Rencontres de Caen: "Valeurs de la fonction zêta de Riemann usuelle et des fonctions zêta multiples"

Relations de mélanges

entre polylogarithmes multiples

par

Michel WALDSCHMIDT

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

Valeurs spéciales de la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \qquad s \geq 2.$$

L. Euler:

$$\zeta(2m) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi i)^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \quad \text{pour} \quad m \geq 1$$

avec

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \cdot t^k, \quad |t| < 2\pi.$$

En particulier $\zeta(2m)\pi^{-2m} \in \mathbb{Q}$ pour $m \geq 1$.
Exemple ($m = 1$):

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

F. Lindemann: π *est transcendant.*

R. Apéry:

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots \notin \mathbb{Q}.$$

Mesures d'irrationalité: G. Rhin et C. Viola:

$$\left|\zeta(2) - \frac{p}{q}\right| > q^{-5,4412\ldots} \qquad (1996)$$

$$\left|\zeta(3) - \frac{p}{q}\right| > q^{-5,5138\ldots} \qquad (2001)$$

π, π^2: E. Borel, K. Mahler, N.I. Fel'dman,...

$\zeta(2)$, $\zeta(3)$: R. Apéry, F. Beukers, G.V. Chudnovskii, E.M. Nikishin, L. Gutnik, M. Hata, Yu.V. Nesterenko, Dvornicich, G. Rhin, C. Viola,...

T. Rivoal: *Irrationalité d'une infinité de $\zeta(a)$ avec a impair ≥ 5.*

K. Ball + T. Rivoal: *Le* $\mathbb{Q}$*-sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}$ *engendré par les nombres* $\zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(a)$ *a une dimension*

$$\geq \frac{\log a}{1+\log 2}\bigl(1+o(1)\bigr).$$

T. Rivoal, W. Zudilin: *Un au moins des* 9 *nombres*

$$\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \zeta(15),\ \zeta(17),\ \zeta(19),\ \zeta(21)$$

est irrationnel.

W. Zudilin: *Un au moins des* 6 *nombres*

$$\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \zeta(15)$$

est irrationnel.

Conjecture. *Les nombres*

$$\pi,\ \zeta(3),\ \zeta(5), \ldots, \zeta(2k+1), \ldots$$

sont algébriquement indépendants.

Définition: *Nombres polyzêtas.* *Pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ dans $\mathbb{Z}^k$ avec $s_1 \geq 2$ et $s_j \geq 1 \quad (2 \leq j \leq k)$,*

$$\zeta(\underline{s}) := \sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k}.$$

Question. *Quelles sont les relations algébriques entre ces nombres?*

Remarque: Le produit de deux nombres polyzêtas est encore un nombre polyzêta.
Exemple:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^{s'}} = \sum_{n > m \geq 1} \frac{1}{n^s m^{s'}} + \sum_{m > n \geq 1} \frac{1}{m^{s'} n^s} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{s+s'}}.$$

$$\zeta(s) \quad \cdot \quad \zeta(s') \quad = \quad \zeta(s, s') \quad + \quad \zeta(s', s) \quad + \quad \zeta(s + s').$$

Pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ et $\underline{s}' = (s'_1, \ldots, s'_{k'})$, le produit des séries donne

(Stuffle)
$$\zeta(\underline{s})\zeta(\underline{s}') = \sum_{\underline{s}''} \zeta(\underline{s}'')$$

où $\underline{s}''$ décrit un ensemble de multi-indices $\underline{s}'' = (s''_1, \ldots, s''_{k''})$ vérifiant

$$s''_1 + \cdots + s''_{k''} = s_1 + \cdots + s_k + s'_1 + \cdots + s'_{k'}$$

et

$$\max\{k, k'\} \leq k'' \leq k + k'.$$

Terminologie: Le *poids* de $\underline{s}$ est $|\underline{s}| = s_1 + \cdots + s_k$ alors que k est la *longueur* de $\underline{s}$

Pour $p \geq 2$ on désigne par $\mathcal{Z}_p$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les 2^{p-2} éléments $\zeta(\underline{s})$ avec $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ de poids $|\underline{s}| = p$ (et $s_1 \geq 2$). Soit d_p la dimension de $\mathcal{Z}_p$.

Petits Poids

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_0 &= \mathbb{Q} && \text{avec } \zeta(\underline{s}) := 1 \text{ pour } k = p = 0\\
\mathcal{Z}_1 &= \{0\}\\
\mathcal{Z}_2 &= \langle \zeta(2) \rangle_{\mathbb{Q}}\\
\mathcal{Z}_3 &= \langle \zeta(3) \rangle_{\mathbb{Q}} && \text{car } \zeta(2,1) = \zeta(3) \text{ (Euler)}\\
\mathcal{Z}_4 &= \langle \zeta(4) \rangle_{\mathbb{Q}} = \langle \zeta(2)^2 \rangle_{\mathbb{Q}} = \langle \pi^4 \rangle_{\mathbb{Q}}
\end{aligned}$$

car

$$\zeta(3,1) = \frac{1}{4}\zeta(4), \quad \zeta(2,2) = \frac{3}{4}\zeta(4), \quad \zeta(2,1,1) = \zeta(4) = \frac{2}{5}\zeta(2)^2.$$

Donc

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = d_3 = d_4 = 1.$$

$$\mathcal{Z}_5 = \langle \zeta(2)\zeta(3), \zeta(5) \rangle_{\mathbb{Q}}, \qquad\qquad \text{donc } d_5 \leq 2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\zeta(2,1,1,1) &= \zeta(5), \\
\zeta(3,1,1) = \zeta(4,1) &= 2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3), \\
\zeta(2,1,2) = \zeta(2,3) &= \frac{9}{2}\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3), \\
\zeta(2,2,1) = \zeta(3,2) &= 3\zeta(2)\zeta(3) - \frac{11}{2}\zeta(5).
\end{aligned}$$

Question. *Le nombre*

$$\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(5)}$$

est-il irrationnel?

`EZ-Face` par J. Borwein, P. Lisonek et P. Irvine

`http://www.cecm.sfu.ca/projects/EZFace/index.html`

Conjecture (D. Zagier). *Pour* $p \geq 4$,

$$d_p = d_{p-2} + d_{p-3}.$$

Formulation équivalente:

$$\sum_{p \geq 0} d_p X^p = \frac{1}{1 - X^2 - X^3}.$$

Conjecture (M. Hoffman). *Pour* $p \geq 1$, *une base du* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* $\mathcal{Z}_p$ *est donnée par les nombres* $\zeta(\underline{s})$ *avec* $(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{Z}^k$ *(*$k \geq 1$*) satisfaisant*

$$s_1 + \cdots + s_k = p \quad \textit{et} \quad s_j \in \{2, 3\}.$$

La longueur k définit une filtration sur $\mathcal{Z}$. Notons $Z(p,k)$ l'ensemble des $\zeta(\underline{s})$ avec $\underline{s}$ de longueur k et de poids p.

La sous-algèbre $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{R}$ engendrée par les $\zeta(\underline{s})$ est graduée pour le poids:

$$\mathcal{Z}_p \mathcal{Z}_{p'} \subset \mathcal{Z}_{p+p'}.$$

La longueur k définit une filtration sur $\mathcal{Z}$. Notons $\mathcal{F}^k\mathcal{Z}_p$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les $\zeta(\underline{s})$ avec $\underline{s}$ de poids p et de longueur $\le k$. On désigne par d_{pk} la dimension de $\mathcal{F}^k\mathcal{Z}_p/\mathcal{F}^{k-1}\mathcal{Z}_p$.

Conjecture (D. Broadhurst). *On a*

$$\left(\sum_{p\ge 0}\sum_{k\ge 0} d_{pk} X^p Y^k\right)^{-1} = (1-X^2Y)\left(1-\frac{X^3Y}{1-X^2}+\frac{X^{12}Y^2(1-Y^2)}{(1-X^4)(1-X^6)}\right)$$

Conjecture (A.B. Goncharov). *Comme $\mathbb{Q}$-algèbre, $\mathcal{Z}$ est somme directe des $\mathcal{Z}_p$ avec $p \geq 0$.*

Exemple. Tout $\zeta(\underline{s})$ avec $\underline{s}$ de poids $p \leq 12$ est un polynôme homogène en les 11 nombres polyzêtas suivants:

$k \backslash p$	2	3	5	7	8	9	10	11	12
1	$\zeta(2)$	$\zeta(3)$	$\zeta(5)$	$\zeta(7)$		$\zeta(9)$		$\zeta(11)$	
2					$\zeta(6,2)$		$\zeta(8,2)$		$\zeta(10,2)$
3								$\zeta(8,2,1)$	
4									$\zeta(8,2,1,1)$

Polylogarithmes classiques

$$\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^s} \quad \text{pour} \quad s \geq 1 \quad \text{et} \quad |z| < 1.$$

Définition par récurrence:

$$\mathrm{Li}_1(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t},$$

$$z\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_s(z) = \mathrm{Li}_{s-1}(z) \quad (s \geq 2)$$

avec $\mathrm{Li}_s(0) = 0$.

Pour $s \geq 2$, $\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$.

Formules intégrales pour les polylogarithmes classiques

Pour $s \geq 2$,

$$\mathrm{Li}_s(z) = \int_0^z \mathrm{Li}_{s-1}(t) \frac{dt}{t},$$

donc

$$\mathrm{Li}_s(z) = \int_0^z \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \int_0^{t_{s-2}} \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \int_0^{t_{s-1}} \frac{dt_s}{1-t_s}.$$

Cas $0 < z < 1$:

$$\mathrm{Li}_s(z) = \int_{\Delta_s(z)} \frac{dt_1}{t_1} \wedge \frac{dt_2}{t_2} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \wedge \frac{dt_s}{1-t_s},$$

où $\Delta_s(z)$ est le simplexe

$$\bigl\{(t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s \; ; \; z > t_1 > \cdots > t_s > 0\bigr\}.$$

Intégrales itérées (Kuo-Tsai Chen):

$$\int_a^b \varphi_1 \cdots \varphi_m = \int_a^b \varphi_1(t) \int_a^t \varphi_2 \cdots \varphi_m.$$

Notations:

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \qquad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}\cdot$$

Pour $s \geq 1$, $\omega_s = \omega_0^{s-1}\omega_1$.

$$\boxed{\mathrm{Li}_s(z) = \int_0^z \omega_s}$$

Polylogarithmes multiples en une variable

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(z) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}},$$

pour $|z| < 1$ et pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ avec $s_j \geq 1$ $(1 \leq j \leq k)$.

$$\zeta(\underline{s}) = \mathrm{Li}_{\underline{s}}(1) \quad \text{pour} \quad s_1 \geq 2.$$

Définition par récurrence:

$$z \frac{d}{dz} \mathrm{Li}_{(s_1, \ldots, s_k)}(z) = \mathrm{Li}_{(s_1 - 1, s_2, \ldots, s_k)}(z) \qquad \text{si } s_1 \geq 2$$

$$(1 - z) \frac{d}{dz} \mathrm{Li}_{(1, s_2, \ldots, s_k)}(z) = \mathrm{Li}_{(s_2, \ldots, s_k)}(z) \qquad \text{si } s_1 = 1.$$

Conditions initiales: $\mathrm{Li}_{\underline{s}}(0) = 0$.
Démonstration:

$$\sum_{n_1 > n_2} z^{n_1 - 1} = \frac{z^{n_2}}{1 - z}.$$

Notation: Pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ avec $k \geq 1$, $s_j \geq 1$ $(1 \leq j \leq k)$,

$$\omega_{\underline{s}} = \omega_{s_1} \cdots \omega_{s_k} = \omega_0^{s_1 - 1}\omega_1 \cdots \omega_0^{s_k - 1}\omega_1.$$

$$\boxed{\mathrm{Li}_{\underline{s}}(z) = \int_0^z \omega_{\underline{s}}}$$

Exemples:

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{(1,2)}(z) &= \int_0^z \omega_1\omega_0\omega_1 \\ &= \int_0^z \frac{dt_1}{1-t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{(2,2)}(z) &= \int_0^z \omega_0\omega_1\omega_0\omega_1 \\ &= \int_0^z \frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}.\end{aligned}$$

Dimension du simplexe: $|\underline{s}|$ (poids de $\underline{s}$).
Nombre de ω_1: longueur k de $\underline{s}$.

Produit d'intégrales itérées

Exemple le plus simple: (avec $0 < z < 1$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_1(z)^2 &= \int_0^z \frac{dt}{1-t} \int_0^z \frac{du}{1-u} \\
&= \int_{\substack{z>t>0 \\ z>u>0}} \frac{dt}{1-t} \wedge \frac{du}{1-u} \\
&= \int_{z>t>u>0} \frac{dt}{1-t} \wedge \frac{du}{1-u} + \int_{z>u>t>0} \frac{du}{1-u} \wedge \frac{dt}{1-t} \\
&= 2\mathrm{Li}_{(1,1)}(z).
\end{aligned}$$

Généralisation: (par récurrence)

$$\mathrm{Li}_1(z)^n = n!\mathrm{Li}_{\{1\}_n}(z)$$

où $\{1\}_n = (1, \ldots, 1)$ (longueur n).

Deuxième exemple:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}_1(z)\mathrm{Li}_2(z) &= \int_0^z \omega_1 \int_0^z \omega_0\omega_1 \\
&= \int_{\substack{z>t>0 \\ z>u_1>u_2>0}} \omega_1(t)\omega_0(u_1)\omega_1(u_2) \\
&= \int_{z>t>u_1>u_2>0} \omega_1\omega_0\omega_1 + \int_{z>u_1>t>u_2>0} \omega_0\omega_1\omega_1 + \int_{z>u_1>u_2>t>0} \omega_0\omega_1\omega_1 \\
&= \mathrm{Li}_{(1,2)}(z) + 2\mathrm{Li}_{(2,1)}(z).
\end{aligned}
$$

Plus généralement:

(Shuffle)
$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(z)\mathrm{Li}_{\underline{s}'}(z) = \sum_{\underline{s}''} \mathrm{Li}_{\underline{s}''}(z).$$

Mélange (*shuffle, battage*) de $\underline{s}$ et $\underline{s}'$

Rappel: $\omega_s = \omega_0^{s-1}\omega_1 = \omega_0 \cdots \omega_0\omega_1, \qquad \omega_{\underline{s}} = \omega_{s_1} \cdots \omega_{s_k}.$

Nouveau codage: À $s \geq 1$ on associe $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s)$ avec

$$\epsilon_i = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq s-1 \quad \text{et} \quad \epsilon_s = 1.$$

Plus généralement à $\underline{s}$ on associe $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ (avec $p = |\underline{s}|$) défini par

$$\omega_{\underline{s}} = \omega_{\epsilon_1} \cdots \omega_{\epsilon_p}.$$

Pour ϵ_i et ϵ'_j dans $\{0,1\}$,

$$\bigl(\omega_{\epsilon_1} \cdots \omega_{\epsilon_p}\bigr) ш \bigl(\omega_{\epsilon'_1} \cdots \omega_{\epsilon'_{p'}}\bigr) = \sum_{\underline{\epsilon}''} \omega_{\epsilon''_1} \cdots \omega_{\epsilon''_{p+p'}}$$

où $\underline{\epsilon}'' = (\epsilon''_1, \ldots, \epsilon''_{p+p'})$ décrit les suites formées des permutations des $p+p'$ éléments

$$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p, \epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_{p'}$$

qui respectent l'ordre de $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ ainsi que l'ordre de $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_{p'})$.

Polynômes non commutatifs

Soit $X := \{x_0, x_1\}$ un alphabet à deux lettres. On désigne par X^* l'ensemble des mots sur X (y compris le mot vide e):

$$X^* = \{e,\ x_0,\ x_1,\ x_0^2,\ x_0x_1,\ x_1x_0,\ x_1^2,\ x_0^3,\ x_0^2x_1,\ x_0x_1x_0, \ldots\}.$$

Les combinaisons linéaires de mots à coefficients rationnels

$$\sum_u c_u u,$$

où $\{c_u\ ;\ u \in X^*\}$ est un ensemble de nombres rationnels de support fini, muni de l'opération de concaténation, est l'anneau unitaire non commutatif

$$\boxed{\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x_0, x_1\rangle.}$$

Notations.

Pour $s \geq 1$, $x_s := x_0^{s-1} x_1 \in X^*$.

Pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{Z}^k$ avec $s_j \geq 1$,

$$y_{\underline{s}} := x_{s_1} \cdots x_{s_k} = x_0^{s_1 - 1} x_1 x_0^{s_2 - 1} x_1 \cdots x_0^{s_k - 1} x_1.$$

Nombre de lettres dans $y_{\underline{s}}$: poids $p = |\underline{s}|$ de $\underline{s}$

Nombre de x_1: longueur k.

Mots qui terminent par x_1:

$$X^* x_1 = \bigl\{ y_{\underline{s}} \; ; \; \underline{s} = (s_1, \ldots, s_k), \; k \geq 1, \; s_j \geq 1 \; (1 \leq j \leq k) \bigr\}.$$

Définition: $\widehat{\mathrm{Li}}_{y_{\underline{s}}}(z) := \mathrm{Li}_{\underline{s}}(z)$ pour $y_{\underline{s}} \in X^* x_1$.

Mots convergents: commencent par x_0 et terminent par x_1:

$$x_0 X^* x_1 = \bigl\{ y_{\underline{s}} \; ; \; \underline{s} = (s_1, \ldots, s_k), \; s_j \geq 1 \; (2 \leq j \leq k), \; s_1 \geq 2 \bigr\}.$$

Définition: $\widehat{\zeta}(y_{\underline{s}}) := \zeta(\underline{s})$ pour $y_{\underline{s}} \in x_0 X^* x_1$.

Conséquence des définitions: $\widehat{\zeta}(w) = \widehat{\mathrm{Li}}_w(1) \quad$ pour $\quad w \in x_0 X^* x_1$.

À un polynôme $w = \sum_u c_u u \in \mathfrak{H}$ on associe

$$\widehat{\mathrm{Li}}_w(z) := \sum_u c_u \widehat{\mathrm{Li}}_u(z)$$

si chaque u pour lequel $c_u \neq 0$ satisfait $u \in \{e\} \cup X^* x_1$. Donc $\widehat{\mathrm{Li}}_w(z)$ est bien défini pour

$$w \in \boxed{\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q}e + \mathfrak{H}x_1}$$

De même on pose

$$\widehat{\zeta}(w) := \sum_u c_u \widehat{\zeta}(u)$$

si chaque u avec $c_u \neq 0$ satisfait $u \in \{e\} \cup x_0 X^* x_1$. Pour

$$w \in \boxed{\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q}e + x_0 \mathfrak{H} x_1}$$

on a

$$\widehat{\zeta}(w) = \widehat{\mathrm{Li}}_w(1).$$

L'application $\widehat{\zeta} : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire.

Définition. *Produit de mélange (shuffle) de deux mots de X^*: c'est l'élément de $\mathfrak{H}$ défini par récurrence par:*

$$e ш u = u ш e = u \qquad \textit{pour } u \textit{ et } u' \textit{ dans } X^*,$$

et

$$(x_i u) ш (x_j v) = x_i \big(u ш (x_j v)\big) + x_j \big((x_i u) ш v\big)$$

pour u, v in X^* et i, j dans $\{0, 1\}$.

Exemples. Pour i_1, i_2, j, j_1, j_2 dans $\{0, 1\}$,

$$(x_{i_1} x_{i_2}) ш x_j = x_{i_1} x_{i_2} x_j + x_{i_1} x_j x_{i_2} + x_j x_{i_1} x_{i_2}.$$

$$\begin{aligned}(x_{i_1} x_{i_2}) ш (x_{j_1} x_{j_2}) =& x_{i_1} x_{i_2} x_{j_1} x_{j_2} + x_{i_1} x_{j_1} x_{i_2} x_{j_2} + x_{i_1} x_{j_1} x_{j_2} x_{i_2} + \\ & x_{j_1} x_{i_1} x_{i_2} x_{j_2} + x_{j_1} x_{i_1} x_{j_2} x_{i_2} + x_{j_1} x_{j_2} x_{i_1} x_{i_2}.\end{aligned}$$

On prolonge par distributivité par rapport à l'addition à $\mathfrak{H}$: cela définit des $\mathbb{Q}$-algèbres commutatives et associatives

$$\boxed{\mathfrak{H}^0_ш \subset \mathfrak{H}^1_ш \subset \mathfrak{H}_ш}$$

Théorème de Radford: $\mathfrak{H}^0_{ш}$, $\mathfrak{H}^1_{ш}$ et $\mathfrak{H}_{ш}$ sont des algèbres (commutatives) de polynômes sur les *mots de Lyndon*.
Conséquence:

$$\mathfrak{H}^1_{ш} = \mathfrak{H}^0_{ш}[x_1], \qquad \mathfrak{H}_{ш} = \mathfrak{H}^1_{ш}[x_0] = \mathfrak{H}^0_{ш}[x_0, x_1].$$

Proposition. *Pour u et u' dans $\mathfrak{H}^1_{ш}$,*

$$\widehat{\mathrm{Li}}_u(z)\widehat{\mathrm{Li}}_{u'}(z) = \widehat{\mathrm{Li}}_{u ш u'}(z).$$

Conséquence. *Pour u et u' dans $\mathfrak{H}^0_{ш}$,*

$$\widehat{\zeta}(u)\widehat{\zeta}(u') = \widehat{\zeta}(u ш u').$$

Proposition.

$$\begin{cases} z\dfrac{d}{dz}\widehat{\mathrm{Li}}_{x_0 u}(z) & = \widehat{\mathrm{Li}}_u(z) \\[2ex] (1-z)\dfrac{d}{dz}\widehat{\mathrm{Li}}_{x_1 u}(z) & = \widehat{\mathrm{Li}}_u(z) \end{cases}$$

Définition. *On prolonge la définition de* $\widehat{\mathrm{Li}}_w(z)$ *à tous les* $w \in X^*$*:*

$$\mathrm{Li}_e(z) := 1, \qquad \widehat{\mathrm{Li}}_{x_0^s}(z) := \frac{1}{s!}(\log z)^s \quad \textit{pour} \quad s \geq 1$$

et, pour $j \in \{0, 1\}$*,*

$$\widehat{\mathrm{Li}}_{x_j u}(z) := \int_0^z \widehat{\mathrm{Li}}_u(z)\omega_j(z)$$

si le mot $x_j u$ *contient la lettre* x_1*.*

Série génératrice.

$$\widehat{\mathrm{Li}}(z) := \sum_{w \in X^*} \widehat{\mathrm{Li}}_w(z) w.$$

Équation Différentielle de Knizhnik-Zamolodchikov

$$\boxed{\frac{d}{dz}\widehat{\mathrm{Li}}(z) = \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right)\widehat{\mathrm{Li}}(z).}$$

Condition initiale: $z \mapsto \widehat{\mathrm{Li}}(z) z^{-x_0}$ est holomorphe de valeur 1 au voisinage de 0 dans

$\mathbb{C} \setminus \big\{(-\infty, 0] \cup [1, \infty)\big\}$:

Théorème (H.N. Minh et M. Petitot). *Les fonctions* $\widehat{\mathrm{Li}}_w(z)$, *quand* w *décrit* X^*, *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{C}$.

Associateur de Drinfeld (*):

$$\Phi_{KZ} = \sum_{w \in X^*} \widehat{\zeta}(\mathrm{reg} w) w \in \mathbb{C}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle.$$

(*) c.f. p. 33 for reg$w$.

Polylogarithmes multiples en plusieurs variables

Pour $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_k)$ dans le polydisque unité $|z_i| < 1$ $(1 \leq i \leq k)$ de $\mathbb{C}^k$, et pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ avec $s_j \geq 1$ $(1 \leq j \leq k)$,

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(\underline{z}) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{z_1^{n_1} \cdots z_k^{n_k}}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(z) = \mathrm{Li}_{\underline{s}}(z, 1, \ldots, 1).$$

Multiplication des séries:

(Stuffle)

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(\underline{z})\mathrm{Li}_{\underline{s}'}(\underline{z}') = \sum_{\underline{s}''} \mathrm{Li}_{\underline{s}''}(\underline{z}'').$$

où chaque (s''_j, z''_j) est de la forme

$$\text{soit } (s_i, z_i), \quad \text{soit } (s'_{i'}, z'_{i'}), \quad \text{soit } (s_i + s'_{i'}, z_i z'_{i'}).$$

Exemples:

$$\mathrm{Li}_s(z)\mathrm{Li}_{s'}(z') = \mathrm{Li}_{(s,s')}(z,z') + \mathrm{Li}_{(s',s)}(z',z) + \mathrm{Li}_{s+s'}(zz').$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_s(z)\mathrm{Li}_{(s'_1,s'_2)}(z'_1,z'_2) = \mathrm{Li}_{(s,s'_1,s'_2)}(z,z'_1,z'_2)+ \\ \mathrm{Li}_{(s'_1,s,s'_2)}(z'_1,z,z'_2) + \mathrm{Li}_{(s'_1,s'_2,s)}(z'_1,z'_2,z)+ \\ \mathrm{Li}_{(s+s'_1,s'_2)}(zz'_1,z'_2) + \mathrm{Li}_{(s'_1,s+s'_2)}(z'_1,zz'_2).\end{aligned}$$

Règle:

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{s} & s_1 & s_2 & 0 & s_3 & s_4 & \cdots & 0 \\ \underline{s}' & 0 & s'_1 & s'_2 & 0 & s'_3 & \cdots & s'_{k'} \\ \\ \underline{s}'' & s_1 & s_2+s'_1 & s'_2 & s_3 & s_4+s'_3 & \cdots & s'_{k'} \\ \underline{z}'' & z_1 & z_2z'_1 & z'_2 & z_3 & z_4z'_3 & \cdots & z'_{k'}. \end{array}$$

Le produit $\star$ et les algèbres harmoniques

Produit $\star$ (*stuffle product*) sur X^*:

$$e \star u = u \star e = u$$

pour $u \in X^*$,

$$x_0^n \star w = w \star x_0^n = w x_0^n$$

pour tout $n \geq 1$ et $w \in X^*$, et

$$(y_s u) \star (y_t u') = y_s \big(u \star (y_t u')\big) + y_t \big((y_s u) \star u'\big) + y_{s+t}(u \star u')$$

pour u et u' dans X^*, $s \geq 1$, $t \geq 1$.
Distributivité par rapport à l'addition: algèbres associatives, commutatives et unitaires

$$\boxed{\mathfrak{H}_\star^0 \subset \mathfrak{H}_\star^1 \subset \mathfrak{H}_\star}$$

M. Hoffman: Algèbres (commutatives) de polynômes sur les mots de Lyndon.

Théorème.

$$\widehat{\zeta}(y_{\underline{s}} \star y_{\underline{s}'}) = \widehat{\zeta}(y_{\underline{s}})\widehat{\zeta}(y_{\underline{s}'}) \qquad \textit{quand } s_1 \geq 2 \textit{ et } s'_1 \geq 2.$$

Autrement dit

$$\widehat{\zeta}(u)\widehat{\zeta}(u') = \widehat{\zeta}(u \star u')$$

pour u et u' dans $\mathfrak{H}^0_\star$.

Exemple:

$$\begin{aligned}\zeta(s)\zeta(s'_1, s'_2) = \zeta(s, s'_1, s'_2) + \zeta(s'_1, s, s'_2) + \zeta(s'_1, s'_2, s) \\ +\zeta(s + s'_1, s'_2) + \zeta(s'_1, s + s'_2)\end{aligned}$$

pour $s \geq 2$, $s'_1 \geq 2$ et $s'_2 \geq 1$.

Les relations du troisième type *(opérateur d'Hoffman)*

Exemple.

Shuffle: $$\mathrm{Li}_1(z)\mathrm{Li}_2(z) = \mathrm{Li}_{(1,2)}(z) + 2\mathrm{Li}_{(2,1)}(z).$$

Stuffle: $$\mathrm{Li}_s(z)\mathrm{Li}_{s'}(z') = \mathrm{Li}_{(s,s')}(z,z') + \mathrm{Li}_{(s',s)}(z',z) + \mathrm{Li}_{s+s'}(zz').$$

Conséquence ($z = z'$):

$$\mathrm{Li}_{(1,2)}(z,1) + 2\mathrm{Li}_{(2,1)}(z,1) = \mathrm{Li}_{(1,2)}(z,z) + \mathrm{Li}_{(2,1)}(z,z) + \mathrm{Li}_3(z^2).$$

Fait:

$$F(z) = \mathrm{Li}_{(1,2)}(z,1) - \mathrm{Li}_{(1,2)}(z,z) = \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{z^{n_1}(1 - z^{n_2})}{n_1 n_2^2}$$

tend vers 0 quand $z \to 1$ dans le cercle unité.

Démonstration: pour $|z| < 1$ on a

$$|1 - z^{n_2}| = |(1 - z)(1 + z + \cdots + z^{n_2 - 1})| < n_2 |1 - z|,$$

donc

$$\sum_{n_2=1}^{n_1-1} \frac{|1 - z^{n_2}|}{n_2^2} < |1 - z| \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \frac{1}{n_2}.$$

Du calcul de $\mathrm{Li}_{(1,1)}$ on déduit

$$|F(z)| \leq |1 - z| \mathrm{Li}_{(1,1)}(|z|) = \frac{1}{2} |1 - z| \Big(\log\big(1/(1 - |z|)\big) \Big)^2.$$

D'où la relation d'Euler

$$\boxed{\zeta(2,1) = \zeta(3).}$$

Théorème *(Relations d'Hoffman)***.**

$$\widehat{\zeta}(x_1 \star v - x_1 ш v) = 0 \quad \textit{pour} \quad v \in \mathfrak{H}^0.$$

Relations de mélange double régularisées

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{reg}: \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0_{ш}[x_0, x_1] & \longrightarrow & \mathfrak{H}^0 \\ w & \longmapsto & \text{terme constant de } w. \end{array}$$

Théorème *(Ihara-Kaneko: "Regularized double shuffle relations")*.
Pour $u \in \mathfrak{H}^1$ *et* $v \in \mathfrak{H}^0$,

$$\widehat{\zeta}\big(\mathrm{reg}(u \star v - u ш v)\big) = 0.$$

Cas $u = x_1$: relations d'Hoffman

$$\widehat{\zeta}(x_1 \star v - x_1 ш v) = 0 \quad \text{pour} \quad v \in \mathfrak{H}^0.$$

Conjectures Diophantiennes

Variables indépendantes Z_u, $u \in \{e\} \cup X^* x_1$.

Pour $v = \sum_u c_u u \in \mathfrak{H}^1$, on pose

$$Z_v = \sum_u c_u Z_u.$$

Remarques.

- Pour u_1 et u_2 dans $x_0 X^* x_1$, $Z_{u_1 ш u_2}$ et $Z_{u_1 \star u_2}$ sont des formes linéaires en les Z_u, $u \in x_0 X^* x_1$.
- Pour $v \in x_0 X^* x_1$, $Z_{x_1 ш v - x_1 \star v}$ est une forme linéaire en les Z_u, $u \in x_0 X^* x_1$.

Soit R l'algèbre des polynômes à coefficients rationnels en les variables Z_u, $u \in x_0 X^* x_1$ et soit $\mathfrak{I} \subset R$ le noyau de

$$Z_u \mapsto \widehat{\zeta}(u) \quad (u \in x_0 X^* x_1).$$

Conjecture 1. *Les polynômes*

$$Z_{u_1}Z_{u_2} - Z_{u_1 \sqcup\!\sqcup u_2}, \qquad Z_{u_1}Z_{u_2} - Z_{u_1 \star u_2} \quad \text{et} \quad Z_{x_1 \star v - x_1 \sqcup\!\sqcup v},$$

pour u_1, u_2 *et* v *décrivant* $x_0 X^* x_1$*, engendrent l'idéal* $\mathfrak{I}$*.*

Conjecture 2 *(Ihara-Kaneko)***.** *Le* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel engendré par les formes linéaires*

$$Z_{\mathrm{reg}(u \star v - u \sqcup\!\sqcup v)},$$

où u *décrit* $\mathfrak{H}^1$ *et* v *décrit* $\mathfrak{H}^0$*, est le noyau de*

$$\widehat{\zeta} : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Conjecture intermédiaire: $u = x_1^k$, $k \geq 1$.

Tout $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ avec $s_1 \geq 2$ s'écrit

$$\underline{s} = \bigl(a_1 + 1, \{1\}_{b_1 - 1}, a_2 + 1, \{1\}_{b_2 - 1}, \ldots a_m + 1, \{1\}_{b_m - 1}\bigr)$$

avec $m \geq 1$, $a_i \geq 1$, $b_j \geq 1$.

On a $k = b_1 + \cdots + b_m$ et l'entier m est le nombre de i avec $s_i \geq 2$.

Indice dual: $\underline{s}' = (s'_1, \ldots, s'_{k'})$ défini par

$$\underline{s}' = \bigl(b_m + 1, \{1\}_{a_m - 1}, \ldots, b_2 + 1, \{1\}_{a_2 - 1}, b_1 + 1, \{1\}_{a_1 - 1}\bigr).$$

Exemple: $k = 1$ (donc $m = 1$, $b_1 = 1$) – dual de s: $\quad (2, \{1\}_{s-2})$.

Relations d'Ohno. *Pour tout $\underline{s}$ et tout $\ell \geq 0$,*

$$\sum_{\substack{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k \geq 0 \\ \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k = \ell}} \zeta(s_1 + \epsilon_1, \ldots, s_k + \epsilon_k) = \sum_{\substack{\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_{k'} \geq 0 \\ \epsilon'_1 + \cdots + \epsilon'_{k'} = \ell}} \zeta(s'_1 + \epsilon'_1, \ldots, s'_{k'} + \epsilon'_{k'})$$

Cas particuliers:

Relation de dualité. $(\ell = 0)$ $\qquad \zeta(s_1, \ldots, s_k) = \zeta(s'_1, \ldots, s'_{k'})$

Formule de la somme. $(\ell = p - k + 1)$ *Pour* $p \geq 2$ *et* k *satisfaisant* $1 \leq k \leq p - 1$,

$$\sum_{\substack{s_1+\cdots+s_k=p \\ s_1 \geq 2}} \zeta(s_1, \ldots, s_k) = \zeta(p).$$

$k = 2$: L. Euler (1775)
$k = 3$: M. Hoffman et C. Moen (1996)
Cas général: A. Granville (1997)
Via identités syntaxiques: Minh Hoang

Lien avec des relations de dérivations: K. Ihara et M. Kaneko
Équations fonctionnelles: J-i. Okuda et K. Ueno.

Polyzêtas Colorés

Formule de duplication d'Euler

$$\mathrm{Li}_s(-1) = -(1-2^{-s+1})\zeta(s).$$

Constante de Catalan:

$$\mathrm{Li}_2(i) = -\frac{1}{8}\zeta(2) + iG, \qquad G = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Transformation Cyclotomique.

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(\underline{z}^n) = n^{|\underline{s}|-k} \sum_{\underline{\sigma}} \mathrm{Li}_{\underline{s}}(\underline{\sigma z}), \qquad (n^k \text{ termes})$$

où $\underline{z}^n = (z_1^n, \dots, z_k^n)$, $\underline{\sigma z} = (\sigma_1 z_1, \dots, \sigma_k z_k)$, $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, *chaque* σ_j *décrit les racines* $n^{\text{ièmes}}$ *de l'unité.*

Question. *Quelles sont les relations de dépendance algébrique entre les nombres*

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(\underline{\sigma}) \qquad \textit{pour} \quad \underline{\sigma} \in (\mathbb{C}^\times_{\mathrm{tors}})^k ?$$

Quelques références récentes

Ball, K., Rivoal, T. – Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs. Invent. Math., à paraître.

Cartier, P. – Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêta et groupes pro-unipotents. Sém. Bourbaki, 53ème année, 2000–2001, n° 884, Mars 2001, 36 pp.

Ihara, K.; Kaneko, M. – Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values. Manuscrit, 2001.

Rivoal, T. – La fonction Zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs. C. R. Acad. Sci. Paris **331** (2000), 267–270. `http://arXiv.org/abs/math.NT/0008051`

Rivoal, T. – Irrationalité d'au moins un des neuf nombres zeta(5), zeta(7), ..., zeta(21). Soumis à Acta Arithmetica.
http://arXiv.org/abs/math/0104221

Zudilin, W. – Irrationality of values of zeta-function. À paraître dans les Proceedings of the Conference of Young Scientists (Moscow University, April 9-14, 2001)
http://arXiv.org/abs/math/0104249

Zudilin, W. – Arithmetics of linear forms involving odd zeta values. Manuscrit, juin 2001.

M. Hoffman: http://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html

D. Bradley: http://www.umemat.maine.edu/faculty/bradley/papers/pub.html