Genèse des méthodes de transcendance

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

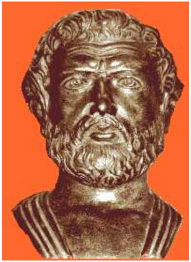
Lundi 23 Avril 2007

Résumé

Les démonstrations de transcendance de différentes constantes de l'analyse ont essentiellement toutes leur source dans les travaux de Ch. Hermite : sa démonstration de la transcendance du nombre e en 1873 est le prototype des méthodes qui ont été élaborées ultérieurement. Nous montrerons d'abord comment son article fondateur s'inspire des démonstrations antérieures d'irrationalité (Lambert, Euler, Liouville), puis comment ses arguments ont été développés ensuite dans différentes directions : approximants de Padé, séries d'interpolation, fonctions auxiliaires.

Irrationalité de $\sqrt{2}$

École de Pythagore



Hippasus de Metapontum (vers 500 BC).

Sulba Sutras (composés vers 800-500 BC).

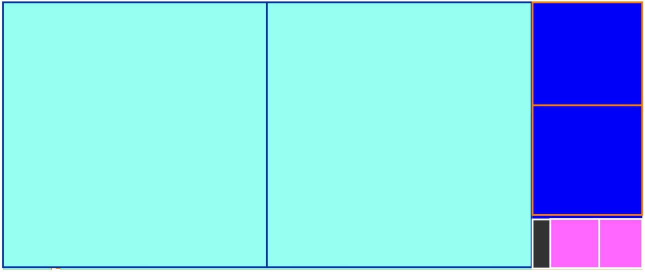
Irrationalité de $\sqrt{2}$

- On part d'un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 1 et $1+\sqrt{2}$.
- On le découpe en deux carrés de côté 1 et un plus petit rectangle de côtés $1+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-1$ et 1.
- Les côtés du petit rectangle ont pour proportions

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2},$$

  donc les mêmes que ceux du grand.
- On peut donc le découper en deux carrés et un rectangle encore plus petit, dont les côtés sont toujours dans les mêmes proportions.
- Le processus se poursuit indéfiniment.

Fraction continue de $1 + \sqrt{2}$



Irrationalité de $\sqrt{2}$

Si on part d'un rectangle dont les proportions sont rationnelles, alors le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'opérations.

Donc $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel, et $\sqrt{2}$ aussi.

Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$

- Benoît Rittaud, Éditions *Le Pommier* (2006).

http://www.math.univ-paris13.fr/~rittaud/RacineDeDeux

Fraction continue

Le nombre

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209 \ \ldots$$

vérifie

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot$$

Donc

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

On écrit le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ sous la forme abrégée

$$\sqrt{2} = [1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots] = [1;\ \overline{2}],$$

Critères d'irrationalité

Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini.

Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement (binaire, décimal, ou en une autre base $b \geq 2$ au choix) est *périodique à partir d'un certain rang*.

Conséquence : il devrait être facile de décider si un nombre donné est rationnel ou non.

Construire des nombres irrationnels (ou même des nombres transcendants) est facile, démontrer que certaines constantes de l'analyse (faisant intervenir des limites, séries, produits ou intégrales) sont irrationnelles est une autre paire de manches.

La Constante d'Euler–Mascheroni

La Constante d'Euler

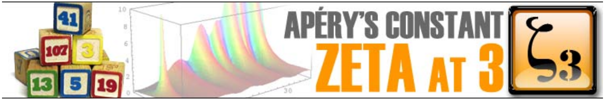
$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$= 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\ldots$$

est-elle rationnelle ?

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= -\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)dxdy}{(1-xy)\log(xy)}.$$

Travaux récents de *J. Sondow* inspirés par ceux de F. Beukers sur la démonstration d'Apéry.

Fonction zêta de Riemann



Le nombre

$$\zeta(3) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} = 1,202\,056\,903\,159\,594\,285\,399\,738\,161\,511\,\ldots$$

est irrationnel (Apéry 1978).

Qu'en est-il du nombre

$$\zeta(5) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5} = 1,036\,927\,755\,143\,369\,926\,331\,365\,486\,457\ldots ?$$

T. Rivoal : une infinité de $\zeta(2n+1)$ sont irrationnels.

Problèmes ouverts (irrationalité)

Le nombre

$$e + \pi = 5,859\,874\,482\,048\,838\,473\,822\,930\,854\,632\ldots$$

est-il irrationnel ?

La constante de Catalan

La constante de Catalan
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0,915\,965\,594\,177\,219\,015\,0\ldots$$
est-elle irrationnelle ?

Fonction Gamma d'Euler

Le nombre

$$\Gamma(1/5)\cdots = 4,5908437119988030532047582759291520$$

est-il irrationnel ?

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z \cdot \frac{dt}{t}.$$

Valeurs rationnelles de z pour lesquelles on connaît la réponse (la valeur de Gamma est un nombre transcendant)

$$r \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right\} \pmod 1.$$

Irrationalité de π

Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)
Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques,
Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **17** (1761), p. 265-322 ;
lu en 1767 ; Math. Werke, t. II.

$\tan(v)$ est irrationnel pour v rationnel $\neq 0$
et $\tan(\pi/4) = 1$.

Développement en fraction continue de $\tan(x)$

$$\tan(x) = \frac{1}{i}\tanh(ix), \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}}}.$$

Leonard Euler

Leonhard Euler (1707 - 1783)
De fractionibus continuis dissertatio,
Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae,
9 (1737), 1744, p. 98–137 ;
Opera Omnia Ser. I vol. **14**,
Commentationes Analyticae, p. 187–215.

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$$
$$= 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\ldots$$
$$= 1 \;+\; 1 \;+\; \frac{1}{2}\cdot\left(1 \;+\; \frac{1}{3}\cdot\left(1 \;+\; \frac{1}{4}\cdot\left(1 \;+\; \frac{1}{5}\cdot(1+\cdots)\right)\right)\right).$$

Développement en fraction continue de e

$$
\begin{aligned}
e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} \\
= [2\,;\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6, \dots] \\
= [2; \overline{1,\ 2m,\ 1}]_{m \geq 1}.
\end{aligned}
$$

e n'est ni rationnel, ni quadratique (Lambert 1766).

Point de départ : $y = \tanh(x/a)$ satisfait l'équation différentielle $ay' + y^2 = 1$.
Conduit Euler à

$$
\begin{aligned}
e^{1/a} &= [1\,;\ a-1,\ 1,\ 1,\ 3a-1,\ 1,\ 1,\ 5a-1, \dots] \\
&= [\overline{1,\ (2m+1)a-1,\ 1}]_{m \geq 0}.
\end{aligned}
$$

Irrationalité de e : démonstration géométrique

Jonathan Sondow
http://home.earthlink.net/~jsondow/
A geometric proof that e is irrational and a new measure of its irrationality,
Amer. Math. Monthly **113** (2006) 637-641.

On commence avec un intervalle I_1 de longueur 1. On va construire l'intervalle I_n en découpant l'intervalle I_{n-1} en n intervalles égaux, de telle sorte que la longueur de I_n sera $1/n!$.

Irrationalité de e : démonstration géométrique

Pour que l'origine de I_n soit

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

on part de l'intervalle $I_1 = [2, 3]$, pour $n \geq 2$, on construit l'intervalle I_n en découpant l'intervalle I_{n-1} en n intervalles égaux, on conserve le second qui est I_n :

$$I_1 = \left[1 + \frac{1}{1!}\ , 1 + \frac{2}{1!}\right] = [2, 3],$$
$$I_2 = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\ , 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}\right] = \left[\frac{5}{2!}\ , \frac{6}{2!}\right],$$
$$I_3 = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\ , 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}\right] = \left[\frac{16}{3!}\ , \frac{17}{3!}\right].$$

Irrationalité de e, d'après J. Sondow

L'origine de I_n est

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \frac{a_n}{n!},$$

la longueur est $1/n!$, l'extrémité est donc $(a_n + 1)/n!$.

Le nombre e est le point d'intersection de tous ces intervalles, il appartient à l'intérieur de chaque I_n, donc il ne peut pas s'écrire sous la forme $a/n!$ avec a entier.
Comme

$$\frac{p}{q} = \frac{(q-1)!\,p}{q!},$$

on en déduit l'irrationalité de e.

Mesure d'irrationalité de e, d'après J. Sondow

Pour tout entier $n > 1$,

$$\frac{1}{(n+1)!} < \min_{m \in \mathbf{Z}} \left| e - \frac{m}{n!} \right| < \frac{1}{n!}.$$

Fonction de Smarandache : $S(q)$ est le plus petit entier positif tel que $S(q)!$ soit un multiple de q :

$S(1) = 1,\ S(2) = 2,\ S(3) = 3,\ S(4) = 4,\ S(5) = 5,\ S(6) = 3\dots$

$S(p) = p$ pour p premier et $S(n!) = n$.
Mesure d'irrationalité de e : pour $q > 1$,

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{(S(q)+1)!}.$$

Joseph Fourier

Cours d'analyse à l'école polytechnique, 1815.

Irrationalité de e, d'après J. Fourier

$$e = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(N+1+k)!}\cdot$$

$$N!\, e - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{N!}{(N+1+k)!} > 0\cdot$$

$$\frac{N!}{(N+1+k)!} \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{N!}{(N+k)!} \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{k!}\cdot$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{N!}{(N+1+k)!} < \frac{1}{N+1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = \frac{e}{N+1}\cdot$$

Irrationalité de e, d'après J. Fourier

Dans la relation

$$N!\, e - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} = \sum_{k\geq 0} \frac{N!}{(N+1+k)!}$$

les nombres

$$N! \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!}$$

sont entiers, tandis que le membre de droite est > 0 et tend vers 0 quand N tend vers l'infini.
Donc e est irrationnel.

Comme e est irrationnel, il en est de même de $e^{1/b}$ pour b entier positif. Que e^2 soit irrationnel est plus fort !

Le nombre e n'est pas quadratique

Rappel (Euler, 1737) : $e = [2;\ 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$
et ce développement n'est pas périodique.

Si $ae^2 + be + c = 0$ on peut écrire

$$cN! + \sum_{n=0}^{N} (2^n a + b)\frac{N!}{n!}$$
$$= -\sum_{k\geq 0} \left(2^{N+1+k} a + b\right) \frac{N!}{(N+1+k)!}.$$

Le membre de gauche est un entier, celui de droite tend vers l'infini ! **Et alors ?**

e n'est pas quadratique (Liouville, 1840)

On écrit la relation quadratique sous la forme
$ae + b + ce^{-1} = 0$.

$$bN! + \sum_{n=0}^{N} (a + (-1)^n c) \frac{N!}{n!} = -\sum_{k \geq 0} \left(a + (-1)^{N+1+k} c\right) \frac{N!}{(N+1+k)!}.$$

Même argument : les deux membres s'annulent pour N suffisamment grand.

Et alors ?

e n'est pas quadratique (suite et fin)

On écrit

$$\sum_{k\geq 0}\left(a+(-1)^{N+1+k}c\right)\frac{N!}{(N+1+k)!}=A+B+C=0$$

avec

$$\begin{aligned}
A&=\left(a-(-1)^{N}c\right)\frac{1}{N+1} \qquad (k=0),\\
B&=\left(a+(-1)^{N}c\right)\frac{1}{(N+1)(N+2)} \qquad (k=1),\\
C&=\sum_{k\geq 2}\left(a+(-1)^{N+1+k}c\right)\frac{N!}{(N+1+k)!}.
\end{aligned}$$

Pour N suffisamment grand on a $A=B=C=0$ donc $a-(-1)^{N}c=0$ et $a+(-1)^{N}c=0$ donc $a=c=0$ et $b=0$.

Le nombre e^2 n'est pas quadratique

J. Liouville (1809 - 1882) a démontré que e^2 n'est pas quadratique en 1840.

Sur l'irrationalité du nombre $e = 2,718\ldots$,
J. Math. Pures Appl.
(1) **5** (1840), p. 192 et p. 193-194.

Par exemple on en déduit l'irrationalité de e^4, donc de $e^{4/b}$ pour b entier positif.

e^2 n'est pas quadratique, d'après Liouville

On écrit $ae^2 + b + ce^{-2} = 0$ et

$$\frac{N!b}{2^{N-1}} + \sum_{n=0}^{N}(a + (-1)^n c)\,\frac{N!}{2^{N-n-1}n!} = -\sum_{k\geq 0}\left(a + (-1)^{N+1+k}c\right)\frac{2^k N!}{(N+1+k)!}.$$

On vérifie que les nombres

$$\frac{N!}{2^{N-n-1}n!}, \quad (0 \leq n \leq N)$$

sont entiers pour une infinité de N.

Limite de la méthode

Le même argument ne semble pas suffire pour démontrer l'irrationalité du nombre e^3, encore moins pour montrer que le nombre e ne vérifie pas de relation cubique.
D.W. Masser a remarqué que cette démonstration donnait l'irrationalité de $\theta = e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}$, donc de $e^{\sqrt{2}}$.
On obtient de même l'irrationalité de $e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}$, mais apparemment pas le fait que $e^{\sqrt{2}}$ n'est pas quadratique.
On obtient aussi l'irrationalité du nombre $e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}}$, donc celle du nombre $e^{\sqrt{3}}$.
Le champ d'application de cette méthode est limité. On doit à Hermite l'idée fondamentale permettant d'aller plus loin, qui est à la base de la quasi-totalité des démonstrations de transcendance.

Critère d'irrationalité

Soit x un nombre réel. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) x *est irrationnel.*

(ii) *Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $p/q \in \mathbf{Q}$ *tel que*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{\epsilon}{q}.$$

(iii) *Pour tout nombre réel* $Q > 1$ *il existe un entier* q *dans l'intervalle* $1 \leq q < Q$ *et un nombre entier* p *tel que*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qQ}.$$

(iv) *Il existe une infinité de* $p/q \in \mathbf{Q}$ *vérifiant*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Irrationalité de $\zeta(3)$, d'après Apéry (1978)

Il existe deux suites de nombres rationnels $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(d_n)_{n\geq 0}$ *telles que* $a_n \in \mathbf{Z}$ *et* $d_n^3 b_n \in \mathbf{Z}$ *pour tout* $n \geq 0$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} |2a_n\zeta(3) - b_n|^{1/n} = (\sqrt{2}-1)^4,$$

où d_n *est le ppcm de* $1, 2, \ldots, n$.

On a $d_n = e^{n+o(n)}$ et $e^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1$.

Références

S. Fischler
Irrationalité de valeurs de zêta, (d'après Apéry, ,
Sém. Bourbaki 2002-2003,
N° 910 (Novembre 2002).
http://www.math.u-psud.fr/~fischler/publi.html

C. Krattenthaler et T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann,* Mem. Amer. Math. Soc. **186** (2007), 93 p.
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal/articles.html

Idée de Ch. Hermite

Ch. Hermite (1822 - 1901). Idée : approximer la fonction e^z par des fractions rationnelles $A(z)/B(z)$.

Pour démontrer l'irrationalité de e^a, (a entier ≥ 2), on approche e^a par $A(a)/B(a)$.

Si la fonction $B(z)e^z - A(z)$ a un zéro d'ordre élevé à l'origine, alors elle est petite en module au voisinage de 0, donc en $z = a$, et $|B(a)e^a - A(a)|$ est petit.

Une fonction f analytique au voisinage de 0 est *proche* de $A(z)/B(z)$ si $B(z)f(z) - A(z)$ a un zéro d'ordre élevé à l'origine.

Exemple :

$$e^z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}.$$

Trouver $B \in \mathbf{C}[z]$ (ou mieux, $\mathbf{Z}[z]$) tel que le développement de Taylor à l'origine $B(z)e^z$ ait un grand trou : $A(z)$ sera le début du développement, $R(z) = B(z)e^z - A(z)$ le reste.

Mise en œuvre de cette idée
par *Yu. V.Nesterenko (2005)* pour
démontrer l'irrationalité de e^a
pour a entier > 0,
donc celle de e^r pour $r \in \mathbf{Q}^\times$,
puis celle de π.

Écrire $B_N(z)e^z = A_N(z) + R_N(z)$ avec A_N et B_N dans $\mathbf{Z}[z]$
et $R_N(a) \neq 0$, $\lim_{N\to\infty} R_N(a) = 0$.
L'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}^\times$ donne celle de $\log s$ pour
$s \in \mathbf{Q}_{>0}$.
Le même argument donne aussi l'irrationalité de $\log(-1)$
au sens où $\log(-1) = i\pi \notin \mathbf{Q}(i)$.

Annuler un coefficient du développement

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k,$$

$$(zf')^{(m)}(0) = \frac{a_m}{(m-1)!}.$$

Le coefficient de z^m dans le développement de Taylor de $zf'(z) - mf(z)$ est 0.
Si on écrit

$$zf'(z) = \sum_{k \geq 0} k a_k z^k,$$

on a

$$zf'(z) - mf(z) = \sum_{k \geq 0} (k - m) a_k z^k.$$

Annuler plusieurs coefficients du développement

On pose $\delta = zd/dz$, qui vérifie $\delta(z^k) = kz^k$. Alors $\delta^m z^k = k^m z^k$ pour $m \geq 0$. Par linéarité, si $T \in \mathbf{C}[z]$

$$T(\delta)z^k = T(k)z^k \quad \text{et} \quad T(\delta)f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k T(k) z^k.$$

On annule le coefficient de Taylor de z^k en considérant $T(\delta)f(z)$ où T satisfait $T(k) = 0$. Soient $m \geq n$ des entiers et

$$T(z) = (z-n-1)(z-n-2)\cdots(z-m).$$

Alors $T(\delta)f(z) = A(z) + R(z)$ avec

$$A(z) = \sum_{k=0}^{n} T(k)a_k z^k \quad \text{et} \quad R(z) = \sum_{k\geq m+1} T(k)a_k z^k.$$

Dans le développement de $T(\delta)f(z)$ les coefficients de $z^{n+1}, z^{n+2}, \ldots, z^m$ sont 0.

Approximations rationnelles de e^z

On prend $f(z) = e^z$ avec $a_k = 1/k!$ et $m = 2n$. Soit

$$T_n(z) = (z-n-1)(z-n-2)\cdots(z-2n).$$

On a

$$\delta(e^z) = ze^z.$$

Il existe $B_n \in \mathbf{Z}[z]$, unitaire de degré n, tel que $T_n(\delta)e^z = B_n(z)e^z$. Donc

$$\boxed{B_n(z)e^z = A_n(z) + R_n(z)}$$

avec

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} T_n(k)\frac{z^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(z) = \sum_{k\geq 2n+1} T_n(k)\frac{z^k}{k!}.$$

Les coefficients de A_n sont entiers

Chaque coefficient de A_n est multiple d'un coefficient du binôme

$$\frac{T_n(k)}{k!} = (-1)^n(2n-k)(2n-k-1)\cdots(n+1) \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

pour $0 \le k \le n$. Donc $A_n \in \mathbf{Z}[z]$.

On vérifie d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0.$$

Soit a un entier positif. On pose $s = e^a$. Si on remplace z par a on trouve

$$B_n(a)s - A_n(a) = R_n(a).$$

Les coefficients de R_n sont tous positifs, donc $R_n(a) > 0$ et $B_n(a)s - A_n(a) \neq 0$. Comme $R_n(a)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et comme $B_n(a)$ et $A_n(a)$ sont des entiers, il en résulte que s est irrationnel.

On suppose que π est un nombre rationnel, $\pi = a/b$. On remplace z par $ia = i\pi b$ dans les formules précédentes. Comme $e^z = (-1)^b$ on a

$$B_n(ia)(-1)^b - A_n(ia) = R_n(ia),$$

et les deux nombres complexes $A_n(ia)$ et $B_n(ia)$ sont dans $\mathbf{Z}[i]$. Le membre de gauche est dans $\mathbf{Z}[i]$, celui de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc tous les deux sont nuls.

En prenant un résultant, on montre enfin que R_n et R_{n+1} n'ont pas de zéro commun en dehors de 0. D'où la contradiction.

Autre présentation de la méthode de Hermite

C.L. Siegel, 1949. $D = d/dz$

$A(z) = (-1 + D)^{-n-1} z^n$

$B(z) = (1 + D)^{-n-1} z^n$

$D^{n+1} R(z) = z^n e^z$

Autre expression pour R :

$$R(z) = \frac{1}{n!} \int_0^z (z-t)^n t^n e^t dt.$$

L'opérateur $J\varphi = \displaystyle\int_0^z \varphi(t)dt$, inverse de D, satisfait

$$J^{n+1}\varphi = \int_0^z \frac{1}{n!}(z-t)^n \varphi(t)dt.$$

Approximation simultanée pour la transcendance

Approcher la fonction exponentielle par une fraction rationnelle A/B comme nous l'avons fait conduit à des résultats d'irrationalité.

Pour obtenir des énoncés de transcendance l'idée, encore due à Hermite, consiste à introduire des approximations simultanées (analogie avec l'approximation diophantienne).

Il y a deux points de vue, duaux l'un de l'autre. Ils donnent lieu aux deux types d'*approximants de Padé*.

Indépendance linéaire, selon Hermite

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des nombres réels. Soient a_0, $a_1, \ldots$, a_m des entiers rationnels. On veut démontrer que le nombre

$$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$$

n'est pas nul.

Exemple : $x_k = x^k$: transcendance de x.

Hermite : $x = e$.

Lindemann : $x = \pi$.

$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$

On approxime simultanément $x_1, \dots, x_m$ par des nombres rationnels $b_1/b_0, \dots, b_m/b_0$.
Soient $b_0, b_1, \dots, b_m$ sont des nombres entiers. Pour $1 \le k \le m$ posons

$$\epsilon_k = b_0 x_k - b_k.$$

Alors $b_0 L = A + R$ avec

$A = a_0 b_0 + \cdots + a_m b_m \in \mathbf{Z}$ et $R = a_1 \epsilon_1 + \cdots + a_m \epsilon_m \in \mathbf{R}$.

Si $A \neq 0$ et $|R| < 1$ alors $L \neq 0$.

Théorème de Hermite–Lindemann

Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z et e^z est transcendant.

Hermite (1873) : transcendance de e.

Lindemann (1882) : transcendance de π.

Corollaires : transcendance de $\log \alpha$ et e^β pour α et β nombres complexes algébriques non nul, $\log \alpha \neq 0$.

Fonction auxiliaire de Hermite : polynôme en z et e^z.

Approximants de Padé

Henri Eugène Padé (1863 - 1953)
Approximation des fonctions analytiques par des fonctions rationnelles.

Approximations de la fonction e^z : Hermite.

Hermite 1873

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des nombres complexes deux à deux distincts, $n_0, \ldots, n_m$ des entiers ≥ 0, Hermite construit explicitement des polynômes Q_0, $Q_1, \ldots,$ Q_m avec Q_j de degré $M - n_j$ tels que chacune des fonctions

$$Q_0(z)e^{\alpha_k z} - Q_k(z), \quad (1 \leq k \leq m)$$

ait à l'origine un zéro de multiplicité supérieur à $M = n_0 + \cdots + n_m$.

Pour $\alpha_k = k$ et $z = 1$ il en déduit des approximations rationnelles simultanées des nombres e, e^2, $\ldots e^m$, qui permettent de déduire que ces nombres sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, donc que e est transcendant.

Hermite 1893

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des nombres complexes deux à deux distincts, $n_0, \ldots, n_m$ des entiers ≥ 0, Hermite construit explicitement des polynômes $P_1, \ldots, P_m$ avec P_j de degré n_j tels que la fonction

$$P_1(z)e^{\alpha_1 z} + \cdots + P_m(z)e^{\alpha_m z}$$

ait à l'origine un zéro de multiplicité au moins $n_1 + \cdots + n_m + m - 1$.

C. Hermite (1917) : autre expression intégrale pour le reste.

Application à la transcendance : *K. Mahler (1930).*

Indépendance linéaire, selon Siegel (1929)

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *des nombres réels. On suppose que pour tout* N *suffisamment grand, il existe* $m+1$ *formes linéaires indépendantes* $L_0, \ldots, L_m$, *à coefficients entiers de valeur absolue* $\leq A_N$, *telles que*

$$\max_{0 \leq j \leq m} |L_j(\mathbf{x})| \leq \epsilon_N A_N^{m-1},$$

avec $\epsilon_N \to 0$. *Alors* $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbf{Q}$.

Si a_0, $a_1, \ldots,$ a_m sont des entiers rationnels non tous nuls, on montre que le nombre

$$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$$

n'est pas nul en prenant m de ces formes linéaires formant avec L un système indépendants et on considère leur déterminant.

Approximants de Padé de type I

Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions analytiques au voisinage de l'origine. Soient $n_1, \dots, n_m$ des entiers ≥ 0, $M = n_0 + \cdots + n_m$.

Approximants de Padé de première espèce : polynômes $P_1, \dots, P_m$ avec P_j de degré $\leq n_j$ tels que la fonction

$$P_1(z)f_1(z) + \cdots + P_m(z)f_m(z)$$

ait à l'origine un zéro de multiplicité au moins $M + m - 1$.

Approximants de Padé de type II

Approximants de Padé de deuxième espèce : polynômes $A_1, \ldots, A_m$ avec A_j de degré $\leq M - n_j$ tels que chacune des fonctions

$$A_i(z)f_j(z) - A_j(z)f_i(z) \quad (1 \leq i < j \leq m)$$

ait à l'origine un zéro de multiplicité $> M$.

`Référence` : N.I. Feldman and Yu.V. Nesterenko, *Number Theory IV*, Transcendental Numbers, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **44** (1998) Chap. 2.

Fonctions entières à valeurs entières

Soit f une fonction entière transcendante dans $\mathbf{C}$. Pour $R > 0$ on pose

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|.$$

G. Pólya (1914) : 2^z *est la fonction entière transcendante de plus faible croissance qui envoie* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{Z}$*.*

Plus précisément :
Si $f(n) \in \mathbf{Z}$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$*, alors*

$$\limsup_{R \to \infty} 2^{-R} |f|_R \geq 1.$$

Autres contributions : G.H. Hardy, G. Pólya, D. Sato, E.G. Straus, A. Selberg, Ch. Pisot, F. Carlson, F. Gross,. . ..

Fonctions entières arithmétiques

La démonstration de Pólya consiste à développer la fonction en *série d'interpolation* aux points $0, 1, 2, \ldots$:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z(z-1) + a_3 z(z-1)(z-2) + \cdots$$

Comme $f(n)$ est entier pour $n \geq 0$, les coefficients a_n sont rationnels et on peut majorer leur dénominateur. Si la croissance de f est trop faible, on en déduit qu'ils sont nuls pour n suffisamment grand.

Interpolation polynomiale

Identité d'Hermite :

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{z-\alpha}{x-\alpha} \cdot \frac{1}{x-z}.$$

Application : série d'interpolation de Newton. On itère, on multiplie par $1/2i\pi$ et on intègre. On trouve une formule du type :

$$\frac{1}{x-z} = \sum_{n=0}^{N-1} A_n (z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n) + R_N(z).$$

Interpolation rationnelle

René Lagrange (1935).

$$\frac{1}{x-z} = \frac{\alpha-\beta}{(x-\alpha)(x-\beta)} + \frac{x-\beta}{x-\alpha} \cdot \frac{z-\alpha}{z-\beta} \cdot \frac{1}{x-z}.$$

On itère, on multiplie par $(1/2i\pi)f(z)$ et on intègre :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} B_n \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)} + \tilde{R}_N(z).$$

Interpolation rationnelle

T. Rivoal (2006) : utilise la fonction zêta d'Hurwitz

$$\zeta(s,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^s}.$$

Il développe $\zeta(2,z)$ en série en

$$\frac{z^2(z-1)^2 \cdots (z-n+1)^2}{(z+1)^2 \cdots (z+n)^2}.$$

Les coefficients du développement sont dans $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(3)$. Il en déduit une nouvelle démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$.

De même : nouvelle démonstration de l'irrationalité de $\log 2$ en développant

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+z}.$$

Mélange C. Hermite - R. Lagrange

T. Rivoal (2006) : nouvelle démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$ en développant

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right)$$

en série d'interpolation de Hermite–Lagrange en

$$\frac{\big(z(z-1)\cdots(z-n+1)\big)^2}{(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Fonctions entières arithmétiques et $\mathbf{Z}[i]$

A.O. Gel'fond (1929) : fonctions entières à valeurs entières aux entiers de Gauss.
Développement en série d'interpolation de Newton aux points de $\mathbf{Z}[i]$.

Une fonction entière non polynomiale f *telle que* $f(a+ib) \in \mathbf{Z}[i]$ *pour tout* $a+ib \in \mathbf{Z}[i]$ *vérifie*

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log |f|_R \geq \gamma.$$

F. Gramain (1981) : $\gamma = \pi/(2e)$.
C'est optimal : *D.W. Masser (1980).*

Transcendance de e^π

A.O. Gel'fond (1929).

Si

$$e^\pi = 23,140\,692\,632\,779\,269\,005\,729\,086\,367\ \dots$$

est algébrique, alors la fonction $e^{\pi z}$ prend des valeurs algébriques aux points de $\mathbf{Z}[i]$.

Développer $e^{\pi z}$ en série d'interpolation aux entiers de Gauss.

Le septième problème de Hilbert

A.O. Gel'fond et Th. Schneider (1934).
Solution du septième problème de Hilbert :
transcendance de α^β
et de $(\log \alpha_1)/(\log \alpha_2)$
pour α, β, α_2 *et* α_2 *algébriques.*

Utilisent une fonction auxiliaire dont l'existence provient du principe des tiroirs (lemme de Thue–Siegel).

On peut aussi utiliser des déterminants d'interpolation (M. Laurent).

Fonctions auxiliaires

C.L. Siegel (1929) : les formules explicites de Hermite peuvent être remplacées par l'utilisation du principe des tiroirs (lemme de Thue–Siegel) qui permet de montrer l'existence de fonctions auxiliaires qui conviennent.

M. Laurent (1991) : au lieu du principe des tiroirs (qui donne l'existence de solutions à des systèmes d'équations linéaires), on peut considérer les matrices de ces systèmes, puis les *déterminants d'interpolation.*

Inégalités de pentes en théorie d'Arakelov

J–B. Bost (1994) :
des matrices ou des déterminants supposent des choix pour les bases, on peut les éviter en utilisant des *inégalités de pentes en théorie d'Arakelov.*

Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres, (d'après D. Masser et G. Wüstholz). Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.

Série de Taylor et séries d'interpolation

On peut développer l'analogie entre les séries de Taylor et celles d'interpolation.

La série de Taylor correspond à prendre, dans l'identité d'Hermite et l'interpolation de Newton, un seul point (disons 0) avec multiplicités – elle donne lieu aux développements de Padé.

On peut aussi prendre des multiplicités dans l'interpolation de René Lagrange.

Autre dualité entre les méthodes de Gel'fond et de Schneider : transformation de Fourier-Borel.

Développements lacunaires en base 2

Nous avons vu comment Hermite avait étendu les démonstrations d'irrationalité de Fourier et Liouville pour obtenir la transcendance du nombre e.
Liouville a appliqué sa méthode d'irrationalité au nombre $\theta = \sum_{n\geq 0} 2^{-n^2}$.

$$0 < \theta - \sum_{n=0}^{N} 2^{-n^2} = \sum_{n\geq N+1} 2^{-n^2} < \frac{1}{2^{2N}q}, \qquad q = 2^{N^2}.$$

L'énoncé est banal (le développement binaire n'est pas périodique) mais Liouville a étendu l'argument pour obtenir la transcendance de $\sum_{n\geq 0} 2^{-u_n}$ quand la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ croît suffisamment vite.

Transcendence de $\sum_{n\geq 0} 2^{-u_n}$: Liouville

Liouville (1844). Pour tout nombre algébrique réel α*, il existe une constante* $c > 0$ *telle que l'ensemble des* $p/q \in \mathbf{Q}$ *vérifiant* $|\alpha - p/q| < q^{-c}$ *soit fini.*

On en déduit la transcendance de

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-u_n}$$

quand la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty.$$

Exemple : $u_n = n!$ le nombre $\sum_{n\geq 0} 2^{-n!}$ est transcendant.

A. Thue, C.L. Siegel, F. Dyson, K.F. Roth (1955)
Pour tout nombre algébrique réel α *et pour tout* $\epsilon > 0$, *l'ensemble des* $p/q \in \mathbf{Q}$ *vérifiant*

$$|\alpha - p/q| < q^{-2-\epsilon}$$

est fini.

Conséquence : transcendance de

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-u_n}$$

quand

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 2.$$

Transcendence de $\sum_{n\geq 0} 2^{-u_n}$: Ridout

D. Ridout (1957) Pour tout nombre algébrique réel α et pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des $p/q \in \mathbf{Q}$ vérifiant $q = 2^k$ et $|\alpha - p/q| < q^{-1-\epsilon}$ est fini.
Conséquence : transcendance de

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-u_n} \quad \text{quand} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

A. J. Kempner (1916)

$$\theta = \sum_{n\geq 0} 2^{-2^n}.$$

E. Shallit (1979) : les quotients partiels de 2θ sont 1 ou 2.

W.M. Schmidt (1970)

Généralisation du théorème de Thue-Siegel-Roth en un énoncé d'approximation diophantienne simultanée.

Référence : Yuri Bilu,
The many faces of the subspace Theorem [after Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier. . .],
Séminaire Bourbaki, 59è année (2006–2007), No 967, 2006.
http://www.math.u-bordeaux.fr/~yuri/publ/subspace.pdf

Transcendence de $\sum_{n\geq 0} \alpha^{-d^n}$

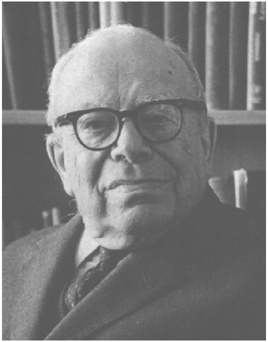
K. Mahler (1930, 1969) :

transcendance des valeurs
aux points algébriques $\neq 0$ de

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{-d^n},$$

pour $d \geq 2$, qui satisfait

$f(z^d) + z = f(z)$ pour $|z| < 1$.



Complexité et transcendance

D. Bailey, J. Borwein, R. Crandall et C. Pomerance (2004) :
Soit ξ un nombre réel algébrique de degré $d \geq 2$. Il existe un nombre positif C qui ne dépend que de ξ tel que le nombre de 1 parmi les N premiers chiffres du développement binaire de ξ soit minoré par $CN^{1/d}$.

Conséquence : pour $d \geq 2$, le nombre

$$\sum_{n \geq 0} 2^{-d^n}$$

est transcendant.

Transcendance de $\vartheta = \sum_{n\geq 0} 2^{-n^2}$

Pour $u_n = n^2$ la méthode de Liouville donne seulement l'irrationalité du nombre $\theta = \sum_{n\geq 0} 2^{-n^2}$.

Méthode de Mahler : ϑ n'est pas un nombre de Liouville.

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n(n-1)} z^n, \qquad f(z) = 1 + zf(z/4).$$

D. Bailey, J. Borwein, R. Crandall et C. Pomerance (2004) : ϑ n'est pas quadratique.

Transcendance de $\sum_{n\geq 0} \alpha^{-n^2}$

D. Bertrand et *D. Duverney, K. Nishioka, K. Nishioka et I. Shiokawa*, (1997),
Le théorème de Nesterenko (1996) sur l'indépendance algébrique des valeurs de fonctions modulaires donne des énoncés de transcendance sur les valeurs de fonctions thêta.
En particulier, *pour* α *algébrique avec* $0 < |\alpha| < 1$, *les trois nombres*

$$\sum_{n\geq 0} \alpha^{-n^2}, \quad \sum_{n\geq 0} n^2\alpha^{-n^2}, \quad \sum_{n\geq 0} n^4\alpha^{-n^2}$$

sont algébriquement indépendants.

Suite de l'histoire

Méthode stéphanoise.

Mesures : de transcendance, d'indépendance linéaire, d'indépendance algébrique...

Caractéristique finie : critère de Christol.

Federico PELLARIN - *Aspects de l'indépendance algébrique en caractéristique non nulle [d'après Anderson, Brownawell, Denis, Papanikolas, Thakur, Yu,...]* Séminaire Nicolas BOURBAKI, Dimanche 18 mars 2007.
http://www.bourbaki.ens.fr/seminaires/2007/Prog_mars.07.html