Théorème (Lambert)

$r \in \mathbb{Q}, r \neq 0 \Rightarrow e^r \notin \mathbb{Q}$

Méthode de Hermite 1873 e est transcendant

$r = \pm \frac{a}{b}$ $a, b > 0$.

$(e^{a/b})^b = e^a$

$a \in \mathbb{Z}_{>0}$

But : approximer e^a par des rationnels.

si on montre $e^a \notin \mathbb{Q}$ pour $a \in \mathbb{Z}_{>0}$, on en déduit $e^{a/b} \notin \mathbb{Q}$.

$e^{-a/b} = \frac{1}{e^{a/b}} \notin \mathbb{Q}$.

Hermite : approximer e^z par $\frac{A(z)}{B(z)} \in \mathbb{Q}(z)$

$A, B \in \mathbb{Z}[z]$ mêmes $N+1$ premiers coefficients du développement de Taylor à l'origine

$e^z - \frac{A(z)}{B(z)}$ zéro de multiplicité élevée $\geq N+1$ à l'origine.

$B(0) \neq 0$.

$B(z)e^z - A(z)$ a un zéro de mult. élevée $\geq N+1$ en 0

n_0, n_1 entiers ≥ 0. $N = n_0 + n_1$.

$\deg A \leq n_0$ $\deg B \leq n_1$.

Thm. $n_0 \geq 0, n_1 \geq 0$, $N = n_0 + n_1$.

Il existe $A \in \mathbb{C}[z]$, $B \in \mathbb{C}[z]$, $B \neq 0$ $\deg A \leq n_0$, $\deg B \leq n_1$, tel que $R(z) = B(z)e^z - A(z)$ ait un zéro de multiplicité $\geq N+1$ à l'origine.

Il existe une solution unique avec B unitaire. De plus $\deg B = n_1$, $\deg A = n_0$

$B(0) \neq 0$ et la multiplicité du zéro $z = 0$ de R est $N+1$.

Dém de l'existence.

$$\mathbb{C}[z]_{\leq n_0} \times \mathbb{C}[z]_{\leq n_1} \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$$

$$(A, B) \longmapsto \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^k \left(B(z)e^z - A(z)\right)_{z=0} \right)_{0 \leq k \leq N}$$

$\underbrace{n_0+1 + n_1+1}_{\dim_{\mathbb{C}}} = N+2 > N+1$

Pas injective. Soit (A, B) un élément non nul du noyau, $R(z) = B(z)e^z - A(z)$ a un zéro de multiplicité $\geq N+1$ en $z = 0$

De plus $B \neq 0$.

Variante de la démonstration

$$\mathbb{C}[z]_{\le n_1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n_1}$$
$$B \longmapsto \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^k \left(B(z)e^z\right)_{z=0}\right)$$

$B \neq 0$ dans le noyau $\quad n_0+1 \le k \le N$

$$A(z) = \sum_{k=0}^{n_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^k \left(B(z)e^z\right)_{z=0} \frac{z^k}{k!}$$

$$R(z) = \sum_{k \ge N+1} \left(\frac{d}{dz}\right)^k \left(B(z)e^z\right)_{z=0} \frac{z^k}{k!}$$

$N = n_0 + n_1$.

$$B(z)e^z = \underbrace{A(z)}_{\deg \le n_0} + \underbrace{R(z)}_{\text{zéro mult} \ge N+1.}$$

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_0+1}\left(B(z)e^z\right)}_{\substack{e^z \times \text{polynôme degré} \\ = \deg B.}} = \underbrace{\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_0+1} R(z)}_{\substack{\text{zéro en } z=0 \\ \text{mult.} \ge n_1.}} = e^z . c . z^{n_1}.$$

$c =$ coeff. dir. de B.

$$\frac{d}{dz}\left(z^d e^z\right) = d\, z^{d-1} e^z + z^d e^z = \left(z^d + d\, z^{d-1}\right)e^z.$$

$$\frac{d}{dz}\left(B(z)e^z\right) = e^z \times \text{polynôme degré} = \deg B$$
même coefficient directeur.

$\Rightarrow$ unicité de B unitaire, degré n_1

R zéro de multiplicité $N+1$ en $z=0$

R est la solution de l'équation différentielle

$$D^{n_0+1} R(z) = z^{n_1} e^z$$
$$R(0) = R'(0) = \dots = R^{(n_0)}(0) = 0$$

$\deg A = n_0$? $\quad B_{n_0,n_1}(z)e^z - A_{n_0,n_1}(z) = R_{n_0,n_1}(z)$

on divise par e^z $\quad A_{n_0n_1}(z)e^{-z} - B_{n_0,n_1}(z) = -e^{-z} R_{n_0,n_1}(z)$

$z \mapsto -z$ $\quad A_{n_0n_1}(-z)e^{z} - B_{n_0n_1}(-z) = -e^{z} R_{n_0,n_1}(-z)$

$$A_{n_0,n_1}(-z), \quad B_{n_0,n_1}(-z), \quad -e^z R_{n_0n_1}(-z)$$
$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$
$$c\, B_{n_1,n_0}(z) \quad c\, A_{n_1,n_0}(z) \quad c\, R_{n_1,n_0}(z)$$

$c =$ coeff. de z^{n_0} dans A (directeur)

$\deg B_{n_1,n_0} = n_0 \quad \Rightarrow \deg A_{n_0n_1} = n_0.$

$B(0) \neq 0.$

$D = \frac{d}{dz}$ $\qquad D^{n_0+1} R(z) = z^{n_1} e^z$

J inverse de D $\qquad D|_{\text{fonctions nulles en } 0}$

$J(\varphi) = \int_0^z \varphi(t)\,dt$

$J^2(\varphi) = \int_0^z (z-t)\varphi(t)\,dt$

$R(z) = J^{n_0+1}(z^{n_1} e^z)$

$D\left(\int_0^z (z-t)\,\varphi(t)\,dt\right) = D\left(z\int_0^z \varphi(t)\,dt - \int_0^z t\varphi(t)\,dt\right)$

$= \int_0^z \varphi(t)\,dt + z\varphi(z) - z\varphi(z) = J(\varphi)$

$J^{n+1}(\varphi) = \frac{1}{n!}\int_0^z (z-t)^n \varphi(t)\,dt$

Donc

$R(z) = \frac{1}{n_0!}\int_0^z (z-t)^{n_0}\, t^{n_1} e^t\,dt$

$u = \frac{t}{z}$ $\qquad = \frac{1}{n_0!} z^{n_0+n_1+1}\int_0^1 (1-u)^{n_0} u^{n_1} e^{zu}\,du$

$z - t = z(1-u)$

$t = zu$ $\qquad = \frac{1}{n_0!} z^{N+1}\int_0^1 f(u)e^{zu}\,du$

$dt = z\,du$

$f(x) = (1-x)^{n_0} x^{n_1}$.

$z \in \mathbb{C}$ $\qquad |R(z)| \leq \frac{|z|^{N+1}}{n_0!} e^{|z|}$

$n_0 = n_1 = n \longrightarrow \infty$. $\qquad \frac{a^{2n+1}}{n!} e^a \longrightarrow 0$

$z = a$.

$N = 2n$ $\qquad n \longrightarrow \infty$

Calcul explicite de A et B.

Notation. $\quad S = \sum_{i \geq 0} s_i t^i$ $\quad t$ variable. $s_i \in \mathbb{C}$.

$S(D) = \sum_{i\geq 0} s_i D^i$ opérateur de dérivation

$S(D) f = \sum_{i \geq 0} s_i D^i f$

f polynôme ou S polynôme.

Exemples.

1) $4t^2 - 5t + 6 = S(t)$.

$S(D) f = 4f'' - 5f' + 6f$

2) $S(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots$

$S(D)(4z^2 - 5z + 6) =$

$4z^2 - 5z + 6 + 8z - 5 + \frac{1}{2}8$

Propriétés $\quad (S_1(D) + S_2(D)) f = S_1(D) f + S_2(D) f$

$(S_1(D) S_2(D)) f = S_1(D)(S_2(D) f)$.

$$S(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \dots$$

Si $s_0 \neq 0$ $\exists$ $S^{-1}(t) = \sigma_0 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots$

$\sigma_0 = s_0^{-1}$ $\qquad$ $S(t)\, S^{-1}(t) = 1$.

$$S^{-1}(D)\big(S(D) f\big) = f \qquad f \in \mathbb{C}[z]$$

Si $s_i \in \mathbb{Z}$ et $s_0 = \pm 1$, alors $\sigma_i \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots$$

En particulier si $S_0 \in \mathbb{Z}[[t]]$, $f \in \mathbb{Z}[z]$, $s_0 = \pm 1$ Alors $S_0^{-1}(D) f \in \mathbb{Z}[[z]]$

Proposition $\quad \lambda \in \mathbb{C} \quad P \in \mathbb{C}[z]$

$$D\big(e^{\lambda z} P(z)\big) = e^{\lambda z} (\lambda + D) P$$

$$\| $$

$$\lambda e^{\lambda z} P(z) + e^{\lambda z} D P(z) = e^{\lambda z} (\lambda + D) P(z).$$

pour $n \geq 0$

$$\boxed{D^n\big(e^{\lambda z} P(z)\big) = e^{\lambda z} (\lambda + D)^n P}.$$

(récurrence sur n)

$(\lambda + D)^n P$ est un polynôme de même degré que P si $\lambda \neq 0$

Trouver $B(z)$

$$B(z) e^z = A(z) + R(z)$$

$$D^{n_0+1}\big(B(z) e^z\big) = z^{n_1} e^z$$

$$\| \quad e^z (1 + D)^{n_0+1} B$$

$$D^n\big(e^{\lambda z} P\big) = e^{\lambda z} (\lambda + D)^n P$$

Résoudre $\quad (1+D)^{n_0+1} B = z^{n_1}$.

$$B(z) = (1+D)^{-(n_0+1)} z^{n_1}.$$

$$(1+D)^{-n_0-1} = \sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell \binom{n_0+\ell}{\ell} D^\ell$$

Formules pour $B(z)$:

$$B(z) = \sum_{\ell=0}^{n_1} (-1)^\ell \binom{n_0+\ell}{\ell} \frac{n_1!}{(n_1-\ell)!} z^{n_1-\ell}.$$

$$= (-1)^{n_1} \cdot \frac{n_1!}{n_0!} \sum_{h=0}^{n_1} (-1)^h \frac{(N-h)!}{(n_1-h)!\, h!} z^h$$

$$= \sum_{k=n_0}^{N} z^{N-k} D^k g(0)$$

$$g(t) = \frac{1}{n_0!} t^{n_0} (t-1)^{n_1} \qquad B(0) = (-1)^{n_1} \frac{N!}{n_0!} \neq 0$$

$B \in \mathbb{Z}[z]$ unitaire degré n_1.

$$A(z) = (-1)^{n_1} \sum_{h=0}^{n_0} \frac{(N-h)!}{(n_0-h)!\,h!} z^h$$

$$R(z) = \sum_{k \geq N+1} \frac{(k-n_0-1)!}{(k-N-1)!\,k!} z^k .$$

coefficients > 0

$$B(z)e^z = A(z) + R(z).$$

Démonstration de l'irrationalité de e^a

$a \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$$B_n(a)e^a - A_n(a) = R_n(a)$$

$n_0 = n_1 = n$

$A_n(a) \in \mathbb{Z}$

$B_n(a) \in \mathbb{Z}$

$0 < R_n(a) \longrightarrow 0$

$n \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow e^a \notin \mathbb{Q}$.

Irrationalité de π.

Supposons $\pi = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ $b > 0$

$a > 0$.

$i\pi b = ia$.

$n_0 = n_1 = n$

$N = 2n$

$$\underbrace{B_n(ia)\, e^{ia} - A_n(ia)}_{\in \mathbb{Z}[i]} = R_n(ia)$$

$e^{ia} = \pm 1$

n suffisamment grand $|R_n(ia)| < 1$

$R_n(ia) = 0$ $ia \neq 0$

$R_{n+1}(ia) = 0$.

$R_n(z) = B_n(z)e^z - A_n(z)$ B_{n+1}

$R_{n+1}(z) = B_{n+1}(z)e^z - A_{n+1}(z)$. B_n

$$B_{n+1}(z)R_n(z) - B_n(z)R_{n+1}(z) = B_n(z)A_{n+1}(z) - B_{n+1}(z)A_n(z)$$

degré $\leq 2n+1$

$N = 2n$

R_n zéro en $z=0$ mult. $= 2n+1$

R_{n+1} —————— $= 2n+3$

membre de gauche zéro en $z=0$ mult $= 2n+1$

$B_n(z)A_{n+1}(z) - B_{n+1}(z)A_n(z) = c \cdot z^{2n+1}$. $c \neq 0$

R_n et R_{n+1} n'ont pas de zéro commun $\neq 0$