segue direttamente dall'Osservazione 4.38: l'unico modo per far sì che la molteplicità cresca è che la successione di punti infinitamente vicini sia infinita, e che abbia infiniti passaggi tra punti liberi e punti satellitari, ovvero infiniti punti liberi e infiniti punti satellitari, ovvero che sia del tipo 1. □

Come nel caso dell'albero delle valutazioni, possiamo estendere la molteplicità anche ai vettori tangenti, da cui ricavare una molteplicità generica di una componente eccezionale.

**Definizione 4.40.** Sia $E \in \Gamma^*$, e $\overrightarrow{v} \in T_E\Gamma^*$. Definiamo la **molteplicità** di $\overrightarrow{v}$, che denotiamo con $m(\overrightarrow{v})$, nel seguente modo: se $\overrightarrow{v}$ è rappresentato da $E_0$ la radice di $\Gamma^*$, allora $m(\overrightarrow{v}) := m(E)$; altrimenti,

$$m(\overrightarrow{v}) = \min\{m(F) \mid F \text{ rappresenta } \overrightarrow{v}\}.$$

**Proposizione 4.41.** *Sia $E \in \Gamma^*$. Allora $m(\overrightarrow{v}) = b(E)$ per tutti i vettori tangenti $\overrightarrow{v} \in T_E\Gamma^*$, tranne (al più) 2, per cui $m(\overrightarrow{v}) = m(E)$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima $E = E_0$ la radice di $\Gamma^*$. Se $F$ è un altra componente eccezionale, è ottenuta da una successione di punti eccezionali partendo da un punto $p_1 \in E_0$ libero, e dunque per il Lemma 4.35 $m(F) = b(E_0) = 1 = m(E_0)$, e tutti i vettori tangenti $\overrightarrow{v}$ hanno molteplicità $m(\overrightarrow{v}) = m(E_0) = 1$.

Supponiamo allora che $E > E_0$, e ancora una volta consideriamo una generica componente eccezionale $F$. Se $F \not\geq E$, allora rappresenta lo stesso vettore di $E_0$, e per definizione $m[E_0] = m(E)$. Supponiamo allora che $F \geq E$. Allora la successione di punti infinitamente vicini associata ad $F$ è un prolungamento di quella di $E$, che parte con uno scoppiamento di un punto $p \in E$. In $E$ ci sono o 1 o 2 punti satellitari. Se siamo nel primo caso, allora $E$ è stata ottenuta dallo scoppiamento di un punto libero, e per l'Osservazione 4.38 e il Lemma 4.35 otteniamo che $m(F) = b(F) = b(E) = m(E)$, e dunque tutti i vettori tangenti in $E$ hanno la stessa molteplicità $m(\overrightarrow{v}) = m(E) = b(E)$. Se siamo nel secondo caso, allora $E$ è stata ottenuta dallo scoppiamento di un punto satellitare, diciamo in una componente eccezionale $G$. Allora ci sono due vettori, quelli rappresentati dagli scoppiamenti dei due punti satellitari, che hanno, grazie all'Osservazione 4.38, molteplicità $m(\overrightarrow{v}) = m(E)$, mentre tutti gli altri vettori ottenuti dallo scoppiamento dei punti liberi di $E$ hanno una molteplicità $m(\overrightarrow{v}) = m(F) = b(F) = b(E) > m(E)$ (sempre grazie all'Osservazione 4.38). □

**Definizione 4.42.** In analogia al caso dell'albero delle valutazioni, chiamiamo $b(E)$ la **molteplicità generica** della componente eccezionale $E \in \Gamma^*$.

Abbiamo visto come ad una curva irriducibile $C$ sia possibile associare una fine di $\Gamma$. Scriviamo con $m_\Gamma(C)$ la molteplicità di $C$ vista come elemento di $\Gamma$ (vedremo che in realtà coincide con $m(C)$). Allora:

**Corollario 4.43.** *Sia $C$ è una curva irriducibile, $\pi \in \mathfrak{B}$, e $\tilde{C}$ la trasformata propria di $C$ tramite $\pi$. Se $\tilde{C}$ interseca $\pi^{-1}(0)$ in un punto libero $p \in E$, allora $m_\Gamma(C) \geq b(E)$, con l'uguaglianza se e solo se $\tilde{C}$ è liscia e trasversa a $E$ in $p$.*

*Dimostrazione.* Sia $(q_j)_{j=0}^{\infty}$ la successione di punti infinitamente vicini associata a $\tilde{C}$ (cioè quella associata a $C$, a partire da $q_0 = p$), e sia $F_j$ il divisore eccezionale ottenuto scoppiando $q_j$. Allora $m_\Gamma(C) = \lim b(F_j)$. Per il Lemma 4.35 abbiamo che $b(F_j) \geq b(E)$, con l'uguaglianza se e solo se tutti i punti $(q_j)$ sono liberi. Dunque $m_\Gamma(C) \geq b(E)$, con l'uguaglianza se e solo se tutti i punti $(q_j)$ sono liberi. Ma quest'ultima condizione coincide con l'avere $\tilde{C}$ liscia e trasversa ad $E$ in $p$. □

**Corollario 4.44.** *Per ogni $E \in \Gamma^\circ$ si ha $m(E) = \min\{m_\Gamma(C) \mid C > E\}$.*

*Dimostrazione.* Che valga il $\leq$ deriva direttamente dalla definizione e dal Corollario 4.43. Per provare la disuguaglianza opposta, basta mostrare che ogni $E \in \Gamma^*$ sia dominata da una curva $C$ tale che $m_\Gamma(C) = b(E)$. Per far ciò, consideriamo $\pi \in \mathfrak{B}$ tale che $E \in \Gamma^*_\pi$, e sia $C'$ una curva liscia e trasversa a $E_0$ in $p$. Allora per il Corollario 4.43 $C = \pi(C')$ soddisfa le richieste fatte. □

## 4.4 L'albero delle valutazioni e il grafo duale universale

In questa sezione riusciremo finalmente a dimostrare l'isomorfismo tra l'albero delle valutazioni e il grafo duale universale, nel senso più forte possibile; avremo così un passaggio tra le proprietà algebriche delle valutazioni, e quelle geometriche delle modificazioni e delle componenti eccezionali. Prima però sarà necessario esporre alcuni risultati necessari per la dimostrazione dell'isomorfismo.

**Proposizione 4.45.** *Sia $\pi \in \mathfrak{B}$, e $E \in \Gamma_\pi^*$ con peso di Farey $(a,b)$. Allora:*

$$\begin{aligned} b &= \operatorname{div}_E(\pi^*\mathfrak{m}), \\ a &= 1 + \operatorname{div}_E(J\pi), \end{aligned}$$

*dove con $J\pi$ si indica il determinante dello jacobiano di $\pi$.*

*In particolare dalla interpretazione di $b$ si ottiene:*

$$\pi_* \operatorname{div}_E = b\nu_E.$$

*Dimostrazione.* Vedi [FJ1, Proposition 6.26]. □

**Lemma 4.46.** *Sia $\pi \in \mathfrak{B}$, e $E \in \Gamma_\pi^*$ con peso di Farey $(a,b)$. Prendiamo un punto libero $p \in E$. Allora possiamo trovare delle coordinate $(z,w)$ in $p$, e delle coordinate $(x,y)$ nell'origine, tali che $E = \{z = 0\}$, e $\pi$ è della forma:*

$$\pi(z,w) = (z^b, z^{a-b}w + z^b h(z)),$$

*con $h$ una funzione regolare tale che $h(0) \neq 0$. Inoltre, data una curva liscia $V$ in $p$, che interseca trasversalmente $E$ in $p$, allora le coordinate possono essere scelte in modo tale che $V = \{w = 0\}$.*

*Dimostrazione.* Scegliamo delle coordinate locali $(x,y)$ in 0 tali che la trasformata propria di $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ non passino per $p$. Scegliamo poi delle coordinate locali $(z,w)$ in $p$ tali che $E = \{z = 0\}$ e $V = \{w = 0\}$. Per la Proposizione 4.45, $\pi^*x$ e $\pi^*y$ si annullano di ordine esattamente $b$ lungo $E$ (esattamente per come abbiamo scelto $x$ e $y$). A meno di moltiplicare $z$ per un'unità, otteniamo che $\pi(z,w) = (z^b, z^b\xi(z,w))$, con $\xi$ un'unità. Analogamente, sempre per la proposizione 4.45, $J\pi = bz^{2b-1}\frac{\partial\xi}{\partial w}$ si annulla di ordine $a-1$ lungo $E$, e quindi posso scrivere $J\pi = z^{a-1}\rho(z,w)$, con $\rho$ un'unità. Ne segue che $\frac{\partial\xi}{\partial w} = b^{-1}z^{a-2b}\rho(z,w)$, e quindi posso scrivere $\xi$ della forma $\xi(z,w) = b^{-1}z^{a-2b}\phi(z,w) + g(z)$, con $\frac{\partial\phi}{\partial w} = \rho$. In particolare posso scrivere $\phi(z,w) = w\psi(z,w)$, con $\psi$ un'unità. A meno di considerare $\phi$ anziché $w$ come secondo parametro locale, si ottiene la forma voluta. □

**Osservazione 4.47.** Sia $\nu$ una valutazione divisoriale, e $\pi \in \mathfrak{B}$ la modificazione associata alla componente eccezionale $E$ tale che $\nu = b_E^{-1}\pi_* \operatorname{div}_E$. Allora $\pi^*\mathfrak{m}$ è localmente principale in $E$: in particolare, se $p \in E$ è un punto libero, e $(z, w)$ sono delle coordinate in $p$ tali che $E = \{z = 0\}$, allora $\pi^*\mathfrak{m} = \langle z^{b_E}\rangle$; se invece $p \in E \cap F$ è un punto satellitare, e $(z, w)$ sono delle coordinate in $p$ tali che $E = \{z = 0\}$ e $F = \{w = 0\}$, allora $\pi^*\mathfrak{m} = \langle z^{b_E} w^{b_F}\rangle$.

Grazie al Corollario 4.22, abbiamo dato un'interpretazione geometrica delle valutazioni divisoriali, associando ad una componente eccezionale $E$ un'unica valutazione divisoriale $\nu_E = b^{-1}\pi_* \operatorname{div}_E$. Questo definisce una mappa $\Phi : \Gamma^* \to \mathcal{V}_{div}$, dove con $\mathcal{V}_{div}$ indichiamo l'insieme (il $\mathbb{Q}$-albero) delle valutazioni divisoriali. Allora:

**Teorema 4.48.** *La mappa $\Phi : \Gamma^* \to \mathcal{V}_{div}$ si estende in maniera unica ad un isomorfismo di alberi parametrizzati $\Phi : (\Gamma, A) \to (\mathcal{V}, A)$, dove $A$ denota nel primo caso il parametro di Farey, e nel secondo la sottigliezza. Inoltre $\Phi$ preserva la molteplicità.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si basa su quattro passi:

1. $\Phi : \Gamma^* \to \mathcal{V}_{div}$ è bigettiva;
2. $A \circ \Phi = A$;
3. $\Phi$ e $\Phi^{-1}$ preservano l'ordine;
4. $m \circ \Phi = m$.

Una volta dimostrati questi quattro passi, grazie alla Proposizione 3.29 si conclude.

**Passo 1:** La surgettività di $\Phi$ deriva direttamente dal Corollario 4.22; mostriamo ora che $\Phi$ è iniettiva.

Siano $E, F \in \Gamma^*$, $E \neq F$; sia poi $\mathfrak{B} \ni \pi : X_\pi \to (\mathbb{C}^2, 0)$ tale che $E, F \in \Gamma_\pi^*$. Per costruzione, il centro di $\Phi(E)$ in $X_\pi$ è $E$, e analogamente per $F$: ne segue che $\Phi(E) \neq \Phi(F)$.

**Passo 2:** Per la dimostrazione di questo passo è necessario introdurre un'altra interpretazione dell'albero delle valutazioni, dato dalle serie di Puiseux: per quest'interpretazione si rimanda al [FJ1, cap. 4], per la dimostrazione del passo 2, si veda [FJ1, pag.127-128].

**Passo 3:** Prima di procedere, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

**Lemma 4.49.** *Sia $\pi \in \mathfrak{B}$, e $p \in \pi^{-1}(0)$. Sia poi $F \in \Gamma^*$ il divisore eccezionale dello scoppiamento in $p$. Allora:*

*(i) se $p$ è libero, ovvero appartiene ad un'unica componente eccezionale $E \in \Gamma_\pi^*$, allora $\nu_F > \nu_E$;*

*(ii) se $p$ è satellitare, ovvero appartiene all'intersezione di due componenti eccezionali $E_1, E_2 \in \Gamma_\pi^*$, allora $\nu_F \in (\nu_{E_1}, \nu_{E_2})$.*

*Dimostrazione.* Vedi [FJ1, Lemma 6.28]. □

Per provare che $\Phi$ e $\Phi^{-1}$ preservano l'ordine, basta mostrare che per ogni $\pi \in \mathfrak{B}$ allora $\Phi : \Gamma_\pi^* \to \mathcal{V}_{div}$ sono delle immersioni tra alberi non metrici, ovvero che, per ogni $E_1, E_2 \in \Gamma_\pi^*$, allora $\Phi(E_1) < \Phi(E_2)$ se e solo se $E_1 < E_2$. Si procede per induzione sul numero di scoppiamenti necessari per decomporre $\pi$. Se $\pi$ è un singolo scoppiamento dell'origine, allora la tesi è ovvia ($\Gamma_\pi^* = \{E_0\}$ è costituito da un solo punto).

Supponiamo allora che $\Phi : \Gamma_\pi^* \to \mathcal{V}_{div}$ sia un'immersione, e sia $p \in \pi^{-1}(0)$. Denotiamo con $\tilde{\pi}$ lo scoppiamento di $p$, e sia $F = \tilde{\pi}^{-1}(p)$ il divisore eccezionale.

Se $p$ è un punto satellitare, è l'intersezione tra due componenti eccezionali $E_1, E_2$. Il grafo $\Gamma_{\pi\circ\tilde{\pi}}^*$ è ottenuto da $\Gamma_\pi$ aggiungendo un vertice nel segmento $[E_1, E_2]$. Per il Lemma 4.49, allora $\nu_F \in (\nu_{E_1}, \nu_{E_2})$, che non contiene altre valutazioni $\nu_{F'}$, per $F' \in \Gamma_\pi^*$ (per ipotesi induttiva). Se segue che anche $\Phi : \Gamma_{\pi\circ\tilde{\pi}}^* \to \mathcal{V}_{div}$ è un'immersione in questo caso.

Se invece $p$ è un punto libero, allora appartiene ad un'unica compontente eccezionale $E \in \Gamma_\pi^*$. Il grafo $\Gamma_{\pi\circ\tilde{\pi}}^*$ è ottenuto da $\Gamma_\pi$ aggiungendo un nuovo vertice $F$ sopra $E$. Per il Lemma 4.49 si ha che $\nu_F > \nu_E$, e quindi $\Phi$ mantiene l'ordine anche in $\Gamma_{\pi\circ\tilde{\pi}}$. Per concludere l'induzione, bisogna mostrare che $\nu_F$ non definisce lo stesso vettore tangente di $\nu_{E'}$ in $\nu_E$ per ogni $E' \in \Gamma_\pi^*$. Equivalentemente, basta mostrare che $\nu_F \wedge \nu_{E'} \leq \nu_E$ per ogni $E' \in \Gamma_\pi^*$. Possiamo supporre $\nu_{E'} \geq \nu_E$ (altrimenti la tesi è ovvia).

Essendo poi $\Phi : \Gamma_\pi^* \to \mathcal{V}$ un'immersione, possiamo ridurci al caso in cui $E'$ intersechi $E$.

Sia allora $\{p'\} = E \cap E'$, e consideriamo $b = b(E)$, $b' = b(E')$ le molteplicità generiche, mentre con $F$ ed $F'$ indichiamo le componenti eccezionali ottenute scoppiando $p$ e $p'$ rispettivamente. Consideriamo poi $\mu_p$ e $\mu_{p'}$ le valutazioni di molteplicità in $p$ e $p'$ rispettivamente (in particolare, se con $\pi_p$ si denota lo scoppiamento in $p$, allora $\mu_p = \pi_{p*} \operatorname{div}_F$, e analogamente con gli indici primati). Consideriamo una curva irriducibile $C = \{\phi = 0\}$ la cui trasformata propria $\tilde{C}$ tramite $\pi$ è liscia e contiene $p'$. Per la Proposizione 4.45, abbiamo che $\pi_* \operatorname{div}_E = b\nu_E$ e $\pi_* \operatorname{div}_{E'}$, e analogamente, ricordando che dalla costruzione si ha $b_F = b$ e $b_{F'} = b+b'$, abbiamo $\pi_*\mu_p = b\nu_F$ e $\pi_*\mu_{p'} = (b+b')\nu_{F'}$. Scriviamo allora $\tilde{C} = \{\tilde{\phi} = 0\}$. Abbiamo:

$$\nu_F(\phi) = b^{-1}(\pi_*\mu_p)(\phi) = b^{-1}\mu_p(\pi^*\phi) = b^{-1}\operatorname{div}_E(\pi^*\phi) = \nu_E(\phi),$$

dove il penultimo passaggio è dovuto a come è stata scelta $C$. D'altra parte,

$$\begin{aligned}\nu_{F'}(\phi) &= (b+b')^{-1}(\pi_*\mu_{p'})(\phi) = (b+b')^{-1}\mu_{p'}(\pi^*\phi)\\ &= (b+b')^{-1}(\operatorname{div}_E(\pi^*\phi) + \operatorname{div}_{E'}(\pi^*\phi) + \mu_{p'}(\tilde{\phi}))\\ &> (b+b')^{-1}(b\nu_E(\phi) + b'\nu_{E'}(\phi)) \geq \nu_E(\phi),\end{aligned}$$

ricordando che abbiamo supposto $\nu_{E'} \geq \nu_E$.

Dunque $\nu_F(\phi) = \nu_E(\phi) < \nu_{F'}(\phi)$. Ma per il Lemma 4.49, $\nu_{F'} \in (\nu_E, \nu_{E'})$, e dunque $\nu_{F'}$ rappresenta lo stesso vettore tangente di $\nu_{E'}$ in $\nu_E$. Ne segue che $\nu_F \wedge \nu_{E'} = \nu_F` \wedge \nu_{F'} = \nu_E$, che completa l'induzione.

**Passo 4:** A questo punto abbiamo mostrato che $\Phi : (\Gamma, A) \to (\mathcal{V}, A)$ è un isomorfismo di alberi parametrizzati, e che quindi con questo isomorfismo la sottigliezza coincide con il parametro di Farey. Dimostriamo ora che la molteplicità definita per le valutazioni coincide con la molteplicità definita per le componenti eccezionali.

In particolare possiamo mostrare i seguenti risultati:

**Corollario 4.50.** *Sia $\overline{p}$ una successione di punti infinitamente vicini, e sia* $\mathrm{val}[\overline{p}]$ *la valutazione di Krull e $\gamma(\overline{p})$ il punto in $\Gamma$ ad essa associati.*

*Se $\overline{p}$ non è del tipo 3, allora $\Phi(\gamma(\overline{p})) = \mathrm{val}[\overline{p}]$.*

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che $\Phi : \Gamma \to \mathcal{V}$ è un isomorfismo, e dalle Proposizioni 4.25 e 4.26. □

**Osservazione 4.51.** In particolare, Per ogni curva irriducibile $C$ vista come elemento di $\Gamma$, si ha che $\Phi(C) = \nu_C$.

**Lemma 4.52.** *Sia $C$ una curva irriducibile; allora la molteplicità $m_\Gamma(C)$ di $C$ vista come elemento di $\Gamma$ è uguale a $m(C)$ la molteplicità di $C$ come curva.*

*Dimostrazione.* Sia $\Pi[C] = (p_j)_{j=0}^{\infty}$ la successione di punti infinitamente vicini associata a $C$. Per la Proposizione 4.28 $\Pi[C]$ è di tipo 4. Sia $n$ il minimo naturale tale che $p_j$ è libero per ogni $j > n$, e sia $\pi$ la composizione degli scoppiamenti nei punti da $p_0$ a $p_n$; denotiamo inoltre con $E$ il divisore eccezionale ottenuto scoppiando $p_n$. Sia $\tilde{C}$ la trasformata propria di $C$ rispetto a $\pi$. Allora $\tilde{C}$ interseca $\pi^{-1}(0)$ solo nel punto $p_{n+1}$. Visto che $p_j$ sono liberi per $j > n$, allora $\tilde{C}$ è liscio e trasverso a $E$ in $p_{n+1}$, e $m_\Gamma(C) = b$, dove con $(a, b)$ abbiamo indicato il peso di Farey di $E$ (vedi il Corollario 4.43).

Per il Lemma 4.46, possiamo scegliere delle coordinate locali $(z, w)$ in $p_{n+1}$ e $(x, y)$ nell'origine, tali che $E = \{z = 0\}$, $\tilde{C} = \{w = 0\}$ e $\pi(z, w) = (z^b, z^{a-b}w + z^b h(z))$, dove $h$ è una funzione regolare con $h(0) \neq 0$. Allora una parametrizzazione di $C$ è data da $t \mapsto \pi(t, 0) = (t^b, t^b h(t))$, che mostra che $m(C) = b = m_\Gamma(C)$. $\square$

Sia allora $E \in \Gamma^\circ$. Sfruttando l'isomorfismo $\Phi$, il Lemma 4.52 e il Corollario 4.44 si ottiene:

$$\begin{aligned} m(\Phi(E)) &= \min\{m(C) \mid \nu_C > \Phi(E)\} = \min\{m(C) \mid C > E\} \\ &= \min\{m_\Gamma(C) \mid C > E\} = m(E). \end{aligned}$$

Questo conclude il quarto passo (estendendo il risultato a tutto $\Gamma$ passando al limite), e la dimostrazione. $\square$

## 4.5 Conseguenze

### 4.5.1 Centro di una valutazione

Con la prossima proposizione, vedremo in sostanza, data una modificazione $\pi$, quante e quali sono le valutazioni della forma $\nu_E$ con $E \in \Gamma^*_\pi$ che meglio approssimano (in un certo senso) una data valutazione $\nu$.

**Proposizione 4.53.** *Sia $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0) \in \mathfrak{B}$ una modificazione, e $\nu \in \mathfrak{V}$ una valutazione. Sia $\mathcal{D}_\pi$ l'insieme delle valutazioni divisoriali $\nu_F$ con $F \in \Gamma^*_\pi$, e $\mathcal{E}_\nu$ l'insieme delle valutazioni $\nu_E \in \mathcal{D}_\pi$ tali che $[\nu_E, \nu]$ non contenga altre valutazioni in $\mathcal{D}_\pi$ se non $\nu_E$ stessa. Allora $\mathcal{E}_\nu$ consiste di uno o di due elementi.*

*(i) Se $\mathcal{E}_\nu = \{\nu_E\}$, allora o $\nu = \nu_E$ e il centro di $\nu$ in $X$ è uguale ad $E$; oppure $\nu \neq \nu_E$ e il centro di $\nu$ in $X$ è il punto (libero) in $E$ associato grazie alla Proposizione 4.14 al vettore tangente $\overrightarrow{v}$ in $\nu_E$ rappresentato da $\nu$.*

*(ii) Se $\mathcal{E}_\nu = \{\nu_{E_1}, \nu_{E_2}\}$, il centro di $\nu$ è uguale al punto (satellitare) $E_1 \cap E_2$. Questo punto in $E_i$ è il punto associato al vettore tangente in $\nu_{E_i}$ rappresentato da $\nu$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $\mathcal{S}$ il sottoalbero le cui fini sono tutte e sole le valutazioni in $\mathcal{D}_\pi$. Essendo queste un numero finito, $\mathcal{S}$ è un sottoalbero completo di $\mathcal{V}$. Sia allora $\pi_\mathcal{S}$ la retrazione di $\mathcal{V}$ su $\mathcal{S}$, vista nella Definizione 3.25. Allora si vede direttamente che $\mathcal{E}_\nu = \{\nu_E\}$ se e solo se $\pi_\mathcal{S}(\nu) = \nu_E$, mentre $\mathcal{E}_\nu = \{\nu_{E_1}, \nu_{E_2}\}$ se e solo se $\pi_\mathcal{S}(\nu) \in (\nu_{E_1}, \nu_{E_2})$, con $\nu_{E_i}$ due valutazioni consecutive in $\mathcal{D}_\pi$. Da questo, applicando i vari risultati dimostrati, si giunge alla tesi. $\square$

**Osservazione 4.54.** Applichiamo la Proposizione 4.53 nel caso di una valutazione di curve $\nu = \nu_C$. Se vale la (i), allora $\nu \neq \nu_E$, e il centro è un punto libero; se invece vale la (ii), allora il centro è un punto satellitare. Inoltre il centro non è altri che l'intersezione della trasformata propria di $C$ tramite $\pi$ con il divisore eccezionale $\pi^{-1}(0)$: abbiamo dunque caratterizzato queste intersezioni.

**Corollario 4.55.** *Sia $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0) \in \mathfrak{B}$ una modificazione, e consideriamo un punto (chiuso) $p \in \pi^{-1}(0)$ nel divisore eccezionale. Sia $U(p)$ l'insieme delle valutazioni con centro $p$ in $X$. Allora $U(p)$ è un insieme aperto rispetto alla topologia debole. Inoltre:*

*(i) se $p$ è un punto libero, appartenente quindi ad un'unica componente eccezionale $E \in \Gamma_\pi^*$, allora $U(p) = U_{\nu_E}(\overrightarrow{v})$, dove $\overrightarrow{v}$ è il vettore tangente a $\nu_E$ associato a $p$ come nella Proposizione 4.14;*

*(ii) se $p$ è un punto satellitare, cioè è l'intersezione di due componenti eccezionali $E, F \in \Gamma_\pi^*$, allora $U(p) = U_{\nu_E}(\overrightarrow{v}) \cap U_{\nu_F}(\overrightarrow{w})$, dove $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sono i vettori tangenti in $\nu_E$ e $\nu_F$ rappresentati rispettivamente da $\nu_F$ e $\nu_E$.*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla Proposizione 4.53. □

**Proposizione 4.56.** *Sia $\nu$ una valutazione divisoriale, e $\nu' > \nu$. Supponiamo che la funzione di molteplicità (lungo il segmento $[\nu_\mathfrak{m}, \nu')$) abbia un salto in $\nu$. Allora esiste una modificazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ tale che $\nu = \nu_E$ per una qualche componente eccezionale $E \in \Gamma_\pi^*$, e il centro di $\nu'$ su $X$ sia un punto libero $p \in E$.*

*Dimostrazione.* Dall'Osservazione 4.38 segue che se la molteplità ha un salto in $\nu$, allora $\nu = \nu_E$, con $E$ una componente eccezionale derivata dallo scoppiamento di un punto libero $q \in F$, dove $F$ è una componente eccezionale ottenuta dallo scoppiamento di un punto satellitare. Inoltre per essere $\nu' > \nu$, allora $\nu'$ deve rappresentare un vettore tangente $\overrightarrow{v_p}$ in $\nu$, associato ad un punto libero $p \in E$. La tesi allora segue dalla costruzione della successione di punti infinitamente vicini associata ad una valutazione. □

### 4.5.2 Monomializzazione

**Osservazione 4.57.** Sia $\pi \in \mathfrak{B}$ una modificazione, e consideriamo due componenti eccezionali $E$ e $F$ adiacenti, ovvero tali che $E \cap F = \{p\}$. Scegliamo poi delle coordinate locali $(z, w)$ in $p$, tali che $E = \{z = 0\}$ e $F = \{w = 0\}$. Siano $\nu_E$ e $\nu_F$ le valutazioni divisoriali associate ad $E$ ed $F$ rispettivamente, e $b_E$, $b_F$ le loro molteplicità generiche.

Denotiamo poi con $\mu_t$ le valutazioni monomiali nelle coordinate $(z, w)$, di pesi $(1 - t)/b_E$ e $t/b_F$.

L'ideale $\pi^*\mathfrak{m}$ è principale generato da $z^{b_E}w^{b_F}$ (vedi l'Osservazione 4.47), da cui segue che le $\nu_t := \pi_*\mu_t$ sono normalizzate: $\nu_t(\mathfrak{m}) = \mu_t(z^{b_E}w^{b_F}) = b_E((1-t)/b_E) + b_F(t/b_F) = 1$.

Inoltre, $[0,1] \ni t \mapsto \nu_t$ dà una parametrizzazione tra $\nu_E$ e $\nu_F$.

Infatti grazie all'isomorfismo tra $\Gamma$ e $\mathcal{V}$, sappiamo che $\nu_E < \nu_F$ (o viceversa); per $t = 0$ si ottiene $\nu_0 = \pi_* \operatorname{div}_E = \nu_E$, e analogamente per $t = 1$; infine la mappa è strettamente crescente (si vede direttamente calcolando la distorsione), e bigettiva.

**Osservazione 4.58.** Sia $C$ una curva irriducibile, e consideriamone una desingolarizzazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$, ovvero tale che la trasformata propria $\tilde{C}$ di $C$ tramite $\pi$ sia ad incroci normali. Allora $\tilde{C}$ interseca una ed una sola componente eccezionale $E$ di $\pi$, in un punto libero $p$. Consideriamo delle coordinate locali $(z, w)$ in $p$ tali che $E = \{z = 0\}$ e $\tilde{C} = \{w = 0\}$. Denotiamo poi con $\mu_t$ le valutazioni monomiali nelle coordinate $(z, w)$, di pesi $1/b_E$ e $t$.

L'ideale $\pi^*\mathfrak{m}$ è principale generato da $z^{b_E}$ (vedi l'Osservazione 4.47), da cui segue che le $\nu_t := \pi_*\mu_t$ sono normalizzate: $\nu_t(\mathfrak{m}) = \mu_t(z^{b_E}) = 1$.

Inoltre, $[0, \infty] \ni t \mapsto \nu_t$ da una parametrizzazione tra $\nu_E$ e $\nu_C$ (analogamente al caso visto nell'Osservazione 4.57).

# Capitolo 5

# Azione di un germe sull'albero delle valutazioni

In questo capitolo studieremo l'azione che una applicazione $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ induce sull'albero delle valutazioni

**Definizione 5.1.** Sia $f : (f_1, f_2) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ è un'applicazione **olomorfa** se lo sono $f_1$ e $f_2$, è **formale** se $f_1$ e $f_2$ sono due serie formali. Se $f$ è olomorfa, denoteremo con $Jf$ il determinante dello Jacobiano di $f$. Se questo non è identicamente nullo, diremo che $f$ è **dominante**.

**Definizione 5.2.** Sia $f : X \to Y$ una applicazione olomorfa tra due varietà complesse di dimensione 2, $p \in X$. $f$ si dice **monomiale** in $p$ se esistono delle coordinate locali $(x, y)$ in $p$ e $(z, w)$ in $f(p)$ tali che $(z, w) = f(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d)$.

**Osservazione 5.3.** In particolare una applicazione monomiale è dominante se e solo se $ad - bc \neq 0$ (basta calcolare la matrice jacobiana).

**Definizione 5.4.** Sia $X$ una 2-varietà complessa. Una curva $C$ si dice **ad incroci normali** (in $p \in X$) se i vettori tangenti alla curva (ad ogni sua componente irriducibile) in $p$ sono linearmente indipendenti (in $T_pX$). In particolare quindi o $C$ è formata da un'unica componente irriducibile, oppure da due componenti irriducibili trasverse.

**Proposizione 5.5.** *Per ogni mappa olomorfa e dominante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, e per ogni curva irriducibile $C$, esistono due modificazioni $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ e $\pi' : X' \to (\mathbb{C}^2, 0)$, tali che il sollevamento di $C$ tramite $\pi$, e di $f(C)$ tramite $\pi'$ abbiano entrambe incroci normali, e tale che il sollevamento $\hat{f} : X \to X'$ di $f$ sia olomorfo e monomiale in ogni punto di $\pi^{-1}(0)$.*

*Dimostrazione.* Si veda [Cut, Section 3]. □

## 5.1 Invarianza del tipo di valutazione

**Definizione 5.6.** Sia $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un'applicazione formale. Allora per ogni $\phi \in \mathbb{C}[[x,y]]$, definiamo $f^*\phi = \phi \circ f$. Se poi $\nu \in \tilde{\mathcal{V}}$ è una valutazione centrata, definiamo allora $f_*\nu$ come $f_*\nu(\phi) = \nu(f^*\phi)$.

**Osservazione 5.7.** Se $\nu \in \tilde{\mathcal{V}}$, allora $f_*\nu$ risulta una valutazione, in generale non propria. Denotiamo con $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di $\mathbb{C}[[x,y]]$, e con $\mathfrak{p}_\nu = \{\nu = \infty\}$ l'ideale primo dove la valutazione $\nu$ assume il valore $\infty$. Allora se $\mathfrak{p}_\nu = (0)$, segue immediatamente dalla definizione che $\mathfrak{p}_{f_*\nu} = (0)$. Altrimenti $\mathfrak{p}_\nu = (\psi)$ (e $\nu = \nu_\psi$ è una valutazione di curve); in questo caso allora $f_*\nu(\phi) = \nu(f^*\phi) = \infty$ se e solo se $\psi \mid f^*\phi$. Questo accade per ogni $\phi \in \mathfrak{m}$ se e solo se la curva $\psi$ viene contratta in 0, e in particolare $\psi$ è una curva critica. Ma le curve critiche sono un numero finito, e quindi anche le valutazioni $\nu$ con $f_*\nu$ non propria.

D'ora in poi considereremo fissata una applicazione olomorfa dominante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$.

**Definizione 5.8.** Sia $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe di applicazione olomorfa (dominante) in 0. Denotiamo con $\mathcal{C}(f)$ l'insieme dei punti critici per $f$, mentre con $\mathfrak{C}_f$ indichiamo le valutazioni (di curve) $\nu$ tali che $f_*\nu$ è una valutazione non propria (chiameremo queste valutazioni **di curve contratte**).

Abbiamo visto che $\mathfrak{C}_f$ è formato da un numero finito di valutazioni di curve contratte da $f$, contenute quindi in $\mathcal{C}(f)$. Per tutte le altre valutazioni (che consideriamo normalizzate, $\nu \in \mathcal{V}$), $f_*\nu$ risulta centrata, ma in generale non normalizzata.

**Definizione 5.9.** Sia $\nu \in \mathcal{V}$. Allora si definisce $c(f,\nu)$ il **coefficiente d'attrazione** di $f$ lungo $\nu$ come $c(f,\nu) = \nu(f^*\mathfrak{m}) \in [1, \infty]$. In particolare definiamo $c(f) := c(f, \nu_\mathfrak{m})$ il **coefficiente d'attrazione** di $f$. Definiamo inoltre $c_\infty(f) = \lim_n c(f^n)^{1/n}$ il **coefficiente d'attrazione asintotico** di $f$.

**Osservazione 5.10.** Se $f = (f_1, f_2)$, allora $c(f,\nu) = \min\{\nu(f_1), \nu(f_2)\}$ (sono semplicemente i valori che assume $f_*\nu$ in $x$ e $y$).

**Osservazione 5.11.** Direttamente dalla definizione abbiamo che $c(f,\nu) = \infty$ se e solo se $\nu \in \mathfrak{C}_f$; negli altri casi, se $\nu$ è normalizzata, allora $f_*\nu / c(f,\nu)$ è una valutazione normalizzata. Possiamo allora dare la seguente definizione.

**Definizione 5.12.** Sia $\nu \in \mathcal{V} \setminus \mathfrak{C}_f$; allora definiamo $f_\bullet(\nu) := f_*\nu / c(f,\nu) \in \mathcal{V}$. Chiameremo $f_\bullet : \mathcal{V} \setminus \mathfrak{C}_f \to \mathcal{V}$ l'indotta di $f$ nell'albero delle valutazioni.

Vedremo come $f_\bullet$ può essere estesa anche alle valutazioni di curve contratte, e quindi su tutto $\mathcal{V}$. Ora invece concentriamoci sulle altre valutazioni, scoprendo che $f_\bullet$ mantiene il tipo di valutazione.

**Osservazione 5.13.** Se $C = \{\phi = 0\}$ è una curva irriducibile e $C' := f(C)$, allora $C' = \{0\}$ (la curva è contratta) oppure $C'$ è una curva irriducibile. Infatti se $(x(t), y(t))$ è una parametrizzazione per $C$, allora $(f \circ x(t), f \circ y(t))$ è una parametrizzazione di $C'$ che risulta una curva. Se $C' = \{\phi' = 0\} \neq \{0\}$, supponiamo che $(z, w) \in C' = f(C)$, quindi esiste un punto $(x, y) \in C$ tale che $f(x, y) = (z, w)$. Ne segue che $(z, w) \in C'$ se e solo se $\phi'(z, w) = \phi'(f(x, y)) = 0$. Quindi $\phi' \circ f$ divide $\phi$, e quindi a meno di unità, $\phi' \circ f = \phi$. In particolare anche $\phi'$ è irriducibile, altrimenti otterrei una scomposizione in più irriducibili anche per $\phi$.

**Teorema 5.14.** *L'applicazione $f_\bullet : \mathcal{V} \setminus \mathfrak{C}_f \to \mathcal{V}$ mantiene il tipo di valutazione (divisoriale, irrazionale, di curve o infinitamente singolare). Inoltre esiste un intero $N \geq 1$ tale che per ogni $\nu \in \mathcal{V}$, $f_\bullet^{-1}\nu$ ha cardinalità al più $N$.*

*Dimostrazione.* Sia $\nu \in \mathcal{V} \setminus \mathfrak{C}_f$ una valutazione. Supponiamo dapprima che sia la valutazione di una curva (non contratta) $\nu = \nu_C$. Grazie all'Osservazione 5.13, $C' = f(C)$ è una curva irriducibile, $C' = \{\phi' = 0\}$ per un qualche elemento irriducibile $\phi'$. Ma allora $f_*\nu(\phi') = \nu(\phi' \circ f) = \nu(\phi) = \infty$, e dunque $f_\bullet \nu_C = \nu_{C'}$ è una valutazione di curve.

Supponiamo ora che $\nu$ non sia una valutazione di curve. In particolare non assume mai il valore $\infty$, e quindi neanche $f_\bullet\nu$, che dunque non è una valutazione di curve. Questo ci dice in automatico che $\mathrm{rk}(f_\bullet\nu) = 1$ (dalla classificazione, o essendo il gruppo dei valori un gruppo di cardinalità numerabile in $\mathbb{R}$). Vogliamo ora calcolare i due invarianti rimanenti per $f_\bullet\nu$, utilizzando i risultati del Teorema 2.44.

Possiamo applicare la Proposizione 5.5, e supporre che $f$ sia monomiale, e quindi razionale. Sia $K = \mathbb{C}(x, y)$ il campo delle funzioni razionali su $\mathbb{C}^2$; essendo $f$ dominante abbiamo che $f^* : K \to K$ è iniettiva, e $K$ è un'estensione finita di $f^*K = \{\phi \circ f \mid \phi \in K\}$, di un certo grado $N \geq 1$.

Confrontiamo ora i due gruppi dei valori $\Gamma_\nu$ e $\Gamma_{f_*\nu}$. Direttamente dalla definizione si ha che $\Gamma_{f_*\nu} \subseteq \Gamma_\nu$. Viceversa, sia $\gamma = \nu(\phi) \in \Gamma_\nu$. Per quello detto prima, esistono $a_i \in f^*K$ tali che $\sum_{i=0}^N a_i\phi^i = 0$. In particolare esistono $i < j$ tali che $\nu(a_i\phi^i) = \nu(a_j\phi^j)$, e $(j - i)\gamma = (j - i)\nu(\phi) = \nu(a_i) - \nu(a_j) \in \Gamma_{f_*\nu}$. Ne segue che $\Gamma_\nu \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \subseteq \Gamma_{f_*\nu} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, e quindi l'uguaglianza, grazie al contenimento visto prima; dunque $\mathrm{ratrk}(\nu) = \mathrm{ratrk}(f_*\nu)$.

Per il calcolo del grado di trascendenza, ancora grazie al poter supporre $f$ razionale, abbiamo che il campo residuo $k_\nu$ di $\nu$ (contiene ed) è un'estensione finita di $k_{f_*\nu}$, e quindi il loro grado di trascendenza coincide.

Arriviamo allora all'ultimo risultato da dimostrare; possiamo ancora a meno di modificazioni supporre $f$ monomiale. Sia allora $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di valutazioni tali che $f_*\mu_i$ siano tutte proporzionali tra loro. Allora a meno di riscalare opportunamente, $\mu_i$ definiscono esattamente la stessa valutazione sul campo $f^*K$. Ma l'estensione di $K$ su $f^*K$ ha grado finito $N$, così $\mu$ ammette al più $N$ estensioni a $K$ , e $\#I \leq N$. $\square$

Vediamo ora come estendere $f_\bullet$ anche alle valutazioni di curve contratte.

**Osservazione 5.15.** Supponiamo che $f : X \to Y$ sia monomiale in un punto $p$, ovvero esistano delle coordinate locali $(x, y)$ in $p$, e $(z, w)$ in $f(p)$, tali che $(z, w) = f(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d)$ (con $ad-bc \neq 0$). Consideriamo poi delle valutazioni monomiali in queste coordinate: $\mu_{s,t}$ (risp. $\mu'_{s,t}$) è la valutazione monomiale nelle coordinate $(x, y)$ (risp. $(z, w)$) di pesi $(s, t)$. Allora $f_*\mu_{s,t} = \mu'_{as+bt,cs+dt}$: infatti $f_*\mu_{s,t}(z) = \mu_{s,t}(x^a y^b) = as + bt$, e analogamente per $w$, mentre la monomialità di $f_*\mu_{s,t}$ deriva direttamente dalla monomialità di $f$.

In particolare quando $f$ è dominante, $f_*$ risulta bigettiva sulle valutazioni monomiali; inoltre due immagini sono proporzionali se e solo se lo sono anche le valutazioni di partenza, il che ci dice che anche l'azione di $f_\bullet$ in $\mathcal{V}$ è bigettiva nelle valutazioni monomiali.

**Proposizione 5.16.** *Sia $\nu$ una valutazione divisoriale, e sia $\nu' = f_\bullet\nu$. Allora esistono due modificazioni $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ e $\pi' : X' \to (\mathbb{C}^2, 0)$, e due componenti eccezionali $E \in \Gamma^*_\pi$ e $E' \in \Gamma^*_{\pi'}$, tali che $\nu = \nu_E$, $\nu' = \nu_{E'}$ e che $f$ si sollevi ad una funzione olomorfa $\hat{f} : X \to X'$ che manda $E$ surgettivamente in $E'$. Inoltre*

$$c(f, \nu_E) = \frac{b_{E'}}{b_E} k, \tag{5.1}$$

*dove $b_E$ e $b_{E'}$ sono le molteplicità generiche di $E$ ed $E'$ rispettivamente, mentre $k \in \mathbb{N}^*$ è l'ordine di annullamento lungo $E$ di $\hat{f}^*\phi'$, con $E' = \{\phi' = 0\}$.*

*Dimostrazione.* Per il Teorema 5.14, abbiamo che $\nu'$ è divisoriale, e quindi possiamo trovare delle modificazioni $\pi, \pi' \in \mathfrak{B}$ e delle componenti eccezionali $E, E'$ come nell'enunciato. Il sollevamento $\hat{f}$ di $f$ non è necessariamente olomorfo, ma esiste un'altra seconda modificazione $\omega : Y \to X$ tale che $\hat{f}$ si sollevi ad una $g : Y \to X'$ olomorfa. Consideriamo allora $\pi \circ \omega$ anziché $\pi$, ottenendo così che il sollevamento $\hat{f}$ è olomorfo. Inoltre $f_\bullet\nu \sim f_*\pi_* \operatorname{div}_E = \pi'_*\hat{f}_* \operatorname{div}_E$ si annulla in $\phi'$ se e solo se $\phi$ divide $\phi' \circ \hat{f}$, da cui si deduce che $\hat{f}$ manda $E$ surgettivamente in $E'$.

Inoltre

$$c(f, \nu_E) = \nu_E(f^*\mathfrak{m}) = \frac{1}{b_E} \operatorname{div}_E(\pi^* f^*\mathfrak{m}) = \frac{1}{b_E} \operatorname{div}_E(\hat{f}^*(\pi')^*\mathfrak{m}).$$

Consideriamo un punto $p' \in E'$ liscio (ovvero un punto libero del divisore eccezionale $(\pi')^{-1}(0)$). Allora per l'Osservazione 4.47, $(\pi')^*\mathfrak{m} = \langle z^{b_{E'}} \rangle$ (dove $E' = \{z = 0\}$). Ne segue che

$$c(f, \nu_E) = \frac{1}{b_E} \operatorname{div}_E(z^{b_{E'}} \circ \hat{f}) = \frac{b_{E'}}{b_E} \operatorname{div}_E(z \circ \hat{f}).$$

$\square$

**Proposizione 5.17.** *Sia $C$ una curva analitica irriducibile non contratta da $f$, ovvero $\nu_C \notin \mathfrak{C}_f$. Allora $C' = f(C)$ è una curva analitica irriducibile e $f_\bullet \nu_C = \nu_{C'}$. Inoltre*

$$c(f, \nu_C) = \frac{m(C')}{m(C)} e(f, C), \tag{5.2}$$

*dove $e(f, C) \in \mathbb{N}^*$ denota il grado topologico della restrizione $f : C \to C'$.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto la prima parte (tra l'Osservazione 5.13 e il Teorema 5.14); resta da mostrare la (5.2). Consideriamo delle parametrizzazioni $h : (\mathbb{C}, 0) \to C$ e $h' : (\mathbb{C}, 0) \to C'$. Allora $e := e(f, C)$ è il grado topologico della composizione $(h')^{-1} \circ f \circ h$. Possiamo allora supporre che $f \circ h(t) = h'(t^e)$.

Sia allora $x \in \mathfrak{m}$ un parametro locale (ovvero di molteplicità $m(x) = 1$), e generico (ovvero tale che $\nu_C(x) = \nu_{C'}(x) = 1$, vedi l'Osservazione 3.33). Allora, ricordando la (1.4), si ha:

$$\begin{aligned} c(f, \nu_C) &= \nu_C(x \circ f) = m(C)^{-1} \operatorname{div}_t(x \circ f \circ h(t)) = m(C)^{-1} \operatorname{div}_t(x \circ h'(t^e)) \\ &= e \cdot m(C)^{-1} \operatorname{div}_t(x \circ h'(t)) = e \cdot \frac{m(C')}{m(C)}. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposizione 5.18.** *Sia $C = \{\psi = 0\}$ una curva irriducibile contratta da $f$, ovvero $f(C) = 0$ e $\nu_C \in \mathfrak{C}_f$. Allora $c(f, \nu_C) = \infty$. Inoltre il limite di $f_\bullet \nu$ per $\nu$ che cresce fino a $\nu_C$ esiste ed è una valutazione divisoriale, che denoteremo con $f_\bullet \nu_C$.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto come in questo caso $c(f, \nu_C) = \infty$. Consideriamo la valutazione $\operatorname{div}_C$ vista nel primo capitolo: $\operatorname{div}_C(\phi) = \max\{n \ : \ \psi^n \mid \phi\}$. $\operatorname{div}_C$ non è centrata, ma siccome $C$ viene contratta in 0 da $f$, $\nu' := f_* \operatorname{div}_C$ risulta una valutazione centrata. Inoltre il gruppo dei valori di $\nu'$ è contenuto in $\mathbb{Z}$, da cui segue immediatamente che $\operatorname{rk}(\nu') = \operatorname{ratrk}(\nu') = 1$. Dalla classificazione segue che $\nu'$ è o divisoriale o infinitamente singolare; ma il gruppo dei valori è finitamente generato su $\mathbb{Z}$, e quindi $\nu'$ non può essere infinitamente singolare, ed è divisoriale. Applichiamo allora la Proposizione 5.5 a $f$ e $C$: esistono due modificazioni $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ e $\pi' : X' \to (\mathbb{C}^2, 0)$, tali che il sollevamento $\tilde{C}$ di $C$ tramite $\pi$ sia ad incroci normali e che il sollevamento $\hat{f} : X \to X'$ di $f$ sia olomorfo e monomiale in ogni punto di $\pi^{-1}(0)$; inoltre $\nu'$ ha come centro una compontente eccezionale $E' \subset \pi'^{-1}(0)$. $\tilde{C}$ interseca il divisore eccezionale $\pi^{-1}(0)$ in un punto $p$ in un'unica componente eccezionale $E$. Sia $p' = \hat{f}(p)$.

Mostriamo che $\hat{f}$ manda $\tilde{C}$ in $E'$ (o meglio nel suo germe in $p'$). $C$, e quindi $\tilde{C}$, è il luogo di zeri di una funzione analitica (essendo $C$ contratta da $f$, e quindi in particolare una curva nell'insieme critico, che è il luogo di zeri del determinante dello Jacobiano di $f$, che è analitica). Supponiamo $E' = \{\phi' = 0\}$ e $\tilde{C} = \{\tilde{\phi} = 0\}$. Allora il luogo di zeri di $\phi'$ coincide con il luogo di zeri del pull back di $\phi'$ tramite $\hat{f}$, che è esattamente $\tilde{C}$ (per definizione di $E'$ come centro di $\nu'$).

Scegliamo allora delle coordinate $(x, y)$ in $p$ e $(z, w)$ in $p'$, tali che $E = \{x = 0\}$, $\tilde{C} = \{y = 0\}$ e $E' = \{w = 0\}$. $\hat{f}$ è localmente monomiale in $p$, e dunque si scrive $(z, w) = \hat{f}(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ e $ad - bc \neq 0$. Inoltre $\hat{f}(\tilde{C}) = E'$, da cui segue che $b = 0$, mentre $a, d \geq 1$.

Come abbiamo visto nell'Osservazione 4.47, gli ideali $\pi^*\mathfrak{m}$ e $(\pi')^*\mathfrak{m}$ sono uguali a $\langle x^m \rangle$ e da $\langle z^k w^l \rangle$ rispettivamente, con $m = m(C) \geq 1$ e $k \geq 0, l \geq 1$.

Consideriamo ora le valutazioni monomiali $\mu_{s,t}$ (risp. $\mu'_{s,t}$) nelle coordinate $(x, y)$ (risp. $(z, w)$), di pesi $s$ e $t$. Allora la valutazione $\nu_t := \pi_*\mu_{1/m,t}$ è normalizzata (visto che $\nu_t(\mathfrak{m}) = \mu_{1/m,t}(\pi^*\mathfrak{m}) = \mu_{1/m,t}(x^m) = 1$) e cresce a $\nu_C$ per $t \to \infty$ (infatti $\mu_{1/m,t}$ tende alla valutazione della curva $\tilde{C}$ in $p$). In breve, le $\nu_t$ parametrizzano il segmento $[\nu_E, \nu_C]$.

Grazie all'Osservazione 5.15, $f_*\nu_t = f_*\pi_*\mu_{1/m,t} = \pi'_*\hat{f}_*\mu_{1/m,t} = \pi'_*\mu'_{a/m,c/m+dt}$, che tende a $\pi'_* \operatorname{div}_{E'} = \nu_{E'}$. $\square$

## 5.2 L'albero critico

Finora abbiamo visto come $f_\bullet$ mantenga il tipo di valutazione al di fuori di $\mathfrak{C}_f$. Studiamo più accuratamente come $f_\bullet$ interagisce con la struttura ad albero di $\mathcal{V}$, specie con l'ordine parziale. Infatti mentre $f_*$ risulta (ovviamente) crescente (o meglio non decrescente), $f_\bullet = f_*/c(f, \cdot)$ è il rapporto di due funzioni crescenti, e quindi lo studio della sua crescenza si fa più complicato.

**Proposizione 5.19.** *Il sottoinsieme $\mathcal{T}_f$ di $\mathcal{V}$ dove $c(f, \cdot)$ non è localmente costante è un sottoalbero chiuso e finito di $\mathcal{V}$. Le sue fini (ovvero i suoi elementi massimali), sono esattamente gli elementi massimali di $\mathcal{E}_f := \mathcal{D}_f \cup \mathfrak{C}_f$, dove $\mathcal{D}_f$ è l'insieme delle valutazioni divisoriali $\nu$ tali che $f_\bullet\nu = \nu_\mathfrak{m}$ (e diverse da $\nu_\mathfrak{m}$), mentre $\mathfrak{C}_f$ è l'insieme delle curve contratte da $f$.*

*Dimostrazione.* Gran parte del lavoro in questo caso è accorgersi che $c(f, \cdot)$ è un potenziale; in particolare, se $f = (f_1, f_2)$, allora $c(f, \nu) = \min\{\nu(f_1), \nu(f_2)\} = \nu(f^*\mathfrak{m})$, che è dunque un potenziale associato ad un ideale (generato da $f_1$ e $f_2$). Grazie al Corollario 3.62, sappiamo che $c(f, \cdot)$ è localmente costante al di fuori di un albero chiuso e finito, che ha come fini le valutazioni associate alle curve $\phi_i$, con $\phi_i$ i fattori irriducibili di $f_1$ e $f_2$ (e che indichiamo con $\mathcal{S}$). Tutto quello che resta da vedere è all'interno di questo albero, dove $c(f, \cdot)$ è effettivamente non localmente costante. Grazie all'Osservazione 3.63, sappiamo che $\mathcal{T}_f$ è effettivamente un sottoalbero. Rimane dunque da vedere che tutte e sole le fini sono gli elementi di $\mathcal{E}_f$.

Sia allora $\nu$ una fine di $\mathcal{T}_f$, e dimostriamo che è un elemento massimale in $\mathcal{E}_f$. Notiamo che $\nu$ non può essere infinitamente singolare, visto che non ci sono valutazioni infinitamente singolari in $\mathcal{S}$. Supponiamo dapprima che $\nu$ sia una valutazione di curve. Allora $c(f,\cdot)$ è lineare a tratti, con pendenza in $\mathbb{N}^*$; in particolare $c(f,\mu) \to \infty = c(f,\nu)$, e $\nu \in \mathfrak{C}_f$, ed è quindi un elemento massimale di $\mathcal{E}_f$. Supponiamo ora che $\nu$ sia una valutazione quasimonomiale. Denotiamo con $\mathcal{L}$ l'insieme delle funzioni lineari da $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}$, e $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \setminus \{0\}$ (quindi un elemento generico di $\mathcal{L}^*$ è della forma $(x,y) \mapsto ax + by$, con $a, b \in \mathbb{C}$ e $(a,b) \neq (0,0)$). Supponiamo per assurdo che esista $L \in \mathcal{L}^*$ tale che $\nu(f^*L) > c(f,\nu)$ (il $\geq$ vale per definizione). Allora per continuità $\mu(f^*L) > c(f,\mu)$ con $\mu \in U$ un intorno aperto di $\nu$. Notiamo che $c(f,\mu) = \min\{\mu(f^*L), \mu(f^*M)\}$, con $M : (x,y) \mapsto cx+dy$ tale che $[a,b] \neq [c,d]$ in $\mathbb{CP}^1$. Segue allora che $c(f,\mu) = \mu(f^*M)$ per ogni $\mu \in U$. Quindi in questo intorno in realtà $c(f,\mu)$ coincide col potenziale $P_{f^*M}$, che non può assumere massimo locale (come fa per ipotesi in $\nu$) se non in un punto dove è localmente costante: assurdo, $\nu$ è per ipotesi un punto dove $c(f,\cdot)$ non è localmente costante. Ne segue che $f_*\nu(L) = \nu(f^*L) = c(f,\nu)$ è una costante indipendente da $L \in \mathcal{L}^*$; questo ci dice che $f_*\nu$ è proporzionale a $\nu_\mathfrak{m}$, e quindi $\nu \in \mathcal{D}_f$. Inoltre l'insieme $\{\mu > \nu\}$ non incontra $\mathcal{D}_f$, visto che per ipotesi $c(f,\mu)$ è (localmente) costante, e quindi $f_\bullet$ mantiene l'ordine (si usa anche il fatto che $\mathcal{D}_f$ è un insieme finito, dimostrato nel Teorema 5.14).

Viceversa, sia $\nu$ un elemento massimale di $\mathcal{E}_f$. Se $\nu$ è una valutazione di curva contratta, allora $c(f,\mu) \to \infty$ per $\mu$ che cresce a $\nu$, e quindi $\nu$ è in $\mathcal{T}_f$ (ed è una fine, essendo una valutazione di curve). Se invece $\nu$ è una valutazione divisoriale tale che $f_\bullet\nu = \nu_\mathfrak{m}$, supponiamo per assurdo che $c(f,\cdot)$ sia localmente costante su $\nu$; ma allora $f_\bullet$ mantiene l'ordine in un intorno di $\nu$, ed è un assurdo a meno che $\nu = \nu_\mathfrak{m}$ (essendo $\nu_\mathfrak{m}$ l'elemento minimo dell'albero). Quindi $\nu \in \mathcal{T}_f$. Abbiamo appena visto che $\mathcal{D}_f \subset \mathcal{T}_f$, ma per quello che abbiamo visto in precedenza, le fini di $\mathcal{T}_f$ sono (contenute negli) elementi massimali di $\mathcal{E}_f$; ne segue che le valutazioni divisoriali massimali di $\mathcal{E}_f$ sono fini in $\mathcal{T}_f$. □

**Definizione 5.20.** L'albero $\mathcal{T}_f$ visto nella Proposizione 5.19 è detto l'**albero critico** di $f$.

## 5.3 Mantenimento della struttura ad albero

**Definizione 5.21.** Chiameremo le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ con $ad - bc \neq 0$, **funzioni di Möbius**.

**Teorema 5.22.** *La mappa* $f_\bullet : \mathcal{V} \setminus \mathfrak{C}_f \to \mathcal{V}$ *si estende in maniera unica ad una mappa* $f_\bullet : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *che sia regolare nel seguente senso: per ogni* $\nu \in \mathcal{V}$ *possiamo decomporre il segmento* $I = [\nu_{\mathfrak{m}}, \nu]$ *in un numero finito di sottosegmenti* $I_j = [\mu_j, \mu_{j+1}]$*, con* $0 \leq j \leq k$*, con* $\mu_0 = \nu_{\mathfrak{m}}$*,* $\mu_{k+1} = \nu$*,* $\mu_j$ *divisoriale per ogni* $0 \leq j \leq k$*, in modo tale che* $f_\bullet$ *sia un isomorfismo monotono tra* $I_j$ *e la sua immagine. Inoltre se per ogni* $t \in [1, \alpha(\nu)]$ *indichiamo con* $\nu_t$ *la valutazione in* $I$ *con distorsione* $t$*, allora per* $t \in [\alpha(\mu_j), \alpha(\mu_{j+1})]$*, abbiamo* $\alpha(f_\bullet \nu_t) = \frac{at+b}{ct+d}$*, con* $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ *con* $ad - bc \neq 0$*, ovvero* $f_\bullet$ *è Möbius a tratti se parametrizziamo* $\mathcal{V}$ *con la distorsione.*

*Dimostrazione.* Iniziamo supponendo che $\nu = \nu_C$ sia una valutazione di una curva analitica. Grazie alla Proposizione 5.5, esistono $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ e $\pi' : X' \to (\mathbb{C}^2, 0)$, tali che il sollevamento di $C$ tramite $\pi$, e di $f(C)$ tramite $\pi'$ sono entrambe ad incroci normali, e tale che il sollevamento $\hat{f} : X \to X'$ di $f$ è olomorfo e (localmente) monomiale in ogni punto di $\pi^{-1}(0)$.

Ricordando l'Osservazione 4.58, esiste un'unica componente eccezionale $E$ in $\pi$ che interseca la trasformata propria $\tilde{C}$ di $C$ tramite $\pi$, e tale che il segmento $[\nu_E, \nu_C]$ sia parametrizzato da $[0, \infty] \ni t \mapsto \nu_t$, dove $\nu_t = \pi_* \mu_t$, e $\mu_t$ sono delle valutazioni monomiali (vedi l'Osservazione 4.58).

Consideriamo ora $\Gamma_\pi$ il grafo duale di $\pi$, e prendiamo le componenti eccezionali nel grafo duale che siano in $[E_0, E]$. Sono un numero finito (il grafo duale è finito), e denotiamole con $E_0 < E_1 < \ldots < E_n = E$. Allora, per ogni $i = 1, \ldots n$, si ha che $E_{i-1}$ ed $E_i$ sono adiacenti, e posso dunque applicare l'Osservazione 4.58, e ottenere ancora una volta una parametrizzazione del segmento $[E_{i-1}, E_i]$ della forma $[0, 1] \ni t \mapsto \nu_t$, con $\nu_t = \pi_* \mu_t$, e $\mu_t$ delle valutazioni monomiali (definite come nell'Osservazione 4.58).

Ma su ognuno di questi segmenti, essendo $\hat{f}$ a sua volta monomiale, grazie all'Osservazione 5.15 abbiamo che su ognuno di questi segmenti $f_\bullet$ agisce come un isomorfismo monotono.

Cerchiamo ora di ottenere un controllo sulla distorsione.

Supponiamo allora che $I = [\nu_1, \nu_2]$ sia un intervallo dove la $f_\bullet$ agisce come un isomorfismo monotono, e supponiamo che $\nu_1 < \nu_2$ e $\nu_2$ non è infinitamente singolare o una valutazione di curva formale. Allora $f_\bullet I$ è a sua volta un intervallo che non contiene valutazioni infinitamente singolari o valutazioni di curve formali, e quindi esiste una $C = \{\psi = 0\}$ tale che $\nu_\psi \geq f_\bullet \mu$ per ogni $\mu \in I$.

Ma allora $\mu \wedge \nu_\psi = \mu$ per ogni $\mu \in I$, e grazie alla Proposizione 3.43 (applicata a $f_\bullet \mu$), si ha che

$$\alpha(f_\bullet \mu) = \frac{f_\bullet \mu(\psi)}{m(\psi)} = \frac{f_* \mu(\psi)}{c(f, \mu) \cdot m(\psi)} = \frac{\mu(f^* \psi)}{c(f, \mu) \cdot m(\psi)}. \tag{5.3}$$

Ma $\mu \to \mu(f^* \psi)$ è un potenziale (associato a $\psi \circ f$), quindi grazie alla Proposizione 3.61, è lineare affine a tratti con pendenza intera non negativa se parametrizzata tramite la distorsione. Lo stesso vale per $c(f,\mu) = \mu(f^*\mathfrak{m})$, che è un potenziale (associato all'ideale $f^*\mathfrak{m}$), e ancora una volta è lineare affine a tratti con pendenza non negativa se parametrizzata tramite la distorsione (per il Corollario 3.62).

Ne segue dunque che $\alpha(f_\bullet\mu)$ è una funzione di Möbius a tratti se parametrizzata tramite la distorsione, e quindi si ottiene la tesi in questo caso.

Supponiamo ora che $\nu$ non sia una valutazione di una curva analitica. Se è quasimonomiale, allora $\nu < \nu_\phi$ per una qualche valutazione di curva analitica $\phi$ (che si possa scegliere analitica è ovvio: basta considerare l'SKP associata a $\nu$, e sostituire all'ultimo valore un $\infty$, ottenendo una valutazione di curva che è un polinomio in $x$ e $y$, e quindi in particolare analitica); si applica quindi quanto già detto riottenendo la tesi.

Se invece $\nu$ è una valutazione infinitamente singolare, o di una curva formale, allora in particolare $\nu \notin \mathcal{T}_f$ l'albero critico. Esiste dunque una $\nu_1 < \nu$ divisoriale e tale che $c(f,\mu)$ sia costante su tutto $[\nu_1, \nu]$ ($\nu_1$ può essere scelta arbitrariamente vicina a $\nu$). Possiamo dunque applicare il risultato visto per il segmento $[\nu_\mathfrak{m}, \nu_1]$, e cercare di dimostrarlo per $[\nu_1, \nu]$. Sia allora $\nu_2 \in (\nu_1, \nu)$ arbitrario, e scegliamo $\nu_\psi$ valutazione di una curva analitica tale che $\nu \wedge \nu_\psi > \nu_2$. Siccome $c(f,\mu)$ è costante in $[\nu_1, \nu]$, la (5.3) ci dice che $\alpha(f_\bullet\mu)$ è una funzione lineare a tratti, con pendenza razionale positiva, in funzione di $\alpha(\mu)$, su tutto $[\nu_1, \nu_2]$. Inoltre i punti di discontinuità della derivata di questa funzione sono quelli del potenziale d'albero $P_{f^*\psi}$, definito da $P_{f^*\psi}(\mu) = \mu(f^*\psi)$. Ricordando la Proposizione 3.61, abbiamo che $P_{f^*\psi}$ è localmente costante al di fuori dell'albero finito le cui fini sono le valutazioni di curve associate ai fattori irriducibili di $f^*\psi$. Ma il numero di questi fattori è maggiorato dal grado topologico di $f$; in particolare è limitato al variare di $\psi$. Ne segue che posso dividere tutto il segmento $[\nu_1, \nu]$ in un numero finito di intervalli dove $\alpha$ è lineare, e quindi abbiamo mostrato la tesi anche nel caso generale. $\square$

Enunciamo ora un risultato sulla regolarità del sollevamento di un germe tramite due modificazioni (in partenza e in arrivo).

**Proposizione 5.23.** *Siano $\pi : X \to (\mathbb{C}, 0)$ e $\pi' : X' \to (\mathbb{C}, 0)$ due modificazioni, e sia $\hat{f} : X \dashrightarrow X'$ il sollevamento di $f$ (che in generale è almeno razionale). Fissato un punto infinitamente vicino $p \in \pi^{-1}(0) \subset X$, sia $U(p)$ l'aperto delle valutazioni il cui centro in $X$ è $p$. Allora $\hat{f}$ è olomorfa in $p$ se e solo se $f_\bullet U(p)$ non contiene nessuna valutazione divisoriale associata ad una componente eccezionale di $\pi'$. Inoltre quando $f$ è olomorfa in $p$, allora $p' = \hat{f}(p)$ è caratterizzato da $f_\bullet U(p) \subseteq U(p')$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima che $\hat{f}$ sia olomorfo in $p$, e scriviamo $p' = \hat{f}(p)$. Consideriamo allora una valutazione in $U(p)$. Questo significa che $\nu = \pi_*\nu$ per una qualche valutazione $\mu$ centrata in $p$ (ovvero nell'anello locale $\mathcal{O}_{X,p}$). Essendo poi $\hat{f}$ olomorfa in $p$, ne segue che $\hat{f}^*\mathcal{O}_{X',p'} \subseteq \mathcal{O}_{X,p}$, e $\hat{f}^*\mathfrak{m}_{p'} \subseteq \mathfrak{m}_p$, e quindi (per dualità) $\mu' := \hat{f}_*\mu$ è una valutazione centrata in $\mathcal{O}_{X',p'}$. Ma allora abbiamo che $\pi'_*\mu' = \pi'_*\hat{f}_*\mu = f_*\pi_*\mu = f_*\nu$ è proporzionale a $f_\bullet\nu$ (a meno che non sia $\nu \in \mathfrak{C}_f$, e in tal caso si ottiene lo stesso risultato passando al limite), e quindi $f_\bullet\nu \in U(p')$. Per arbitrarietà di $\nu$, segue che $f_\bullet U(p) \subseteq U(p')$. D'altra parte, se $\nu'$ è una valutazione divisoriale associata ad una componente eccezionale $E' \in \Gamma^*_{\pi'}$, allora il suo centro in $X'$ è $E' \neq p'$, e dunque $\nu' \notin U(p')$.

Viceversa, supponiamo che $p$ sia un punto di indeterminazione per $\hat{f}$. Esiste allora una modificazione $\omega : Y \to X$ in $p$ che solleva $\hat{f}$ ad una mappa olomorfa $g : Y \to X'$; in particolare l'immagine tramite $g$ del divisore eccezionale $\omega^{-1}(p)$ contiene una componente eccezionale $E' \in \Gamma^*_{\pi'}$ (altrimenti $\hat{f}$ sarebbe olomorfa in $p$). In particolare possiamo trovare una componente eccezionale $E \subseteq \omega^{-1}(p)$ che viene mandata surgettivamente in $E'$ da $g$. Considerando la valutazione associata $\nu_E$, il suo centro in $X$ è $p$, e quindi $\nu_E \in U(p)$. Denotando con $\sim$ la proporzionalità tra due valutazioni si ha:

$$f_*\nu_E \sim f_*\pi_*\omega_* \operatorname{div}_E = \pi'_*\hat{f}_*\omega_* \operatorname{div}_E = \pi'_*g_* \operatorname{div}_E \sim \pi'_* \operatorname{div}_{E'} \sim \nu'_E,$$

da cui segue $f_\bullet\nu_E = \nu_{E'}$. Questo completa la dimostrazione. $\square$

**Definizione 5.24.** Segue direttamente dal Teorema 5.22 che $f$ induce una **mappa differenziale** $d(f_\bullet)_\nu : T_\nu\mathcal{V} \to T_{f_\bullet\nu}\mathcal{V}$, per ogni $\nu \in \mathcal{V}$. Infatti se $\nu \in \mathcal{V}$ è una valutazione, e $\overrightarrow{v} \in T_\nu\mathcal{V}$ è un vettore tangente, allora possiamo scegliere $\mu$ un rappresentante di $\overrightarrow{v}$ tale che $f_\bullet$ è un isomorfismo tra $[\mu,\nu]$ e $[f_\bullet\nu, f_\bullet\mu]$. Definiamo allora $d(f_\bullet)_\nu(\overrightarrow{v})$ come il vettore tangente in $f_\bullet\nu$ rappresentato da $f_\bullet\mu$. Si vede immediatamente che $d(f_\bullet)_\nu(\overrightarrow{v})$ non dipende dal rappresentante scelto per $\overrightarrow{v}$. Spesso per alleggerire la notazione, nel caso sia chiaro dal contesto, non espliciteremo la valutazione dove si sta operando, denotando $d(f_\bullet)_\nu =: df_\bullet$.

**Proposizione 5.25.** *Sia $\nu \in \mathcal{V}$ una valutazione divisoriale, e sia $\nu' = f_\bullet\nu$. Siano poi $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ e $\pi' : X' \to (\mathbb{C}^2, 0)$ due modificazioni tali che $\nu = \nu_E$ e $\nu' = \nu_{E'}$, con $E, E'$ delle componenti eccezionali delle due modificazioni rispettivamente. Allora il sollevamento $\hat{f} : X \to X'$ di $f$ manda surgettivamente $E$ in $E'$. Denotiamo con $f_E$ la restrizione di $\hat{f}$ ad $E$.*

*Per ogni punto $p \in E$ sia $\overrightarrow{v_p}$ il vettore tangente a $\nu$ associato a $p$ (dato dalla Proposizione 4.14), e analogamente per $\overrightarrow{v_{p'}}$, il vettore tangente a $\nu'$ associato a $p' \in E'$. Allora $df_\bullet(\overrightarrow{v_p}) = \overrightarrow{v_{p'}}$, con $p' := f_E(p)$.*

*Dimostrazione.* La prima parte della proposizione deriva dalla Proposizione 5.16.

Il sollevamento $\hat{f} : X \dashrightarrow X'$ non è in generale olomorfo, ma possiamo trovare una modificazione $\omega : Y \to X$ tale che $\hat{f}$ si sollevi ad una mappa olomorfa $g : Y \to X'$. Sia $q \in \omega^{-1}(p)$ un punto nella trasformata propria di $E$ tramite $\omega$. Se una valutazione ha centro $q$ in $Y$, allora ha centro $p$ in $X$, e quindi $U(q) \subset U(p)$.

Inoltre, $\nu = \nu_E \in \overline{U(p)}$ (è l'unico elemento nel bordo), e tutte le valutazioni di $U(p)$ rappresentano lo stesso vettore $\overrightarrow{v_p}$ tangente in $\nu$ (vedi la Proposizione 4.14). Analogamente $\nu' \in \overline{U(p')}$ e tutte le valutazioni di $U(p')$ rappresentano lo stesso vettore $\overrightarrow{v_{p'}}$ tangente in $\nu'$.

La Proposizione 5.23 ci dice allora che $f_\bullet U(q) \subseteq U(p')$, e quindi (ricordando che il valore di $df_\bullet$ su un vettore non dipende dal rappresentante scelto) che $df_\bullet(\overrightarrow{v_p}) = \overrightarrow{v_{p'}}$, ovvero la tesi. □

**Osservazione 5.26.** Nel caso che $\nu' = f_\bullet \nu = \nu$, allora $f_E$ della Proposizione 5.25 è una mappa razionale da $E \cong \mathbb{CP}^1$ in sé, e quindi ammette un punto fisso $p_\star$ (non critico), e di conseguenza $df_\bullet$ ammette un vettore tangente fisso $\overrightarrow{v_{p_\star}}$.

# Capitolo 6

# Rigidificazione

## 6.1 Mappe d'albero e punti fissi

In questa sezione vedremo un risultato di punto fisso per mappe tra alberi, che vorremo appicare a $f_\bullet : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$.

**Definizione 6.1.** Una mappa $f : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ tra due alberi non metrici completi con radice è detta **mappa d'albero** se continua rispetto alla topologia debole. È poi detta **regolare** se ogni segmento $I$ in $\mathcal{T}$ può essere scomposto in un numero finito di segmenti sui quali $f$ è un omeomorfismo con l'immagine.

**Osservazione 6.2.** Ogni morfismo $f$ di alberi non metrici completi con radice è una mappa d'albero regolare, dove $I = [\tau_1, \tau_2]$ è scomposto in (al più) due segmenti $[\tau_1 \wedge \tau_2, \tau_i]$ con $i = 1, 2$, dove $f$ è un omeomorfismo con l'immagine.

**Osservazione 6.3.** Una conseguenza immediata del Teorema 5.22 è la regolarità di $f_\bullet$ come mappa d'albero.

**Osservazione 6.4.** Sia $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ una mappa d'albero. Allora c'è un modo naturale per indurre su ogni intervallo $I$ (totalmente ordinato) una mappa d'albero $f_I : I \to I$, ponendo $f_I := \pi_I \circ f|_I$, dove $\pi_I$ è la retrazione definita da (3.2). In generale $f_I \neq f$ su $I$: l'insieme $\{\tau \in I \mid f(\tau) \neq f_I(\tau)\}$ è un sottoinsieme aperto di $I$, dove $f_I$ è localmente costante.

**Definizione 6.5.** Sia $\tau \in \mathcal{T}$ una fine dell'albero non metrico completo con radice $\mathcal{T}$. Allora $\tau$ si dice **debolmente attrattiva**, se esiste un segmento (totalmente ordinato) $I = [\tau_1, \tau]$ tale che $\tau$ sia un punto fisso attrattivo per la mappa indotta $f_I$, nel senso che $f_I(\sigma) > \sigma$ per ogni $\sigma \in [\tau_1, \tau)$.

Se in aggiunta $I$ può essere scelto $f$-invariante, $\tau$ è detta **fortemente attrattiva**.

**Teorema 6.6.** *Sia $\mathcal{T}$ un albero non metrico completo con radice $\tau_0$ e $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ una mappa d'albero (risp. una mappa d'albero regolare). Allora vale una delle seguenti due affermazioni:*

*(i) $f$ ammette un punto fisso $\tau$ che non è una fine;*

*(ii) $f$ ammette una fine debolmente (risp. fortemente) attrattiva.*

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima $f$ una mappa d'albero (non necessariamente regolare). Possiamo assumere $f(\tau_0) \neq \tau_0$, altrimenti avremmo finito ($\tau_0$ sarebbe il punto fisso cercato). Consideriamo una fine $\tau_0'$ tale che $\tau_0 < f(\tau_0) \leq \tau_0'$, e sia $I_0 = [\tau_0, \tau_0']$. Consideriamo la mappa d'albero $f_0 = f_{I_0}$ vista nell'Osservazione 6.4.

Essendo $I_0$ omeomorfo ad un intervallo reale compatto, e $f_0$ continua, allora $f_0$ ammette un punto fisso $\tau_1$ in $I_0$. Inoltre $\tau_1 > \tau_0$, essendo $f_0(\tau_0) > \tau_0$. Inoltre possiamo supporre che $\tau_1$ non sia una fine a meno che $f_0(\tau) > \tau$ per ogni $\tau \in [\tau_0, \tau_0')$, e in tal caso $\tau_1 = \tau_0'$ è una fine debolmente attrattiva (rispetto all'intervallo $I_0$).

Supponiamo dunque $\tau_1 \in (\tau_0, \tau_0')$. Notiamo che $f(\tau_1) \geq \tau_1$, essendo $\tau_1 = f_0(\tau_1) = \tau_0' \wedge f(\tau_1) \leq f(\tau_1)$; allora o $\tau_1$ è un punto fisso anche per $f$, e in tal caso abbiamo finito, oppure $f(\tau_1) > \tau_1$. In questo caso, prendiamo una fine $\tau_1'$ tale che $\tau_1 < f(\tau_1) \leq \tau_1'$, fissiamo $I_1 = [\tau_1, \tau_1']$, e denotiamo con $f_1 = f_{I_1}$ la mappa d'albero indotta su $I_1$. Come prima, $f_1$ ammette su $I_1$ (che è omeomorfo ad un intervallo compatto) un punto fisso $\tau_2 \in I_1$. Essendo $f(\tau_1) > \tau_1$, ne segue che anche $f_1(\tau_1) > \tau_1$, e quindi $\tau_2 \geq \tau_1$. Ancora una volta, possiamo supporre che $\tau_2$ non sia la fine $\tau_1'$ a meno che $f_1(\tau) > \tau$ per ogni $\tau \in [\tau_1, \tau_1')$, e in tal caso $\tau_2$ è una fine debolmente attrattiva (rispetto all'intervallo $I_1$).

Ancora una volta abbiamo $f(\tau_2) \geq \tau_2$, e possiamo supporre la disuguaglianza stretta, altrimenti avremmo trovato il nostro punto fisso.

Andando avanti così si costruisce induttivamente una successione crescente $(\tau_k)$ (finita o infinita). Se la procedura termina, abbiamo ottenuto il nostro punto fisso per $f$, che o non è una fine, o è una fine debolmente attrattiva.

Supponiamo allora che la procedura non termini in un numero finito di passi. Abbiamo quindi una successione di punti $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ tale che $f(\tau_n) > \tau_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $\tau_\infty = \sup_n \tau_n$; vogliamo dimostrare che $f(\tau_\infty) = \tau_\infty$.

Consideriamo allora $\tau_n'$ le fini costruite induttivamente in modo tale che $\tau_n < f(\tau_n) < \tau_n'$ (la seconda disuguaglianza è stretta perché la procedura non termina). Essendo $\tau_{n+1} = f_n(\tau_{n+1}) = f(\tau_{n+1}) \wedge \tau_n'$, ne segue che $(\tau_n, \tau_\infty] \cap (\tau_n, \tau_n'] = \emptyset$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare $f(\tau_n) \ngeq \tau_\infty$. Per continuità otteniamo dunque $f(\tau_\infty) \not> \tau_\infty$. D'altra parte, $f(\tau_n) > \tau_n$, e sempre per continuità otteniamo $f(\tau_\infty) \geq \tau_\infty$. Quindi $\tau_\infty$ è un punto fisso per $f$.

Se $\tau_\infty$ non è una fine, abbiamo finito. Se invece $\tau_\infty$ è una fine, consideriamo $I = [\tau_0, \tau_\infty]$, e $I^* = [\tau_0, \tau_\infty)$. Vogliamo mostrare che o esiste un punto fisso $\tau \in I^*$

per $f$ (e siamo nel caso (i)), o $f_I(\tau) > \tau$ per ogni $\tau \in I^*$ (e $\tau_\infty$ è una fine debolmente attrattiva, rispetto a $I$).

Supponiamo allora che $f$ non abbia punti fissi in $I^*$, e che per assurdo esista $\tau \in I^*$ tale che $f_I(\tau) \leq \tau$. Notiamo che $f_I(\tau_n) = \tau_\infty \wedge f(\tau_n) > \tau_\infty \wedge \tau_n = \tau_n$, e $\tau_n \to \tau_\infty$. In particolare essendo $f_I(\tau_0) > \tau_0$, esiste un punto fisso $\tau' \in (\tau_0, \tau]$ per $f_I$. Per ipotesi $f(\tau') \neq \tau'$, ma essendo $\tau' = f_I(\tau') = \tau_\infty \wedge f(\tau') \leq f(\tau')$, otteniamo $f(\tau') > \tau'$, e in particolare $f(\tau') \notin I$. Quindi $f_I$ è localmente costante in $\tau'$ (vedi l'Osservazione 6.4). Prendiamo allora $\tau'' \in I$ massimale tale che $f_I(\sigma) < \sigma$ per $\sigma \in (\tau', \tau'')$. Essendo $f_I(\tau_n) > \tau_n$, e $\tau_n \to \tau_\infty$, abbiamo che $\tau'' < \tau_\infty$. Per massimalità di $\tau''$ e continuità si ha $f_I(\tau'') = \tau''$; vogliamo dimostrare che in realtà vale $f(\tau'') = \tau''$ (ottenendo così un assurdo). Se così non fosse, allora avremmo $f(\tau'') > \tau''$, e $f(\tau'') \notin I$, e ricordando l'Osservazione 6.4, $f_I$ è localmente costante in $\tau''$, il che implica $f_I(\sigma) > \sigma$ per $\sigma$ in un intorno sufficiente piccolo di $\tau''$: assurdo (per come è stato scelto $\tau''$). Questo conclude la dimostrazione nel caso di una mappa d'albero.

Se poi $f$ è regolare, supponiamo di avere una fine debolmente attrattiva $\tau$. Per definizione esiste un segmento $I = [\tau_a, \tau)$, per cui $f_I(\sigma) > \sigma$ per ogni $\sigma \in I$. A meno di rimpicciolire $I$, per regolarità possiamo supporre che $f$ sia un omeomorfismo su $I$. In particolare l'immagine di $I$ tramite $f$ è un segmento, della forma $[f(\tau_a), \tau)$, ma $f_I(\tau_a) > \tau_a$, il che implica $f(\tau_a) > \tau_a$, e quindi $I$ è $f$-invariante. $\square$

## 6.2 Autovalutazione

**Teorema 6.7.** *Ogni germe dominante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \circlearrowleft$ con $c_\infty := c_\infty(f) > 1$ ammette una valutazione $\nu_\star \in \mathcal{V}$ tale che $f_\bullet \nu_\star = \nu_\star$, e $c(f, \nu_\star) = c_\infty$. La valutazione $\nu_\star$ può essere quasimonomiale, infinitamente singolare, o di una curva analitica non contratta. Se $\nu_\star$ non è quasimonomiale, esiste una $\nu_0 < \nu_\star$ tale che $c(f, \nu_0) = c_\infty$, $f_\bullet$ preserva l'ordine (è crescente) su $\{\nu \geq \nu_0\}$ e $f_\bullet \nu > \nu$ per $\nu \in [\nu_0, \nu_\star)$. Infine, si può trovare $0 < \delta \leq 1$ tale che $\delta c_\infty^n \leq c(f^n) \leq c_\infty^n$ per ogni $n \geq 1$.*

*Dimostrazione.* Grazie al Teorema 5.22 sappiamo che $f_\bullet$ è una mappa d'albero regolare; possiamo allora applicare i risultati del Teorema 6.6 nel nostro caso. Allora esiste un punto fisso $\nu_\star \in \mathcal{V}$ per $f_\bullet$; $\nu_\star$ è o quasimonomiale, o una fine fortemente attrattiva.

Supponiamo dapprima che $\nu_\star$ sia quasimonomiale, di distorsione $\alpha_\star := \alpha(\nu_\star) < \infty$. Dalla Proposizione 3.43 abbiamo allora che $\nu_\mathfrak{m}(\phi) \leq \nu_\star(\phi) \leq \alpha_\star \nu_\mathfrak{m}(\phi)$ per ogni $\phi \in \mathbb{C}[[x, y]]$; ma $c(f^n, \nu) = \nu(f^{n*}\mathfrak{m})$ per definizione, mentre $c(f, \nu_\mathfrak{m}) = c(f)$ è il coefficiente d'attrazione, e quindi

$$c(f^n) \leq c(f^n, \nu_\star) \leq \alpha_\star c(f^n). \tag{6.1}$$

Essendo $f_\bullet \nu_\star = \nu_\star$, segue che $c(f^n, \nu_\star) = c(f, \nu_\star)^n$. Ricordando la definizione di $c_\infty$ il coefficiente d'attrazione asintotico, calcolando prima la radice $n$-esima in tutti i membri della (6.1) e poi passando al limite, otteniamo $c_\infty \leq c(f, \nu_\star) \leq c_\infty$, ovvero $c(f, \nu_\star) = c_\infty$. Inoltre, se fissiamo $\delta = \alpha_\star^{-1}$, otteniamo, dividendo $c(f^n, \nu_\star) = c_\infty^n$ tutti i membri, che $c(f^n)/c_\infty^n \leq 1 \leq \alpha_\star c(f^n)/c_\infty^n$, o analogamente $\delta c_\infty^n \leq c(f^n) \leq c_\infty^n$.

Supponiamo ora che $\nu_\star$ sia una fine fortemente attrattiva: allora esiste un intervallo $I = [\nu_0, \nu_\star)$, per un qualche $\nu_0 < \nu_\star$, tale che $\nu < f_\bullet(\nu) \in I$ per ogni $\nu \in I$. Mostriamo che $\nu_\star$ non può appartenere all'albero critico $\mathcal{T}_f$: infatti grazie alla Proposizione 5.19 sappiamo che $\mathcal{T}_f$ è un albero finito con fini le valutazioni di curve contratte e le valutazioni divisoriali che vanno in $\nu_\mathfrak{m}$. In particolare, essendo $\nu_\star$ una fine, essa appartiene a $\mathcal{T}_f$ se e solo se è una valutazione di curve contratte. Ma come abbiamo visto nella Proposizione 5.18, l'immagine di una valutazione in $\mathfrak{C}_f$ tramite $f_\bullet$ è divisoriale, quindi in particolare nessuna valutazione di curve contratte può essere un'autovalutazione.

Dunque $\nu_\star \notin \mathcal{T}_f$. Possiamo, a meno di prendere un $\tau_0$ maggiore, supporre che $\nu_0 \notin \mathcal{T}_f$, in modo tale che $c(f, \cdot)$ è costante, e $f_\bullet$ mantiene l'ordine, su tutto $\{\nu \geq \nu_0\}$. Calcolando $c(f^n, \nu_0)$, si ottiene $c(f^n, \nu_0) = \prod_{k=0}^{n-1} c(f, f_\bullet^k \nu_0) = c_\star^n$, dove $c_\star = c(f, \nu_\star)$; (abbiamo usato che $f_\bullet^k \nu_0 > \nu_0$, e che $c(f, \cdot)$ è costante in $\{\nu \geq \nu_0\}$. La distorsione $\alpha_0 = \alpha(\nu_0)$ è finita, e ancora una volta abbiamo $c(f^n) \leq c(f^n, \nu_0) \leq \alpha_0 c(f^n)$, e come prima si conclude che $c_\star = c_\infty$, e $\delta = \alpha_0^{-1}$ soddisfa la tesi. Rimane da vedere che se $\nu_\star$ è una valutazione di curve, deve esserlo di una curva non contratta e analitica. Abbiamo già visto che una valutazione di una curva contratta non può essere un'autovalutazione, resta quindi solo da dimostrare l'analiticità.

Sarà allora utilissimo il seguente:

**Lemma 6.8.** *Per ogni $\nu \in \mathcal{V} \setminus \mathfrak{C}_f$ abbiamo:*

$$c(f, \nu) A(f_\bullet \nu) = A(\nu) + \nu(Jf), \tag{6.2}$$

*dove con $A$ si indica la sottigliezza, mentre $Jf$ è il determinante dello jacobiano di $f$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $\nu = \nu_E$ una valutazione divisoriale (e quindi $\nu' := f_\bullet \nu = \nu_{E'}$), per poi ottenere il risultato generale per densità.

Grazie alla Proposizione 5.16, esistono due modificazioni $\pi, \pi' \in \mathfrak{B}$ tali che il sollevamento $\hat{f}$ di $f$ sia olomorfo, e mandi $E$ surgettivamente in $E'$. Inoltre $c(f, \nu_E) = k b_E / b_{E'}$, con $k = \operatorname{div}(z \circ f)$, e $E' = \{z = 0\}$. Ma allora

$$\begin{array}{rcl} c(f, \nu_E) A(\nu_{E'}) & \overset{?}{=} & A(\nu_E) + \nu(Jf) \\ & \Updownarrow & \\ k \dfrac{b_{E'}}{b_E} \dfrac{a_{E'}}{b_{E'}} & \overset{?}{=} & \dfrac{a_E}{b_E} + \dfrac{1}{b_E} \operatorname{div}((Jf) \circ \pi). \end{array}$$

Utilizzando poi l'interpretazione dei pesi di Farey visti nella Proposizione 4.45, si ottiene:

$$\begin{aligned} k(1+\mathrm{div}_{E'}(J\pi')) &\stackrel{?}{=} \mathrm{div}_E(J\pi)+\mathrm{div}_E((Jf)\circ\pi)=\mathrm{div}_E(J(f\circ\pi)) \\ &\stackrel{?}{=} \mathrm{div}_E(J(\pi'\circ\hat{f})). \end{aligned}$$

Ora la tesi segue, dalla formula di cambiamento di coordinate (tramite $\hat{f}$). □

Sia dunque $\nu_\star = \nu_C$ una valutazione di curve (non contratte), e prendiamo $\nu_0$ come prima; in particolare $c(f,\nu) = c_\infty$ per ogni $\nu \geq \nu_0$. A meno di prendere un $\nu_0$ maggiore, posso supporre che $m(\nu) = m(C)$. Applichiamo allora il Lemma 6.8 ad una valutazione $\nu \in [\nu_0, \nu_C)$, e ottenendo che $c(f,\nu)A(f_\bullet\nu) = A(\nu) + \nu(Jf)$. Grazie all'Osservazione 3.58, abbiamo che $A(\nu) = m(C)\alpha(\nu) + B$, con $B \geq 2$ una costante reale. Applicando questo a $\nu = \nu_{C,t}$, dove usiamo le notazioni della Definizione 3.44, otteniamo $\nu(Jf) = c(f,\nu)A(f_\bullet\nu) - A(\nu) > A(\nu)(c(f,\nu)-1) = (m(C)t+B)(c_\infty-1) \to \infty$, essendo $c_\infty > 1$ per ipotesi (il germe è superattrattivo). Ne segue che $C$ è una curva critica di $f$, e in particolare è analitica. □

**Definizione 6.9.** Una valutazione $\nu_\star \in \mathcal{V}$ come nel Teorema 6.7 è chiamata **autovalutazione** per $f$ (può essere vista infatti come autovettore per $f_*$ con autovalore $c_\infty$.

# 6.3 Bacino d'attrazione

Il primo passo per dimostrare la rigidificazione è trovare delle piccole regioni in $\mathcal{V}$ invarianti per $f_\bullet$, che facciano da bacino di attrazione per un autovalutazione, di cui si sa l'esistenza grazie al Teorema 6.7. Questo è lo scopo della prossima proposizione.

**Proposizione 6.10.** *Sia $f$ un germe dominante (in $0$), con $c_\infty > 1$. Sia $\nu_\star$ un'autovalutazione per $f$.*

*(i) Se $\nu_\star$ è infinitamente singolare o una valutazione di una curva analitica (non contratta), allora per ogni $\nu_0 \in \mathcal{V}$ con $\nu_0 < \nu_\star$, e $\nu_0$ sufficientemente vicina a $\nu_\star$, $f_\bullet$ manda il segmento $I = [\nu_0, \nu_\star]$ strettamente in se, e mantiene l'ordine in $I$. Inoltre, se $U = U_{\nu_0}(\overrightarrow{v})$, con $\overrightarrow{v}$ il vettore tangente in $\nu_0$ rappresentato da $\nu_\star$, allora $f_\bullet$ manda $U$ in un suo sottoinsieme proprio, e $f_\bullet^n \to \nu_\star$ in $U$ per $n \to \infty$.*

*(ii) Se $\nu_\star$ è divisoriale, allora esiste un vettore $\overrightarrow{w}$ tangente a $\nu_\star$ tale che per ogni $\nu_0$ che rappresenta $\overrightarrow{w}$ e sufficientemente vicino a $\nu_\star$, allora $f_\bullet$ manda $I = [\nu_0, \nu_\star]$ strettamente in se, e mantiene l'ordine in $I$. Inoltre, se $U = U_{\nu_0}(\overrightarrow{v}) \cap U_{\nu_\star}(\overrightarrow{w})$, con $\overrightarrow{v}$ il vettore tangente in $\nu_0$ rappresentato da $\nu_\star$, allora $f_\bullet(U) \subset U$. Inoltre $f_\bullet^n \to \nu_\star$ in $U$ per $n \to \infty$.*

*(iii) Se $\nu_\star$ è irrazionale, allora esistono due valutazioni $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{V}$, arbitrariamente vicine a $\nu_\star$, tali che $\nu_1 < \nu_\star < \nu_2$ e tali che $f_\bullet$ manda $I = [\nu_1, \nu_2]$ in sè. Siano poi $\overrightarrow{v_i}$, $i = 1, 2$, i vettori tangenti a $\nu_i$ rappresentati da $\nu_\star$, e consideriamo $U = U_{\nu_1}(\overrightarrow{v_1}) \cap U_{\nu_2}(\overrightarrow{v_2})$. Allora $f_\bullet U \subset U$. Inoltre, o $f_\bullet^2 = \mathrm{id}$ su $I$ o $f_\bullet^n \to \nu_\star$ in $U$ per $\to \infty$.*

*Dimostrazione.* Mostriamo separatamente i tre casi.

(i) Supponiamo $\nu_\star$ una fine. Allora dal Teorema 6.7, sappiamo che $\nu_\star$ è una fine fortemente attrattiva; in particolare esiste $\nu_0$ tale che $I = [\nu_0, \nu_\star)$ invariante per $f_\bullet$ è tale che $f_\bullet(\nu) > \nu$ per ogni $\nu \in I$. Inoltre abbiamo visto sempre nel Teorema 6.7 che $f_\bullet$ mantiene l'ordine in tutto $\{\nu \geq \nu_0\}$, e quindi in particolare in $U$. Ne segue che $f_\bullet(U) \subset U$, strettamente, visto che l'immagine è contenuta in $\{\nu \geq f_\bullet \nu_0\}$. Dato che poi $f_\bullet^n \nu_0 \to \nu_\star$, che è una fine, otteniamo che $f_\bullet^n \to \nu_\star$ su tutto $U$.

Nel caso di una valutazione quasimonomiale, sarà molto utile il Teorema 5.22, che in particolare ci dice che $f_\bullet$ è una funzione di Möbius a tratti, se parametrizzata tramite la distorsione. Sarà allora utile il seguente risultato.

**Lemma 6.11.** *Sia $M(t) = \frac{at+b}{ct+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ e $ad - bc \neq 0$ una funzione di Möbius. Supponiamo che esista $t_\star > 0$ punto fisso per $M$. Allora o $M \circ M = \mathrm{id}$, o $t_\star$ è un punto localmente attrattivo, ovvero $|M'(t_\star)| < 1$.*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dallo studio di $M(t)$, il cui grafico è un'iperbole equilatera (o una retta). □

(iii) Supponiamo $\nu_\star$ irrazionale. Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{V}$ (vicini a $\nu_\star$) tali che $\mu_1 < \nu_\star < \mu_2$. Grazie alla regolarità (come mappa d'albero) di $f_\bullet$ dimostrata nel Teorema 5.22, possiamo supporre a meno di prendere dei $\mu_i$ più vicini a $\nu_\star$, che $f_\bullet$ sia monotona nel segmento $J = [\mu_1, \mu_2]$, e che $\alpha(f_\bullet \nu)$ sia una funzione di Möbius di $\alpha(\nu)$, che denotiamo con $M$. Il segmento $f_\bullet J$ contiene $f_\bullet \nu_\star = \nu_\star$; inoltre, essendo $\nu_\star$ un punto regolare dell'albero, la parte interna del segmento $I' = J \cap f_\bullet J =: [\eta_1, \eta_2]$ contiene $\nu_\star$, ed è tale che $f_\bullet I' \subset J$.

Applichiamo allora il Lemma 6.11 a $M$, e supponiamo dapprima che $M^2 = \mathrm{id}$ (su $I'$, o meglio sui valori che assume lì la distorsione). Se $M = \mathrm{id}$, allora anche $f_\bullet = \mathrm{id}$ in $I'$, e $I := I'$ è l'intervallo invariante cercato. Se invece $M \neq \mathrm{id}$, allora inverte l'ordine. Consideriamo allora $J' := [f_\bullet \eta_1, f_\bullet \eta_2] = f_\bullet I'$, mentre a sua volta $f_\bullet J' = I'$. Ne segue che considerando l'intersezione $I := I' \cap J'$ è un segmento invariante che contiene $\nu_\star$.

Supponiamo ora invece che $M^2 \neq \mathrm{id}$; allora per il Lemma 6.11, il punto fisso $t_\star = \alpha(\nu_\star)$ è localmente attrattivo, e quindi a meno di restringere $I'$, ancora una volta si ottiene un segmento $I$ invariante; inoltre in questo caso $f_\bullet^n \to \nu_\star$ in $I$.

Osserviamo che $I =: [\nu_1, \nu_2]$ può essere scelto arbitrariamente piccolo in tutti i casi discussi.

Consideriamo ora la regione $U$ associata ad $I$ (descritta nell'enunciato); consideriamo una valutazione di curve $\nu_\psi > \nu_2$. Allora $U = \{\nu \in \mathcal{V} \mid \nu_1 < \nu \wedge \nu_\psi < \nu_2\}$. Scriviamo $f^*\psi = \prod \psi_k$, con $\psi_k \in \mathfrak{m}$ irriducibili. Allora le valutazioni di curve $\nu_{\psi_k}$ sono le preimmagini di $\nu_\psi$ tramite $f_\bullet$. A meno di restringere $I$, possiamo supporre che nessuna di queste valutazioni sia in $U$: infatti $\nu_{\phi_k} \wedge \nu_\psi$ è una valutazione divisoriale, e quindi in particolare è diversa da $\nu_\star$. In realtà possiamo supporre che $U$ intersechi l'albero finito con fini le $\nu_{\psi_k}$ solo in $I$: infatti se $\nu \leq \nu_{\psi_k}$, allora $\nu \wedge \nu_\psi$ è divisoriale, e quindi diversa da $\nu_\star$, tranne al più se $\nu \leq \nu_\psi$.

In vista della Proposizione 3.61, si ottiene che il potenziale $\mu \mapsto \mu(f^*\psi)$ è costante sui segmenti della forma $[\nu_0, \nu]$, con $\nu_0 \in I$ e $\nu_0 \leq \nu \in U$.

Analogamente posso supporre a meno di restringere $I$ che $U$ non intersechi l'albero critico $\mathcal{T}_f$ se non in $I$; questa volta ricordando la Proposizione 5.19 si ha che anche $c(f, \cdot)$ è costante sugli stessi segmenti di prima.

Ne segue che

$$f_\bullet\nu(\psi) = \frac{\nu(f^*\psi)}{c(f,\nu)} = \frac{\nu_0(f^*\psi)}{c(f,\nu_0)} = f_\bullet\nu_0(\psi).$$

Grazie alla Proposizione 3.43, otteniamo allora che $f_\bullet\nu \wedge \nu_\psi = f_\bullet\nu_0 \wedge \nu_\psi$ (essendone uguali le distorsioni, ed entrambe in $[\nu_\mathfrak{m}, \nu_\psi]$). Ma $\nu_0 \in I$, e dunque $f_\bullet\nu_0 \wedge \nu_\psi = f_\bullet\nu_0 \in f_\bullet I \subset I$. Ne segue che $f_\bullet\nu \in U$, e per arbitrarietà di $\nu$ e $\nu_0$, si ottiene che $f_\bullet U \subset U$.

Inoltre quando $f_\bullet^2 \neq \mathrm{id}$ su $I$, allora $f_\bullet^n \to \nu_\star$ su $I$, e quindi anche in $U$.

(ii) Supponiamo $\nu_\star$ divisoriale. Per l'Osservazione 5.26, esiste un vettore tangente $\overrightarrow{w}$ a $\nu_\star$ invariante rispetto al differenziale $df_\bullet$.

Sia allora $\mu_0$ una valutazione che rappresenti $\overrightarrow{w}$ e abbastanza vicina a $\nu_\star$ in modo tale che $f_\bullet$ sia monotona nel segmento $J = [\nu_\star, \mu_0]$, e tale che se parametrizzata con la distorsione, $f_\bullet$ sia una funzione di Möbius $M$ (possibile grazie al Teorema 5.22, analogamente al caso (iii)).

Applichiamo di nuovo il Lemma 6.11; se $M$ è localmente attrattivo abbiamo finito. Supponiamo dunque che $M^2 = \mathrm{id}$, e ricaviamone un assurdo.

Innanzitutto, visto che stiamo considerando un segmento $J$ che ha come uno dei due estremi $\nu_\star$, e che viene mantenuto fisso, $M^2 = \mathrm{id}$ implica $M = \mathrm{id}$, ovvero $f_\bullet = \mathrm{id}$ in $J$ (ancora una volta, sappiamo già che il vettore tangente rimane fisso). Segue allora dalla Proposizione 5.16 che $c(f, \cdot) \equiv k$, con $k > 1$ intero. Possiamo dunque trovare una valutazione $\nu_1 \in J$, arbitrariamente vicina a $\nu_\star$, e una modificazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ tale che $\nu_\star$ e $\nu_1$ sono valutazioni divisoriali associate a due componenti eccezionali adiacenti $E$ ed $E_1$, che si intersecano in un certo punto $p$ (corrispondente al vettore tangente $\overrightarrow{w}$ grazie alla Proposizione 4.14). Allora il sollevamento $\hat{f} : X \dashrightarrow X$ di $f$ è in realtà olomorfo in $p$, e $\hat{f}(p) = p$: grazie alla Proposizione 5.23 infatti, questo equivale all'avere che $U(p)$ non contiene valutazioni divisoriali associate a componenti eccezionali di $\pi$, vero per la scelta di $E_1$ come componente eccezionale adiacente ad $E$; inoltre $f_\bullet U(p) \subseteq U(p)$, da cui segue che $\hat{f}(p) = p$. Ma $\hat{f}^* E = kE$, $\hat{f}^* E_1 = kE_1$, da cui segue che $\hat{f}|_E$ ha un punto critico in $p$, contro l'ipotesi fatta grazie all'Osservazione 5.26.

$\square$

## 6.4 Germi rigidi

**Definizione 6.12.** Consideriamo un germe olomorfo $f : (\mathbb{C}^2, 0) \circlearrowleft$. Denotiamo con $\mathcal{C}(f)$ l'insieme dei punti critici per $f$ (è un luogo di zeri di una funzione analitica di $\mathbb{C}^2$), e con $\mathcal{C}^\infty(f) := \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{C}(f)) = \bigcup_{n \geq 0}(\mathcal{C}(f^n))$ quello che chiameremo **insieme critico generalizzato**, fatto dai punti le cui orbite intersecano $\mathcal{C}(f)$, o analogamente, l'unione dei punti critici per $f^n$ per ogni $n$.

**Osservazione 6.13.** Si vede direttamente dalla definizione che $f^{-1}(\mathcal{C}^\infty(f)) \subset \mathcal{C}^\infty(f)$, e quindi se considero un polidisco $\Delta^2$, $f(\Delta^2 \setminus \mathcal{C}^\infty(f)) \subset \Delta^2 \setminus \mathcal{C}^\infty(f)$, cioè $\Delta^2 \setminus \mathcal{C}^\infty(f)$ è invariante rispetto ad $f$.

**Definizione 6.14.** Un germe olomorfo $f : (\mathbb{C}^2, 0) \circlearrowleft$ è detto **rigido** se $\mathcal{C}^\infty(f)$ è ad incroci normali nell'origine. Equivalentemente $\mathcal{C}^\infty(f)$ è o vuoto, o una curva liscia, o due curve lisce trasverse nell'origine.

In questa sezione vogliamo mostrare qual'è la classificazione (olomorfa e formale) dei germi rigidi. Per farlo, suddividiamo tali germi in sette classi, a seconda dei valori assunti da tre invarianti, che andiamo ora ad analizzare:

**L'insieme critico generalizzato:** definito poco sopra, nel caso di un germe rigido $f$, possiamo distinguere tre casi; se $\mathcal{C}^\infty(f) = \emptyset$, allora diciamo che $f$ è **regolare**; se $\mathcal{C}^\infty(f)$ è formato da una sola curva irriducibile liscia, allora diciamo che $f$ è **irriducibile**; altrimenti, se $\mathcal{C}^\infty(f)$ è formato dall'unione di due curve liscie trasverse, allora diciamo che $f$ è **riducibile**.

**La traccia:** consideriamo il differenziale di $f$ in 0, che denotiamo con $df_0$, e la sua traccia $\operatorname{tr} df_0$. Se $f$ non è regolare, ovvero $\det df_0 = 0$, allora ci sono solo due casi: o $\operatorname{tr} df_0 \neq 0$, e allora c'è un autovalore non nullo ed uno nullo; oppure $\operatorname{tr} df_0 = 0$, e c'è un solo autovalore nullo (doppio), e $f$ è superattrattivo.

**L'azione di $f_*$:** infatti ricordando l'Osservazione 6.13, per ogni $\epsilon > 0$, se si considera il polidisco $\Delta^2$ di raggio $\epsilon$, possiamo considerare l'indotta da $f$ in omotopia: $f_* : \pi_1(\Delta^2 \setminus \mathcal{C}^\infty(f)) \circlearrowleft$, dove il $\pi_1$ indica il primo gruppo fondamentale. Denotiamo con $\Delta^2(f) := \Delta^2 \setminus \mathcal{C}^\infty(f)$ Nel caso di un germe rigido $f$, si vede che se $f$ è regolare allora $\Delta^2(f)$ è contraibile, e quindi $\pi_1(\Delta^2(f)) = 0$ e l'azione è banale; se $f$ è irriducibile, allora $\Delta^2(f)$ è un piano complesso senza una retta complessa, $\pi_1(\Delta^2(f)) = \mathbb{Z}$ e quindi l'azione di $f_*$ ci da un valore intero (positivo); se $f$ è riducibile allora $\Delta^2(f)$ è un piano complesso senza due rette complesse che si intersecano in 0, e quindi $\pi_1(\Delta^2(f)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e $f_*$ ci da una matrice $2 \times 2$ con coefficienti interi. Suddivideremo i germi a seconda dell'invertibilità o meno di $f_*$.

**Osservazione 6.15.** Questi tre oggetti appena descritti sono invarianti per la coniugazione sia formale che olomorfa, ma non sono indipendenti l'uno dall'altro. Ad esempio, nel caso di un germe regolare, si ha che $df_0$ è invertibile; se $f$ è irriducibile, allora $f_* > 0$ ($f$ è olomorfa, e dunque mantiene l'orientazione).

Possiamo allora definire le sette classi di germi rigidi, di cui andremo poi a studiare la classificazione formale e olomorfa.

**Definizione 6.16.** Sia $f$ un germe rigido. Allora diremo che $f$ appartiene alla classe:

1. se $f$ è regolare (ovvero $\mathcal{C}^\infty(f) = \emptyset$);
2. se $f$ è irriducibile, $\operatorname{tr} df_0 \neq 0$, e $f_* = 1$;
3. se $f$ è irriducibile, $\operatorname{tr} df_0 \neq 0$, e $f_* \geq 2$;
4. se $f$ è irriducibile, $\operatorname{tr} df_0 = 0$;
5. se $f$ è riducibile, $\operatorname{tr} df_0 \neq 0$;
6. se $f$ è riducibile, $\operatorname{tr} df_0 = 0$, e $f_*$ è invertibile;
7. se $f$ è riducibile, $\operatorname{tr} df_0 = 0$, e $f_*$ è singolare.

**Osservazione 6.17.** Facciamo qui degli accorgimenti che saranno utili per enunciare la classificazione nel caso di germe $f$ riducibile. In questo caso possiamo supporre $\mathcal{C}^\infty(f) = \{zw = 0\}$; essendo poi $C^\infty(f)$ totalmente invariante, possiamo supporre

$$f(z,w) = (z^a w^b \psi_1(z,w), z^c w^d \psi_2(z,w)),$$

con $\psi_1, \psi_2$ germi di funzioni in 0 che assumono un valore non nullo in 0, e $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, che derivano dall'azione di $f_*$ vista prima.

Consideriamo le matrici

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = M(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $\sigma(z,w) = (w,z)$. Allora la classe di $M(f)$ in $M(2,\mathbb{N})/\{\mathrm{Id}, \Sigma`\}$ è un invariante per la coniugazione formale ed olomorfa.

In alcuni casi sarà più utile usare una notazione vettoriale: indicheremo quindi $Z = (z,w)$, mentre con $Z^{M(f)}$ la funzione $(z,w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d)$, con $M(f)$ la matrice $2 \times 2$ di entrate $a, b, c, d$. Analogamente se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, allora scriveremo $\lambda Z := (\lambda_1 z, \lambda_2 w)$.

Daremo l'enunciato della classificazione formale e olomorfa dei germi attrattivi ridigi solo per le classi che ci serviranno, ovvero la 4 e la 6. Per la dimostrazione, rimandiamo al [Fav].

**Teorema 6.18.** *Sia $f$ un germe attrattivo rigido. Allora:*

*(i) $f$ è coniugato olomorficamente ad una mappa polinomiale $F$ tramite un biolomorfismo locale $\phi$ tangente all'identità;*

*(ii) ogni forma normale $F$ preserva una foliazione $\mathcal{F}$ data da $z^\alpha w^\beta = \mathrm{c.te}$ per dei reali positivi $\alpha, \beta \geq 0$.*

*(iii) La coniugazione formale e olomorfa coincidono a meno che $f$ non appartenga alla classe 2.*

*Più precisamente, esponiamo le forme normali a seconda della classe:*

4 *Sia $p = f_* \geq 2$, e $q = 1 - p + m(\det(df_{(z,w)})) \in \mathbb{N}^*$, dove $m$ indica la molteplicità in 0. Sia inoltre $k = q/(p-1)$. Allora $p$, $q$ e $k$ sono invarianti olomorfi e formali, e $f$ è coniugata olomorficamente e formalmente a $(z^p, \lambda z^q w + P(z))$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $P$ polinomio nullo in 0. Più precisamente:*

*se $k \notin \mathbb{N}$ o $\lambda \neq 1$ (caso **non speciale**), allora $P(z) = Q(z)$ con $Q$ polinomio di grado al più $q$ che si annulla in 0;*

*se $k \in \mathbb{N}$ e $\lambda = 1$ (caso **speciale**), allora $P(z) = Q(z) + a_{k+q} z^{k+q}$, con $Q$ polinomio di grado al più $q$ che si annulla in 0 e $a_{k+q} \in \mathbb{C}$.*

*Due forme normali sono coniugate se e solo se* $\lambda_1 = \zeta^q \lambda_2$, *e* $g_1(z) = bg_2(\zeta z)$ *con* $b \in \mathbb{C}^*$ *e* $\zeta$ *radice* $(p-1)$*-esima dell'unità.*

6 *Esiste* $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^2$ *tale che* $f$ *è coniugata olomorficamente e formalmente a* $\lambda Z^{M(f)} = (\lambda_1 z^a w^b, \lambda_2 z^c w^d)$. *Viceversa, una mappa dela forma* $Z \mapsto \lambda Z^M$ *appartiene alla sesta classe se e solo se* $ad - bc \neq 0$, $\min\{a+c, b+d\} \geq 2$, *e vale una tra le seguenti due:* $\min\{a, c\} + b \geq 2$ *o* $ad = 0$. *Se poi indichiamo con* $\mathrm{Spec}(M)$ *lo spettro degli autovalori di* $M$, *abbiamo che:*

*se* $1 \notin \mathrm{Spec}(M(f))$, *possiamo scegliere* $\lambda = 1$, *e due forme normali sono equivalenti se e solo se* $M(f) = M(g)$ *o* $M(f) \circ \Sigma = \Sigma \circ M(g)$*;*

*se* $1 \in \mathrm{Spec}(M(f))$, *consideriamo un vettore* $\xi \in \mathbb{Z}^2$ *che generi* $\ker(M(f) - \mathrm{Id})$. *Due forme normali* $f = \lambda Z^{M(f)}$ *e* $g = \mu Z^{M(g)}$ *sono equivalenti se e solo se* $M(f) = M(g)$ *e* $\lambda^\xi = \mu^\xi$*; o* $M(f) \circ \Sigma = \Sigma \circ M(g)$ *e* $\lambda^\xi = \mu^{\Sigma\xi}$.

## 6.5 Rigidificazione

Possiamo ora dimostrare il risultato di rigidificazione nel caso di un germe superattrattivo dominante. Prima di far questo, mostriamo come si può utilizzare lo studio dell'azione di $f_\bullet$ per determinare le proprietà di $\hat{f}$ il sollevamento di $f$.

**Osservazione 6.19.** Supponiamo che $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ sia una modificazione tale che $\hat{f} = \pi^{-1} \circ f \circ \pi$ sia olomorfa in $p$ punto fisso. Vogliamo vedere cosa si può dedurre dell'azione di $f_\bullet$ su $\mathcal{V}$ a partire dall'insieme critico di $\hat{f}$.

Dalla relazione $\hat{f} = \pi^{-1} \circ f \circ \pi$ si ricava $\hat{f}_* = \pi^* \circ f_* \circ \pi_*$: in pratica considero solo le valutazioni centrate in $p$, anzichè quelle centrate in 0.

Allora, se $D$ è una curva critica per $\hat{f}$, essa può essere o una componente eccezionale (unica se riusciamo a supporre $p$ un punto libero), o il sollevamento di una curva irriducibile $C$ in $(\mathbb{C}^2, 0)$ tramite $\pi$. Nel primo caso, per la Proposizione 5.16, abbiamo che $\hat{f}$ manda $E$ surgettivamente in $E'$ con $E'$ tale che $f_\bullet \nu_E = \nu_{E'}$. Nel secondo caso, dato che l'insieme critico $\mathcal{C}(f)$ è mandato in se da $f$, si ha che $\hat{f}$ manda una curva critica in un'altra curva critica, o contrae in $p$.

Cercheremo nella dimostrazione della rigidificazione, di trovare opportuni bacini d'attrazione, evitando controimmagini tramite $f_\bullet$ di valutazioni $\nu_E$ con $E$ una componente eccezionale critica, o valutazioni in $\mathfrak{C}_f$, o valutazioni di curve critiche (non necessariamente contratte), in modo tale da controllare il luogo dei punti critici per $\hat{f}$, ed ottenere un germe rigido.

Questo sarà possibile perché il numero di valutazioni da evitare è un numero finito.

**Teorema 6.20.** *Sia $f$ un germe dominante (in $0$) con $c_\infty > 1$. Allora a partire da un'autovalutazione $\nu_\star$, si può trovare una modificazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$, e un punto infinitamente vicino $p \in \pi^{-1}(0)$ tale che il sollevamento $\hat{f}$ di $f$ è olomorfo in $p$, $\hat{f}(p) = p$, e $\hat{f} : (X, p) \to (X, p)$ è rigido. Inoltre, esistono coordinate locali $(z, w)$ in $p$ tali che $\hat{(f)}$ assume una delle seguenti forme:*

*(i) se $\nu_\star$ è divisoriale, allora $\hat{f}(z, w) = (z^a w^b(1 + \phi), \lambda w(1 + \psi))$, con $a \geq 2$, $b \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\phi(0) = \psi(0) = 0$; inoltre $c_\infty(f) = a$;*

*(ii) se $\nu_\star$ è irrazionale, allora $\hat{f}(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $ad - bc \neq 0$; inoltre $c_\infty(f)$ è il raggio spettrale della matrice $2 \times 2$ con entrate $a, b, c, d$;*

*(iii) se $\nu_\star$ è la valutazione di una curva analitica non contratta, allora $\hat{f}(z, w) = (z^a, \lambda z^c w^d)$, con $d \geq a \geq 2$, $c \geq 1$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$; inoltre $c_\infty(f) = a$;*

*(iv) se $\nu_\star$ è infinitamente singolare, allora $\hat{f}(z, w) = (z^a, \lambda z^c w + P(z))$, con $a \geq 2$, $c \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $P \not\equiv 0$ un polinomio; inoltre $c_\infty(f) = a$.*

*Dimostrazione.* La strategia che adotteremo per questa dimostrazione è di mostrare che possiamo scegliere il bacino d'attrazione $U$ di un'autovalutazione in modo tale che sia $U = U(p)$ con $p$ un punto del divisore eccezionale di una certa modificazione $\pi$. Questo farà sì che il sollevamento di $\hat{f}$ di $f$ sia olomorfo in $p$. Scegliendo poi $U$ abbastanza piccolo, possiamo controllare l'insieme critico di $\hat{f}$, così da rendere il germe rigido. Inoltre grazie al Teorema 6.18, riusciremo a calcolare delle forme normali per $\hat{f}$, così da ottenere in particolare un modo esplicito per calcolare $c_\infty(f)$. Studieremo separatamente i quattro casi.

(iii) Supponiamo dapprima che $\nu_\star = \nu_C$ sia una valutazione di una curva analitica non contratta da $f$. Consideriamo $\nu_0$ come nella Proposizione 6.10. A meno di prenderne una maggiore, possiamo supporre $\nu_0$ divisoriale. Sia allora $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ una modificazione tale che $\nu_0 = \nu_{E_0}$ per una certa componente eccezionale $E_0 \subset \pi^{-1}(0)$, e tale che $\tilde{C}$ la trasformata propria di $C$ tramite $\pi$ sia ad incroci normali (possiamo ad esempio considerare una modificazione $\pi_1$ tale che $\nu_0 = \nu_{E_0}$, una seconda $\pi_2$ che risolve le singolarità di $C$, e prenderne poi il join, oppure applicare la Proposizione 5.5). Allora c'è un'unica componente eccezionale $E \subset \pi^{-1}(0)$ che interseca $\tilde{C}$ in un punto (libero), che chiamiamo $p$. Segue dalla Proposizione 4.53 che $\nu_E < \nu_C$ è l'unica valutazione divisoriale della forma $\nu_F$ con $F \subset \pi^{-1}(0)$ tale che $[\nu_f, \nu_C]$ non contenga altre valutazioni di questa forma oltre a $\nu_F$ stessa. In particolare si ottiene $\nu_0 \leq \nu_E \leq \nu_C$, e a meno di variare $\nu_0$, si può quindi scegliere $\nu_E$ arbitrariamente vicino a $\nu_C$. Inoltre per il Corollario 4.55, l'insieme $U = U(p)$ delle valutazioni che hanno centro in $p$ è un aperto di $\mathcal{V}$ che coincide con

$U_{\nu_E}([\nu_\star])$ l'aperto delle valutazioni rappresentano lo stesso vettore tangente di $\nu_\star$ in $\nu_E$. Dalla Proposizione 6.10, se ne deduce che $f_\bullet U \subset\subset U$.

Per la Proposizione 5.23 si ha che il sollevamento $\hat{f} = \pi^{-1} \circ f \circ \pi$ (come funzione razionale) è olomorfo in $p$ e $\hat{f}(p) = p$. Inoltre a meno di prendere un $\nu_0$ maggiore, possiamo assumere che $U$ non contenga valutazioni di curve in $\mathfrak{C}_f$, né preimmagini di $\nu_C$ tramite la $f_\bullet$, eccetto $\nu_C$, né valutazioni di curve critiche per $f$ (essendo queste valutazioni in un numero finito).

Allora grazie all'Osservazione 6.19, $\hat{f}$ risulta rigido (in $p$).

Per ottenere la forma normale di $\hat{f}$ in $p$, notiamo prima di tutto che $\hat{f}$ è superattrattivo in $p$, e quindi $\hat{f}$ può essere solo delle classi 4, 6 o 7 (dato che $d\hat{f}_p = 0$). Inoltre, $\mathcal{C}^\infty(f) = E \cup \tilde{C}$ per costruzione, con $E$ che viene contratto a 0 (visto che $f_\bullet \nu_E > \nu_E$), mentre $\tilde{C}$ rimane fisso per l'azione di $\hat{f}$. Più precisamente, grazie alla Proposizione 5.17, abbiamo che il grado topologico di $\hat{f}|_C$ è $e(f, C) = c(f, \nu_C) = c_\infty > 1$. Ne segue che $\hat{f}$ è del tipo 6 e per il Teorema 6.18 (siamo nel primo caso) $\hat{f}$ è coniugata a $(z, w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d)$, dove le coordinate $(z, w)$ in $p$ sono scelte in modo tale che $E = \{z = 0\}$ e $\tilde{C} = \{w = 0\}$. Dal fatto che $\tilde{C}$ non viene contratta a 0 segue che $b = 0$; abbiamo dunque $a, c, d \geq 2$. Inoltre dal conto diretto, sapendo che $\nu_C$ è attrattiva per $f_\bullet$, segue che $d \geq a$. Allora ancora dal calcolo diretto segue che $c_\infty = a$.

(iv) Supponiamo ora che $\nu_\star$ sia infinitamente singolare. Consideriamo come prima una valutazione $\nu_0 < \nu_\star$ come nella Proposizione 6.10. La molteplicità di $\nu_\star$ è infinita, ne segue che ci sono infiniti salti della molteplicità nel segmento $[\nu_{\mathfrak{m}}, \nu_\star)$, e in particolare ce ne sono arbitrariamente vicini a $\nu_\star$. Consideriamo uno di questi punti di salto $\nu$ tale che $\nu_0 \leq \nu < \nu_\star$.

Per la Proposizione 4.56, esiste una modificazione $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ tale che $\nu = \nu_E$, con $E \in \Gamma_\pi^*$ una componente eccezionale, e tale che il centro di $\nu_\star$ in $X$ è un punto libero $p \in E$. Ma allora possiamo considerare $U = U(p)$, e concludere grazie alla Proposizione 6.10 che $f_\bullet U \subset\subset U$.

Come prima, il sollevamento $\hat{f} = \pi^- 1 \circ f \circ \pi$ è olomorfo in $p$ e $\hat{f}(p) = p$. Possiamo inoltre assumere, a meno di prendere un $\nu_0$ maggiore, che $U$ non contenga alcuna valutazione associata ad una curva critica (contratta o meno).

Ne segue che $\hat{f}$ è un germe rigido in $p$, e che il suo insieme critico è $\mathcal{C}(\hat{f}) = E$, che è contratto a $p$. Dunque $\hat{f}$ è del tipo 4, e per il Teorema 6.18, è coniugata a $(z, w) \mapsto (z^a, \lambda z^c w + P(z))$, dove $(z, w)$ sono delle coordinate in $p$ tali che $E = \{z = 0\}$. Dato che $f_\bullet$ non mantiene fissa nessuna valutazione di curve in $U$, allora $\hat{f}$ non mantiene fissa nessuna curva, e in particolare $P \not\equiv 0$.

Verifichiamo che $c(f, \nu_E) = a$:

$$c(f, \nu_E) = \nu_E(f^*\mathfrak{m}) = \frac{1}{b_E}\,\mathrm{div}_E(\pi^* f^* \mathfrak{m}) = \frac{1}{b_E}\,\mathrm{div}_E(\hat{f}^* \pi^* \mathfrak{m});$$

ma $\pi^*\mathfrak{m} = \langle z^{b_E} \rangle$ (essendo $p$ libero), e quindi

$$\frac{1}{b_E}\,\mathrm{div}_E(\hat{f}^* \pi^* \mathfrak{m}) = \frac{1}{b_E}\,\mathrm{div}_E(\hat{f}^* z^{b_E}) = \frac{1}{b_E}\,\mathrm{div}_E(z^{ab_E}) = a.$$

Ma per come abbiamo scelto $\nu_E$ e per il Teorema 6.7 abbiamo che $c_\infty = c(f, \nu_E) = a$.

(i) Consideriamo il caso di una $\nu_\star$ divisoriale. Sia allora $\nu_0$ come nella Proposizione 6.10, che possiamo supporre divisoriale e arbitrariamente vicina a $\nu_\star$. Sia allora $\pi \in \mathfrak{B}$ una modificazione tale che $\nu_\star$ e $\nu_0$ siano associate a delle componenti eccezionali $E, E_0 \in \Gamma_\pi^*$ rispettivamente.

Ricordando la Proposizione 4.53, esiste un'unica valutazione $\nu_F$ con $F \in \Gamma_\pi^*$ che interseca $E$ (in un certo punto $p$) e tale che $\nu_F \in (\nu_\star, \nu_0]$. Consideriamo allora $\nu_F$ al posto di $\nu_0$. Allora l'insieme $U$ dato dalla Proposizione 6.10 è della forma $U = U(p)$, e $f_\bullet U \subset\subset U$.

Come prima segue dalla Proposizione 6.10 che $f_\bullet U \subset\subset U$, e dalla Proposizione 5.23 che $\hat{f} = \pi^{-1} \circ f \circ \pi$ è olomorfo in $p$ e $\hat{f}(p) = p$.

A meno di considerare una $\nu_0$ più vicina a $\nu_\star$, possiamo supporre che $U$ non contenga alcuna valutazione associata ad una curva irriducibile critica (non necessariamente contratta). Ne segue che $\hat{f}$ è rigido, di insieme critico $\mathcal{C}(f) = E \cup F$, che è totalmente invariante (essendo $f_\bullet U \subset\subset U$.

Ricordando l'Osservazione 5.26, possiamo considerare $p$ un punto fisso non critico per la mappa $\hat{f} : E \to E$. Inoltre, come visto nell'Osservazione 6.17, possiamo scegliere delle coordinate $(z, w)$ in $p$ tali che $E = \{z = 0\}$, $F = \{w = 0\}$, e $\hat{f}$ in queste coordinate prende la forma:

$$(z, w) \mapsto (z^a w^b \phi_1, z^c w^d \phi_2),$$

con $\phi_1, \phi_2$ germi di funzione olomorfa non nulla in 0, mentre $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

Ma in particolare si ha che $\hat{f}(E) = E$, da cui si ottiene $c = 0$, mentre per la scelta di $p$ come punto fisso non critico per $\hat{f}$ ristretto ad $E$, si deriva $d = 1$. Inoltre siccome $\hat{f}$ contrae $F$, si ottiene che $a, b \geq 1$. Da questa si può ottenere la forma cercata nella tesi (a meno di cambiare $w$ per uno scalare). Ma allora la Proposizione 5.16, abbiamo che $c_\infty = c(f, \nu_E) = a$ (ed in particolare dunque $a \geq 2$.

(ii) Supponiamo infine che $\nu_\star$ sia irrazionale. Per la Proposizione 6.10, esistono dei $\nu_1, \nu_2$ arbitrariamente vicini a $\nu_\star$ e tali che $\nu_1 < \nu_\star < \nu_2$ che individuano il bacino di attrazione. Possiamo sceglierli divisoriali, ma per averli della forma $U(p)$ per un punto infinitamente vicino $p$, abbiamo bisogno di un risultato leggermente più forte.

**Lemma 6.21.** *Esiste una modificazione $\pi \in \mathfrak{B}$ e due componenti eccezionali adiacenti $E_1, E_2 \in \Gamma_\pi^*$ (con punto d'intersezione $p$), tali che:*

*(i) le valutazioni divisoriali $\nu_1 = \nu_{E_1}$ e $\nu_2 = \nu_{E_2}$ soddisfano $\nu_1 < \nu_\star < \nu_2$;*

*(ii) l'aperto $U := \{\nu \mid \nu_1 < \nu \wedge \nu_2 < \nu_2\}$ è $f_\bullet$-invariante.*

*Inoltre $\nu_1$ e $\nu_2$ possono essere scelte arbitrariamente vicine a $\nu_\star$.*

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione si rimanda al [FJ2, Lemma 5.6]. □

Allora l'aperto $U$ dato dal Lemma 6.21 è della forma $U = U(p)$. Essendo poi $U$ un aperto $f_\bullet$-invariante, si conclude come prima che $\hat{f}$ il sollevamento di $f$ tramite $\pi$ è olomorfo e ha un punto fisso in $p$. Inoltre come sempre a meno di prendere $\nu_1$ e $\nu_2$ più vicini, posso supporre che $U$ non contenga valutazioni associate a curve critiche (contratte o meno), ed ottenere che $\hat{f}$ è rigido in $p$, con insieme critico $\mathcal{C}(f) = E_1 \cup E_2$.

Per ottenere una forma normale per $\hat{f}$, fissiamo dapprima delle coordinate locali $(z, w)$ in $p$, tali che $E_1 = \{z = 0\}$ e $E_2 = \{w = 0\}$. Sempre per l'Osservazione 6.17, possiamo supporre che $\hat{f}$ sia della forma $(z, w) \mapsto (z^a w^b \phi_1, z^c w^d \phi_2)$, con $\phi_1$ e $\phi_2$ germi olomorfi e non nulli in $p$, e $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Per ogni $s, t \geq 0$, consideriamo le valutazioni monomiali nelle coordinate $(z, w)$ date da $\mu_{s,t}(z) = s$ e $\mu_{s,t}(w) = t$. Allora per l'Osservazione 4.57) il segmento $I = [\nu_1, \nu_2]$ è parametrizzato da $\nu_{s,t} := \pi_* \mu_{s,t}$, per $s, t$ che soddisfano $b_{E_1} s + b_{E_2} t = 1$. Notiamo che $\nu_{1,0} = b_{E_1} \nu_1$ e $\nu_{0,1} = b_{E_2} \nu_2$; inoltre dal calcolo diretto si vede che $\hat{f}_* \mu_{1,0} = \mu_{a,b}$ e che $\hat{f}_* \mu_{0,1} = \mu_{c,d}$. Essendo $f_\bullet$ iniettiva in $[\nu_1, \nu_2]$, ne segue che $\mu_{a.b}$ e $\mu_{c,d}$ non sono proporzionali, ovvero che $ad \neq bc$. Ma allora, ricordando l'Osservazione 6.17, $\hat{f}$ è del tipo 6, ed è quindi coniugata ad una mappa monimiale per il Teorema 6.18.

Vogliamo ora mostrare che, se $M$ è la matrice di entrate $a, b, c, d$, e con $\rho$ il suo raggio spettrale, allora $c_\infty = \rho$. Denotiamo con $a_n, b_n, c_n, d_n$ le entrate di $M^n$.

**Lemma 6.22.** *In queste condizioni si ha che per ogni $s, t > 0$ si ha che $\lim_n \sqrt[n]{s a_n + t c_n} = \rho$.*

*Dimostrazione.* Segue calcolando direttamente l'espressione $\rho^{-1}\sqrt[n]{sa_n + tc_n}$, passando per la forma di Jordan di $M$ per controllare la crescita delle entrate di $M^n$. $\square$

Siccome $f_\bullet \nu \to \nu_\star$ per ogni $\nu \in I$, ricordando il Teorema 6.7, la Proposizione 5.19 e il Corollario 3.62, si ottiene che $c_\infty = c(f, \nu_\star) = \lim_n \sqrt[n]{c(f^n, \nu)}$ per ogni $\nu \in I$. Calcoliamo allora $c(f^n, \nu_{s,t})$; analogalmente al caso (iv), ricordando che in questo caso $p$ è satellitare, e quindi $\pi^*\mathfrak{m} = \langle z^{b_{E_1}} w^{b_{E_2}} \rangle$, si ottiene:

$$\begin{aligned} c(f, \nu_{s,t}) &= \nu_{s,t}(f^*\mathfrak{m}) = \mu_{s,t}(\pi^* f^* \mathfrak{m}) = \mu_{s,t}(\hat{f}^* \pi^* \mathfrak{m}) \\ &= \mu_{s,t}(z^{b_{E_1}} w^{b_{E_2}} \circ \hat{f}) = (b_{E_1}, b_{E_2}) M(s,t)^T, \end{aligned}$$

e analogamente per le iterate $n$-esime.

In particolare, applicando questo calcolo al caso di $\nu_1 = \nu_{s,t}$ con $s = 1/b_{E_1}$ e $t = 0$, e utilizzando il Lemma 6.22, si ottiene la tesi.

$\square$

**Corollario 6.23.** *Per ogni germe dominante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, il coefficiente d'attrazione asintotico $c_\infty = c_\infty(f)$ è un intero quadratico, ovvero esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $c_\infty^2 + ac_\infty + b = 0$. Inoltre, esiste $\delta \in (0, 1]$ tale che $\delta c_\infty^n \le c(f^n) \le c_\infty^n$ per ogni $n \ge 1$.*

*Dimostrazione.* Che $c_\infty$ sia un intero quadratico segue direttamente dal Teorema 6.20: è un intero a meno che non siamo nel caso (ii), dove l'autovalutazione $\nu_\star$ considerata è irrazionale; in questo caso $c_\infty$ è il raggio spettrale di una matrice $2 \times 2$ con entrate intere, e quindi è soluzione del polinomio caratteristico, che è di secondo grado. Un $\delta$ con le proprietà richieste è dato invece dal Teorema 6.7. $\square$

# Bibliografia


[AM] Michael F. Atiyah, Ian G. Macdonald. **Introduzione all'algebra commutativa**. Feltrinelli Editore, Milano, 1981.

[Cut] Steven D. Cutkosky. **Monomialization of morphisms from 3-folds to surfaces**. Lectur Notes in Mathematics, 1786, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Fav] Charles Favre. *Classification of 2-dimensional contracting rigid germs and Kato surfaces: I.* J. Math. Pures Appl. 79,5 (2000), 475-514.

[FJ1] Charles Favre, Mattias Jonsson. **The Valuative Tree**. Lectur Notes in Mathematics, 1853, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[FJ2] Charles Favre, Mattias Jonsson. *Eigenvaluations*. ArXiv:math.DS/0410417 v3, 2007.

[FJ3] Charles Favre, Mattias Jonsson. *Valuative Analysis of Planar Plurisubharmonic functions*. ArXiv:math.CV/0401111 v2, 2005.

[Ful] William Fulton. **Algebraic Curves**. W. A. Benjamin, inc., New York, 1969.

[GH] Phillip Griffiths, Joseph Harris. **Principles of Algebraic Geometry**. John Wiley and Sons, inc., New York, 1994.

[Har] Robin Hartshorne. **Algebraic Geometry**. Springer, New York, 1977.

[HP] John H. Hubbard, Peter Papadopol. *Superattractive Fixed Points in* $\mathbb{C}^n$. Indiana University Math. J. 43, 1994, 321-365.

[Lau] Henry B. Laufer: **Normal two-dimensional singularities**. Annals of mathematics studies, n° 71, Princeton university press, Princeton, New Jersey, 1971.

[Mil] John Milnor: **Dynamics in One Complex Variable**, 3rd Edition. Annals of mathematics studies, 160, Princeton university press, Princeton, 2006.

[ZS1] Oscar Zariski, Pierre Samuel. **Commutative Algebra, Vol. I**. D. Van Nostrand company, inc., Princeton, New Jersey, 1958.

[ZS2] Oscar Zariski, Pierre Samuel. **Commutative Algebra, Vol. II**. D. Van Nostrand company, inc., Princeton, New Jersey, 1958.