

Université de Louvain la Neuve  
Institut de recherche en mathématique et physique  
Séminaire Fondements et notions fondamentales.

# **Les débuts de la théorie des nombres transcendants.**

**Michel Waldschmidt**

Professeur Émérite, Sorbonne Université,  
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris  
<http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/>

# Gottfried Wilhelm von Leibniz

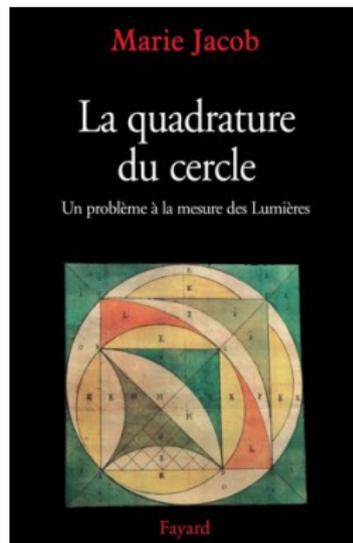
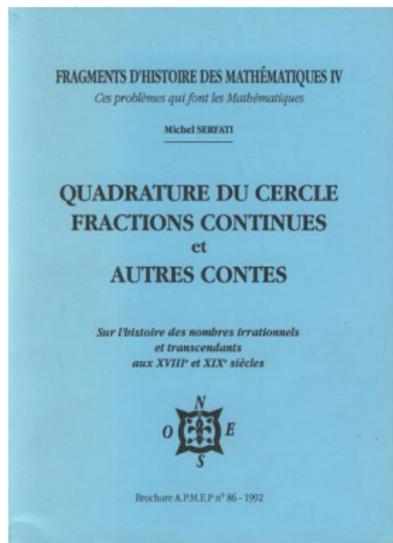


Leibniz

1646 – 1716

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Leibniz.html>

# Quadrature du cercle



# Irrationalité de $\pi$

Āryabhaṭa, né vers 476 AD :  $\pi \sim 3.1416$ .

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD : *Why then has an approximate value been mentioned here leaving behind the actual value? Because it (exact value) cannot be expressed.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*,  
13th World Sanskrit Conference, 2006.

# Irrationalité de $\pi$

Āryabhaṭa, né vers 476 AD :  $\pi \sim 3.1416$ .

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD : *Why then has an approximate value been mentioned here leaving behind the actual value? Because it (exact value) cannot be expressed.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*,  
13th World Sanskrit Conference, 2006.

# Irrationalité de $\pi$

Āryabhaṭa, né vers 476 AD :  $\pi \sim 3.1416$ .

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD : *Why then has an approximate value been mentioned here leaving behind the actual value? Because it (exact value) cannot be expressed.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*,  
13th World Sanskrit Conference, 2006.

# Irrationalité de $\pi$

Āryabhaṭa, né vers 476 AD :  $\pi \sim 3.1416$ .

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD : *Why then has an approximate value been mentioned here leaving behind the actual value? Because it (exact value) cannot be expressed.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*,  
13th World Sanskrit Conference, 2006.

# Irrationalité de $\pi$

Āryabhaṭa, né vers 476 AD :  $\pi \sim 3.1416$ .

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD : *Why then has an approximate value been mentioned here leaving behind the actual value? Because it (exact value) cannot be expressed.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*,  
13th World Sanskrit Conference, 2006.

# Johann Heinrich Lambert



Lambert

1728 – 1777

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lambert.html>

# Lambert et le roi Frederick II de Prusse



- Que savez vous, Lambert ?
- Tout, Sire.
- Et de qui le tenez-vous ?
- De moi-même !



# Irrationalité de $\pi$

Johann Heinrich Lambert

*Mémoire sur quelques propriétés  
remarquables des quantités transcendentes  
circulaires et logarithmiques,*

Mémoires de l'Académie des Sciences  
de Berlin, **17** (1761), p. 265-322 ;  
lu en 1767 ; Math. Werke, t. II.

$\tan(v)$  est irrationnel quand  $v \neq 0$  est rationnel  
Par conséquent  $\pi$  est irrationnel, car  $\tan(\pi/4) = 1$ .

## Lambert (extrait début)

Mais comme, après la fraction  $\frac{1}{4}$  trouvée par *Archimède*, qui ne donne qu'un à peu près, on passe à celle de *Méius*,  $\frac{2}{3}$ , qui n'est pas non plus exacte, & dont les nombres sont considérablement plus grands, on doit être fort porté à conclure, que la somme de cette suite, bien loin d'être égale à une fraction simple, est une quantité irrationnelle.

§. 2. Quelque vague que soit ce raisonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas d'avantage. Mais ces cas ne sont pas celui de la quadrature du cercle. La plupart de ceux qui s'attachent à la chercher, le font avec une ardeur, qui les entraîne quelque fois jusqu'à révoquer en doute les vérités les plus fondamentales & les mieux établies de la géométrie. Pourroit-on croire, qu'ils se trouveroient satisfaits par ce que je viens de dire? Il y faut toute autre chose. Et s'agit-il de démontrer, qu'en effet le diamètre n'est pas à la circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, cette démonstration doit être si rigide, qu'elle ne le cede à aucune démonstration géométrique. Et avec tout cela je reviens à dire, que les géomètres n'en seront point surpris. Ils doivent être accoutumés depuis longtems à ne s'attendre à autre chose. Mais voici ce qui

# Lambert §89

§. 89. Tout ce que je viens de faire voir sur les quantités transcendentes circulaires & logarithmiques, paroît être fondé sur des principes beaucoup plus universels, mais qui ne sont pas encore assez développés. Voici cependant ce qui pourra servir à en donner quelque idée. Il ne suffit pas d'avoir trouvé que ces quantités transcendentes sont irrationnelles, c'est à dire incommensurables à l'unité. Cette propriété ne leur est pas unique. Car, outre qu'il y a des quantités irrationnelles qu'on pourra former au hazard, & qui par là même ne sont gueres du ressort de l'analyse, il y en a encore une infinité d'autres qu'on nomme *algébriques*: & telles sont toutes les *quantités irrationnelles radicales*, comme  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  &c.  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  &c. & toutes les *racines irrationnelles des équations algébriques*, comme p. ex. celles des équations

$$0 = xx - 4x + 1,$$

$$0 = x^3 - 5x + 1,$$

&c.



Je nommerai les unes & les autres *quantités irrationnelles radicales*, & voici le théorème, que je crois pouvoir être démontré.

## Lambert §90

§. 90. Je dis donc qu'aucune quantité transcendente circulaire & logarithmique ne sauroit être exprimée par quelque quantité irrationnelle radicale, qui se rapporte à la même unité, & dans laquelle il n'entre aucune quantité transcendente. Ce théoreme semble devoir être démontré de ce que les quantités transcendentes dépendent de

$$e^x,$$

où l'exposant est variable, au lieu que les quantités radicales supposent des exposans constants. Ainsi p. ex. un arc de cercle étant rationnel ou commensurable au rayon, sa tangente, que nous avons vu être irrationnelle, ne sauroit être une racine quarrée de quelque quantité rationnelle. Car soit l'arc proposé  $= \omega$ , & faisons  $\text{tang } \omega = \sqrt{a}$ , nous aurons

$$t \omega^2 = \frac{f \omega^2}{\text{cof } \omega^2} = \frac{1 - \text{cof } 2 \omega}{1 + \text{cof } 2 \omega} = a,$$

d'où il suit

$$\text{cof } 2 \omega = \frac{1 - a}{1 + a}:$$

or cette quantité étant rationnelle, il s'ensuit que l'arc  $2 \omega$  est irrationnel, ce qui étant contre l'hypothèse, il est clair qu'en faisant  $\text{tang } \omega = \sqrt{a}$ , la quantité  $a$  ne sauroit être rationnelle, & que partant la tangente d'un arc rationnel quelconque n'est point une racine quarrée de quelque quantité rationnelle.

# Lambert §91

§. 91. Ce théoreme étant une fois démontré dans toute son universalité, il s'ensuivra que la circonférence du cercle ne pouvant être exprimée par quelque quantité radicale, ni par quelque quantité rationnelle, il n'y aura pas moyen de la déterminer par quelque construction géométrique. Car tout ce qu'on peut construire géométri-

*Mém. de l'Acad. Tom. XVII.*

Ss

que-



quement revient aux quantités rationnelles & radicales; & il s'en faut même de beaucoup que ces dernières puissent indifféremment être construites. On voit bien qu'il en sera de même de tous les arcs de cercles dont la longueur ou les deux points extrêmes sont donnés, soit par des quantités rationnelles, soit par des quantités radicales. Car, si la longueur de l'arc est donnée, il faudra trouver ses deux points extrêmes, en y employant la corde, le sinus, la tangente, ou quelque autre ligne droite qui, pour pouvoir être construite, sera toujours dépendante ou réductible à une des lignes que je viens de nommer. Mais la longueur de l'arc étant donnée par des quantités rationnelles ou radicales, ces lignes seront transcendentes, & par là même irréductibles à quelque quantité rationnelle ou radicale. Il en sera de même si les deux points extrêmes de l'arc sont donnés, j'entens par des quantités rationnelles ou radicales. Car, dans ce cas, la longueur de l'arc sera une quantité transcendente: ce qui veut dire irréductible à quelque quantité rationnelle ou radicale, & par là elle n'admet aucune construction géométrique.

# Joseph Liouville



Liouville

1809 – 1882

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Liouville.html>

# Les premiers exemples de nombres transcendants

» Ainsi les quotients incomplets d'une fraction continue représentant la racine  $x$  d'une équation algébrique de degré  $n$ , à coefficients rationnels, sont assujettis à ne jamais dépasser le produit d'un certain nombre constant par la puissance  $(n - 2)^{\text{ème}}$  du dénominateur de la réduite précédente.

« Il suffira de donner aux quotients incomplets  $\mu$  un mode de formation qui les fasse grandir au delà du terme indiqué, pour obtenir des fractions continues dont la valeur ne pourra satisfaire à aucune équation algébrique proprement dite; cela arrivera, par exemple, si, partant d'un premier quotient

( 885 )

incomplet quelconque, on forme chacun des suivants  $\mu$  à l'aide de la réduite  $\frac{p}{q}$  qui le précède, d'après la loi  $\mu = q^q$ , ou bien encore d'après la loi  $\mu = q^m$ ,  $m$  étant l'indice du rang de  $\mu$ .

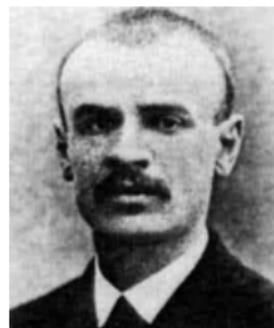
« Au reste la méthode précédente, qui s'est offerte la première, n'est ni la seule ni même la plus simple qu'on puisse employer. Ajoutons qu'il y a aussi des théorèmes analogues pour les séries ordinaires. Nous citerons en particulier la série

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^{1,2}} + \frac{1}{a^{1,2,3}} + \dots + \frac{1}{a^{1,2,3,\dots,m}} + \dots,$$

$a$  étant un nombre entier.

# Generiques vs mesure pleine, Baire vs Lebesgue

René Baire  
(1874 – 1932)



Henri Léon Lebesgue  
(1875 – 1941)



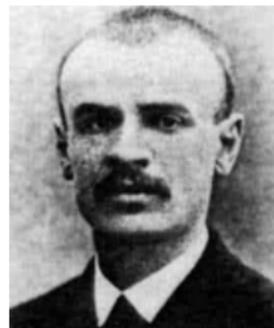
Baire :  $G_\delta$  = intersection dénombrable d'ouverts denses.

Ensemble *maigre* : complément d'un  $G_\delta$ .

Les nombres qui ne satisfont pas une condition diophantienne forment un ensemble générique en systèmes dynamiques. Pour la mesure de Lebesgue, l'ensemble des nombres de Liouville (i.e. ceux qui ne satisfont pas une condition diophantienne) est de mesure nulle.

# Generiques vs mesure pleine, Baire vs Lebesgue

René Baire  
(1874 – 1932)



Henri Léon Lebesgue  
(1875 – 1941)



**Baire** :  $G_\delta$  = intersection dénombrable d'ouverts denses.

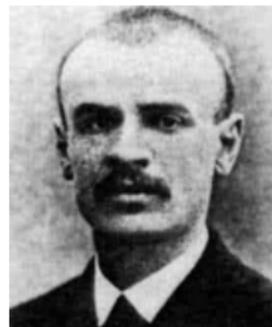
Ensemble *maigre* : complément d'un  $G_\delta$ .

Les nombres qui ne satisfont pas une condition diophantienne forment un ensemble générique en systèmes dynamiques. Pour la mesure de **Lebesgue**, l'ensemble des nombres de **Liouville** (i.e. ceux qui ne satisfont pas une condition diophantienne) est de mesure nulle.

# Generiques vs mesure pleine, Baire vs Lebesgue

René Baire

(1874 – 1932)



Henri Léon Lebesgue

(1875 – 1941)



**Baire** :  $G_\delta$  = intersection dénombrable d'ouverts denses.

Ensemble *maigre* : complément d'un  $G_\delta$ .

Les nombres qui ne satisfont pas une condition diophantienne forment un ensemble générique en systèmes dynamiques. Pour la mesure de Lebesgue, l'ensemble des nombres de Liouville (i.e. ceux qui ne satisfont pas une condition diophantienne) est de mesure nulle.

# Generiques vs mesure pleine, Baire vs Lebesgue

René Baire

(1874 – 1932)



Henri Léon Lebesgue

(1875 – 1941)



**Baire** :  $G_\delta$  = intersection dénombrable d'ouverts denses.

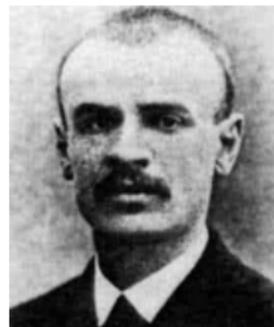
Ensemble *maigre* : complément d'un  $G_\delta$ .

Les nombres qui ne satisfont pas une condition diophantienne forment un ensemble générique en systèmes dynamiques. Pour la mesure de Lebesgue, l'ensemble des nombres de Liouville (i.e. ceux qui ne satisfont pas une condition diophantienne) est de mesure nulle.

# Generiques vs mesure pleine, Baire vs Lebesgue

René Baire

(1874 – 1932)



Henri Léon Lebesgue

(1875 – 1941)



**Baire** :  $G_\delta$  = intersection dénombrable d'ouverts denses.

Ensemble *maigre* : complément d'un  $G_\delta$ .

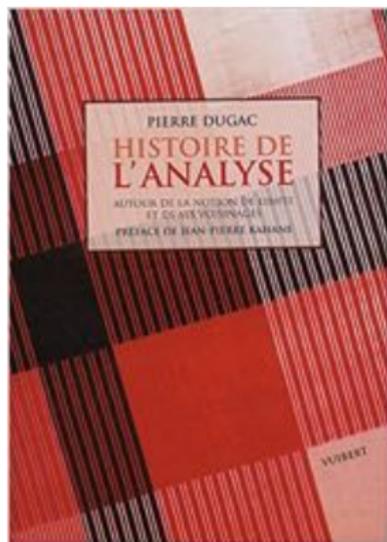
Les nombres qui ne satisfont pas une condition diophantienne forment un ensemble générique en systèmes dynamiques. Pour la mesure de **Lebesgue**, l'ensemble des nombres de **Liouville** (i.e. ceux qui ne satisfont pas une condition diophantienne) est de mesure nulle.

# Mathematical genealogy



<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu>

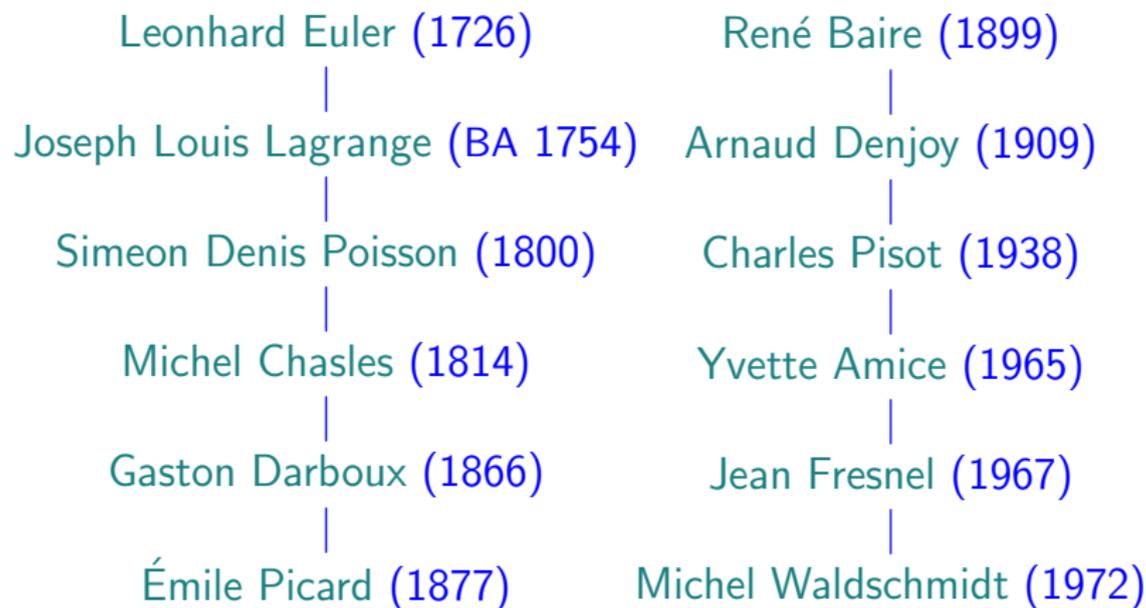
## Pierre Dugac (1926 – 2000)



Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire.  
Arch. History Exact Sci. **15**  
(1975/76), no. 4, 297–383.

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre\\_Dugac](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Dugac)

# Mathematical genealogy



<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu>

# Wetzlarer Bier Waldschmidt Euler



# Charles Hermite



Hermite

1822 – 1901

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hermite.html>

# Texte de Ch. Hermite : début

ANALYSE. — *Sur la fonction exponentielle*; par M. HERMITE.

« I. Étant donné un nombre quelconque de quantités numériques  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , on sait qu'on peut en approcher simultanément par des fractions de même dénominateur, de telle sorte qu'on ait

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A} + \frac{\delta_1}{A\sqrt[n]{A}},$$

$$\alpha_2 = \frac{A_2}{A} + \frac{\delta_2}{A\sqrt[n]{A}},$$

.....,

$$\alpha_n = \frac{A_n}{A} + \frac{\delta_n}{A\sqrt[n]{A}},$$

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  ne pouvant dépasser une limite qui dépend seulement de  $n$ . C'est, comme on voit, une extension du mode d'approximation résultant de la théorie des fractions continues, qui correspondrait au cas le plus simple de  $n = 1$ . Or on peut se proposer une généralisation semblable de la théorie des fractions continues algébriques, en cherchant les expressions approchées de  $n$  fonctions,  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  par des fractions rationnelles  $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \dots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$ , de manière que les développements en série suivant les puissances croissantes de la variable coïncident jusqu'à une puissance déterminée  $x^m$ . Voici d'abord à cet égard un premier résultat qui s'offre immédiatement. Supposons que les fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  soient toutes développables en séries de la forme  $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots$  et faisons

$$\Phi(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Kx + L.$$

## Texte de Ch. Hermite : p. 77– 78

» Mais une autre voie conduira à une seconde démonstration plus rigoureuse ; on peut en effet, comme on va le voir, étendre aux fractions rationnelles

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \dots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$$

le mode de formation des réduites donné par la théorie des fractions continues, et par là mettre plus complètement en évidence le caractère arithmétique d'une irrationnelle non algébrique. Dans cet ordre d'idées, M. Liouville a déjà obtenu un théorème remarquable qui est l'objet de son travail intitulé : *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques* (\*), et je rappellerai aussi que l'illustre géomètre a démontré le premier la proposition qui est le sujet de ces recherches pour les cas de l'équation du second degré et de

---

(\*) *Comptes rendus*, t. XVIII, p. 883 et 910.

( 78 )

l'équation bicarrée [*Journal de Mathématiques* (*Note sur l'irrationalité du nombre  $e$* , t. V, p. 192)]. Sous le point de vue auquel je me suis placé, voici la première proposition à établir.

## Texte de Ch. Hermite : p. 77

» Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé  $\Delta$  s'annule, car les quantités  $P = f(p)$ ,  $Q = f(q), \dots$ , fonctions entières semblables des racines  $p, q, \dots$ , de l'équation dérivée  $f'(x) = 0$  seront comme ces racines différentes entre elles. C'est ce qu'il fallait établir pour démontrer l'impossibilité de toute relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \dots + e^h N_n = 0,$$

et arriver ainsi à prouver que le nombre  $e$  ne peut être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers.

Hermite, Ch.

On the exponential function. (Sur la fonction exponentielle.) (French) [JFM 05.0248.01](#)  
C. R. LXXVII, 18-24 (1873); C. R. LXXVII, 74-79, 226-233, 285-293 (1873).

Eine Aufgabe, welche als eine Verallgemeinerung des Problems der Annäherung durch algebraische Kettenbrüche angesehen werden kann, ist folgende: „Die  $n$  rationalen Brüche

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \dots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$$

als Näherungswerte der  $n$  Functionen  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  so zu bestimmen, dass die Reihenentwicklungen nach steigenden Potenzen von  $x$  bis zur Potenz  $x^M$  übereinstimmen“. Es werde vorausgesetzt, dass sich die Functionen  $\varphi(x)$  in Reihen von der Form  $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots$  entwickeln lassen, und man mache

$$\Phi(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Kx + L.$$

Dann kann man im Allgemeinen über die Coefficienten  $A, B, \dots, L$  so verfügen, dass in den Producten  $\varphi_1(x)\Phi(x)$  die Glieder mit

$$x^M, x^{M-1}, \dots, x^{M-\mu_1+1},$$

wö  $\mu_1$  irgend eine ganze Zahl ist, verschwinden. So bildet man  $\mu_1$  homogene Gleichungen ersten Grades und hat

$$\varphi_1(x)\Phi(x) = \Phi_1(x) + \varepsilon_1 x^{M+1} + \varepsilon_2 x^{M+2} + \dots,$$

wö  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  Constanten,  $\Phi_1(x)$  ein ganzes Polynom vom Grade  $M - \mu_1$ . Da aber hieraus folgt, dass

$$\varphi_1(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)} + \frac{\varepsilon_1 x^{M+1} + \varepsilon_2 x^{M+2} + \dots}{\Phi(x)},$$

so sieht man, dass die Reihenentwicklungen des rationalen Bruches und der Function in der That dieselben sein werden bis zu  $x^M$ , und da die Gesamtzahl der gemachten Bedingungen gleich  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$  ist, so genügt es, die einzige Bedingung

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = m$$

hinzuzufügen, wo die ganzzahligen  $\mu_i$  bis dahin ganz willkürlich geblieben sind. Diese Betrachtung ist der Ausgangspunkt, den der Herr Verfasser für die in seiner Arbeit entwickelte Theorie der Exponentialfunction genommen hat, indem er nämlich das Obige anwendet auf die Grössen

$$\varphi_1(x) = e^{ax}, \varphi_2(x) = e^{bx}, \dots, \varphi_n(x) = e^{mx}.$$

Reviewer: Müller, Felix, Dr. (Berlin)

**MSC:**

33B10 Exponential and trigonometric functions  
41A29 Approximation with constraints

Cited in 7 Reviews  
Cited in 33 Documents

**Keywords:**

The exponential function. Rational approximation with constraints

**Full Text:** Gallica

# Henri Padé



Padé

1863 – 1953

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pade.html>

*"Nous avons été amené à nous occuper de cette question par une parole de Monsieur Hermite, recueillie dans une de ses leçons, et par laquelle il laissait entrevoir que cachait encore sans doute cette théorie"*

Henri Padé, Thèse: *Sur la Représentation Approchée d'une Fonction par des Fractions Rationnelles*  
(1882)

# Paul Painlevé

Mais la découverte d'Hermite qui surpasse toutes les autres, c'est la démonstration de la *transcendance* du nombre  $e$ , démonstration qui, à peine modifiée, entraîne la transcendance du nombre  $\pi$ , c'est-à-dire l'impossibilité de la *quadrature du cercle*. Les nombres algébriques (nombres définis par une relation algébrique à coefficients rationnels) forment une classe si dense qu'il paraissait presque impossible de trouver un criterium assez subtil pour permettre de discerner si un nombre tel que  $e$  ou  $\pi$  est transcendant. Ce criterium, c'est dans la théorie généralisée des fractions continues qu'Hermite a su le découvrir, et sa méthode sera admirée tant que des hommes existeront capables de comprendre la notion de nombre... Parmi les mathématiciens de tous les temps, il en est peu qui aient exercé une influence directe comparable à celle d'Hermite ; il n'en est pas dont l'œuvre soit plus sûrement impérissable.

## Extrait d'une lettre de *Mr. Ch. Hermite* à *Mr. Borchardt.*

---

..... Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre  $\pi$ . Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas que de leur en coûter quelques efforts. Tout ce que je puis, c'est de refaire ce qu'a déjà fait *Lambert*, seulement d'une autre manière, au moyen de cette égalité:

# Carl Louis Ferdinand von Lindemann



Lindemann

1852 – 1939

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lindemann.html>

# Émile Picard

On savait depuis longtemps former des séries représentant des nombres transcendants ; Liouville paraît avoir donné le premier de tels exemples, mais **ces nombres ne jouaient aucun rôle en analyse**. L'intérêt, qui s'attache à un nombre aussi fondamental que  $e$ , donnait, au contraire, un prix immense à une démonstration de sa transcendance. Quelques années après, M. Lindemann, en s'inspirant des études d'Hermite, démontrait la transcendance du rapport  $\pi$  de la circonférence au diamètre ; en même temps se trouvait, par suite, établi l'impossibilité de la quadrature du cercle. L'étude de ces belles questions a été, dans ces dernières années, notablement simplifiée, mais les principes au fond sont restés les mêmes, et les démonstrations très simples que nous possédons aujourd'hui ont été suggérées par les démonstrations d'Hermite.

# Karl Theodor Wilhelm Weierstrass



Weierstrass

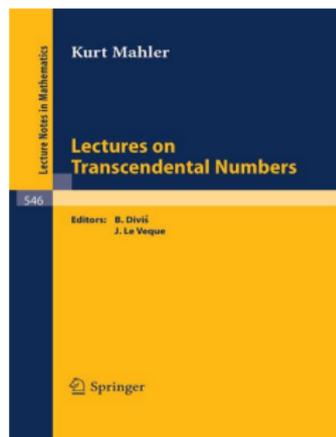
1815 – 1897

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Weierstrass.html>

## Lettre de Hermite à Mittag-Leffler, 22 août 1882.

Mr Weierstrass n'a point dédaigné de reprendre la question de la transcendance du rapport de la circonférence au diamètre et de refaire le travail de Mr Lindemann. C'est à mon avis le dernier mot sur la matière; mon ancienne analyse concernant le nombre  $e$  a été reprise de fond en comble transformée avec une profondeur qui montre tout son génie, et qui laisse à grande distance **le travail excellent d'ailleurs de Mr Lindemann, malgré quelques lacunes**. Mais Mr Weierstrass, qui est la bonté même, attendra avant de publier sa méthode que Mr Lindemann ait fourni toute la lumière et donné un mémoire complet, qu'il paraît avoir annoncé. Peut-être que Mr Kronecker n'aurait pas, en pareil cas, agit avec la même générosité.

## Variantes des démonstrations de Hermite, Lindemann, Weierstrass



Kurt Mahler  
1903 – 1988

C. Jordan (1882), A.A. Markoff (1883), E. Rouché (1883),  
Th. Stieljes (1890), J.J. Sylvester (1890), O. Venske (1890),  
V. Jamet (1891), C. Cailler (1891), D. Hilbert (1893),  
A. Hurwitz (1893), P. Gordan (1893), K.A. Possé (1894),  
F. Merten (1894), H. Weber (1899).

# Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor



Cantor

1845 – 1918

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cantor.html>

# Lettre d'Hermite à Mittag-Leffler

L'impression que nous produisent les mémoires de Mr Cantor est désolante ; leur lecture nous semble à tous un véritable supplice, et en rendant hommage à son mérite, en reconnaissant qu'il a ouvert un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre. **Il nous est impossible, parmi les résultats qui sont susceptibles de compréhension, d'en voir un seul ayant un intérêt actuel** ; la correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laisse absolument indifférents, et nous pensons que cette remarque, tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte de considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de la garder et d'attendre. Mr Schwarz nous a appris cependant que Mr Cantor avait été récompensé de cette découverte par le titre de correspondant de la Société Royale de Göttingen ; **il se trouvera par conséquent des lecteurs qui trouveront à le lire et l'étudier un intérêt et un plaisir que nous n'avons point.**

# David Hilbert



Hilbert

1862 – 1943

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hilbert.html>

# Constance Reid : Hilbert

The second problem became known as Hilbert's  $\alpha^\beta$  conjecture. As Hilbert notes, corollaries of this conjecture include the transcendence of  $2^{\sqrt{2}}$  and of  $e^\pi = (e^{\pi i})^{-i} = (-1)^{-i}$ .

An amusing incident concerning this conjecture is related in C. Reid's biography of Hilbert [Rei, C]. Carl Ludwig Siegel came to Göttingen as a student in 1919. He always remembered a lecture by Hilbert who, wanting to give his audience examples of problems in the theory of numbers which seem simple at first glance but which are, in fact, incredibly difficult, mentioned the Riemann Hypothesis, Fermat's Last Theorem and the transcendence of  $2^{\sqrt{2}}$ . Hilbert said that given recent progress he hoped to see the proof of the Riemann Hypothesis in his lifetime. Fermat's problem required totally new methods and possibly the youngest members of the audience would live to see it solved. As for  $2^{\sqrt{2}}$ , Hilbert said that no one at the lecture would live to see its proof. Hilbert was wrong! Siegel proved the transcendence of  $2^{\sqrt{2}}$  about 10 years later (unpublished) and the solution of the  $\alpha^\beta$  conjecture came shortly afterwards. He was right about Fermat's theorem and the Riemann Hypothesis is still unproved.

- Constance Reid. Hilbert. Springer Verlag 1970.
- Jay Goldman. The Queen of Mathematics : A Historically Motivated Guide to Number Theory. Taylor & Francis, 1998.

# Question de Weierstrass

Contributions de Weierstrass (lettre à Strauss en 1886),  
Strauss, Stäckel, Faber, van der Poorten, Gramain. . .

# George Pólya



Pólya  
1887 – 1985

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Polya.html>

# Aleksandr Osipovich Gelfond



Gelfond

1906 – 1968

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Gelfond.html>

# Carl Ludwig Siegel



Siegel

1896 – 1981

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Siegel.html>

# Theodor Schneider



Schneider

1911 – 1988

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Schneider.html>

# Alan Baker



Baker

1939 - 2018

[http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Baker\\_Alan.html](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Baker_Alan.html)

# Références

La méthode de Charles Hermite en théorie des nombres transcendants

[http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/HERMITE\\_ANALYSE.pdf](http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/HERMITE_ANALYSE.pdf)

Les débuts de la théorie des nombres transcendants (à l'occasion du centenaire de la transcendance de  $\pi$ ).  
Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 4 (1983),  
p. 93-115

[http://archive.numdam.org/article/CSHM\\_1983\\_\\_4\\_\\_93\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/article/CSHM_1983__4__93_0.pdf)

Université de Louvain la Neuve  
Institut de recherche en mathématique et physique  
Séminaire Fondements et notions fondamentales.

# **Les débuts de la théorie des nombres transcendants.**

**Michel Waldschmidt**

Professeur Émérite, Sorbonne Université,  
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris  
<http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/>