ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL WALDSCHMIDT

Dimension algébrique de sous-groupes analytiques de variétés de groupe.

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 1 (1975), p. 23-33.

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_1_23_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 1 (1975), 23-33

DIMENSION ALGÉBRIQUE DE SOUS-GROUPES ANALYTIQUES DE VARIÉTÉS DE GROUPE

par Michel WALDSCHMIDT

Soient G une variété de groupe définie sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques, et $\varphi : \mathbf{C}^n \to G_{\mathbf{C}}$ un sous-groupe à n paramètres de G, de dimension algébrique d. Nous nous proposons de majorer le rang l (sur $\mathbf{Z}$) des sous-groupes Γ de $\mathbf{C}^n$ dont l'image par φ est contenue dans le groupe $G_{\overline{\mathbf{Q}}}$ des points algébriques de G.

Ce type de résultat n'est pas nouveau [4 , 9]. Ainsi, le théorème 2 de E. Bombieri et S. Lang [2] montre que, (si les points de Γ sont très bien distribués dans $\mathbf{C}^n$ quand $n \geqslant 2$), pour $d \geqslant n + 1$, on a $l \leqslant n^2 + 3n$ pour des variétés linéaires, et $l \leqslant 2n^2 + 4n$ pour des variétés abéliennes. Ces majorations sont obtenues à partir d'un critère arithmétique pour que des fonctions, *analytiques dans une boule,* soient algébriquement dépendantes sur $\mathbf{Q}$. Ces résultats sont donc *locaux.*

Nous montrerons que, sous les mêmes hypothèses, on a $ld \leqslant n(l + d)$ dans le cas linéaire, et $ld \leqslant n(l + 2d)$ dans le cas abélien. Nous obtiendrons d'autres inégalités sous des hypothèses de répartition moins fortes. Ces majorations étaient déjà connues pour des sous-groupes à 1 paramètre [7 , 9] ; nous les obtiendrons, pour $n \geqslant 2$, à partir d'un critère concernant des fonctions *méromorphes dans* $\mathbf{C}^n$, *d'ordre fini.*

1. Un critère de dépendance algébrique de fonctions méromorphes d'ordre fini.

Les notations sont celles de [2] ; la taille ("size") d'un nombre complexe algébrique α sera notée $s(\alpha)$.

Nous commencerons par démontrer le théorème suivant.

THEOREME 1. — *Soient* l, λ, $\rho_1, \ldots, \rho_d$ *des nombres réels positifs,* K *un corps de nombres,* $(S_N)_{N \geqslant 1}$ *une suite de sous-ensembles de* $\mathbf{C}^n$, $f_1, \ldots, f_d$ *des fonctions méromorphes dans* $\mathbf{C}^n$, *d'ordre (strict) inférieur ou égal à* $\rho_1, \ldots, \rho_d$ *respectivement, et* $g_1, \ldots, g_d$ *des fonctions entières dans* $\mathbf{C}^n$, *d'ordre (strict) inférieur ou égal à* $\rho_1, \ldots, \rho_d$ *respectivement, telles que* $g_1 f_1, \ldots, g_d f_d$ *soient entières dans* $\mathbf{C}^n$.

On suppose

$$\max_{z \in S_n} |z| \leqslant N \quad ; \quad \mathrm{Card}\, S_N \geqslant N^l \quad ; \quad \min_{\substack{u \neq v \\ u, v \in S_N}} |u - v| \geqslant N^{-\lambda} , \qquad (1)$$

pour $N \to +\infty$;

$$h_i(z) \neq 0 \quad et \quad f_i(z) \in K \quad pour \quad z \in S_N , \quad et$$

$$\max_{z \in S_N} \left(s\,(f_i(z)) \;\; ; \;\; \mathrm{Log} \frac{1}{|h_i(z)|} \right) \ll N^{\rho_i} \quad pour \quad N \to +\infty. \qquad (2)$$

Si l'inégalité

$$(d - 1)\, l > \rho_1 + \cdots \rho_d + 2d\,(n - 1)\,(\lambda + 1) \qquad (3)$$

est satisfaite, alors $f_1, \ldots, f_d$ *sont algébriquement dépendantes sur* Q.

Etant donné que, dans une boule B_R (de centre O et de rayon R) de $\mathbf{C}^n$, le nombre maximum ν_R de points vérifiant

$$\min_{u \neq v} |u - v| \geqslant R^{-\lambda}$$

est majoré par

$$\nu_R \ll R^{2n} \cdot R^{2n\lambda} ,$$

les relations (1) entraînent $l \leqslant 2n\,(\lambda + 1)$.

Inversement, pour $l \geqslant 2n$ et $\lambda = \dfrac{l}{2n} - 1$, la relation (3) s'écrit :

$$ld > n\,(l + \rho_1 + \cdots + \rho_d).$$

On peut démontrer un analogue local de ce résultat, qui contienne le théorème 1 de [2] ; on suppose seulement que les fonctions f_i, g_i sont analytiques dans une boule B_R (il n'y a donc plus de condition sur leurs ordres), que les ensembles S_N sont contenus dans une boule B_r, avec $R > 12\,nr$ (on aura donc $l \leqslant 2n\lambda$), et on remplace l'inégalité (3) par

$$(d-1)\,l > \rho_1 + \cdots + \rho_d + 2d\,(n-1)\,\lambda.$$

Si la suite (S_N) est λ-distribuée au sens de [2], alors les relations (1) sont vérifiées avec $l = 2n\lambda$.

Pour démontrer le théorème 1, nous utiliserons une variante du lemme de Schwarz à plusieurs variables.

Lemme 1. — *Soit f une fonction analytique dans une boule B_R de $\mathbf{C}^n$, admettant des zéros $z_1, \ldots, z_s$ (comptés avec leur ordre de multiplicité) dans une boule $B_{r/2}$, avec $r \leqslant R/7n$. Soit*

$$\delta = \min \left\{ \frac{r}{2} \;;\; \inf_{z_i \neq z_j} |z_i - z_j| \right\}$$

Alors on a

$$\operatorname{Log} |f|_r \leqslant \operatorname{Log} |f|_R - \frac{1}{7} \cdot s. \left(\frac{\delta}{r}\right)^{2n-2} \cdot \operatorname{Log} \frac{R}{7\,nr}.$$

Démonstration du lemme. — D'après le corollaire de la proposition 3 de [2], la masse moyenne $\Theta_W(r\,,0)$ du diviseur W de f dans la boule B_r est minorée par

$$\Theta_W(r \cdot 0) \geqslant s \cdot \left(\frac{\delta}{r}\right)^{2n-2}.$$

La proposition 4 de [1] $\left(\text{avec } \tau = \frac{6}{7}\right)$ donne alors le résultat.

Démonstration du théorème. — On commence par se ramener, par récurrence sur d, au cas où

$$\max_{l \leqslant i \leqslant d} \rho_i < \frac{\rho_1 + \cdots + \rho_d + l}{d} \;:$$

en effet, si, par exemple, on avait

$$(d-1)\,\rho_d \geqslant \rho_1 + \cdots + \rho_{d-1} + l,$$

on déduirait de l'hypothèse (3) l'inégalité

$$(d-2)\, l > \rho_1 + \cdots + \rho_{d-1} + 2(d-1)(n-1)(\lambda+1),$$

et il suffirait alors que l'on démontre le résultat pour les fonctions $f_1, \ldots, f_{d-1}$.

D'autre part, quitte à remplacer chaque ensemble S_N par un de ses sous-ensembles, on pourra supposer

$$N^l \ll \text{Card } S_N \ll N^l.$$

On notera C une constante (indépendante de N) telle que, pour N assez grand, on ait :

$$\max_{z \in S_N} |z| \leqslant C.N.$$

Soit $\rho = (\rho_1 + \cdots + \rho_d)/d$ la moyenne des ρ_i. Considérons un entier N suffisamment grand. D'après un lemme classique de Siegel [3], il existe un polynôme non nul $P_N \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_d]$, de degré R_i par rapport à X_i, $(1 \leqslant i \leqslant d)$, et de hauteur H, avec

$$R_i \ll N^{\frac{l}{d} + \rho - \rho_i}, \quad (1 \leqslant i \leqslant d) \quad , \quad \text{et} \quad \text{Log } H \ll N^{\frac{l}{d} + \rho},$$

pour $N \to +\infty$, tel que la fonction $F_N = P_N(f_1, \ldots, f_d)$ vérifie

$$F_N(z) = 0 \quad \text{pour tout } z \in S_N.$$

Soit

$$G_N = g_1^{R_1} \cdots g_d^{R_d} \cdot F_N.$$

Nous allons montrer, par récurrence, que l'on a, pour tout $M \geqslant N$,

$$(\mathrm{I})_M : F_N(z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in S_M,$$

et

$$(\mathrm{II})_M : \text{Log } |G_N|_{C(M+1)} \leqslant - M^{l-2(n-1)(\lambda+1)}.$$

On en déduira

$$\lim_{R \to +\infty} \text{Log } |G_N|_R = 0,$$

donc $F_N = 0$, ce qui montrera que les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbf{Q}$.

Nous avons construit F_N de manière à vérifier $(I)_N$; montrons que $(I)_M$ implique $(II)_M$, puis que $(II)_M$ implique $(I)_{M+1}$.

$(I)_M \Rightarrow (II)_M$. Supposons que $(I)_M$ soit vraie ; on utilise le lemme 1 pour la fonction G_N et les deux boules B_r et B_R, avec $r = C(M+1)$ et $R = 14\,nr$, en remarquant que les fonctions entières $g_i f_i$ sont d'ordre $\leqslant \rho_i$.

On a :

$$\mathrm{Log}\, |G_N|_R \leqslant \sum_{i=1}^{d} N^{\frac{l}{d}+\rho-\rho_i} \cdot R^{\rho_i} \leqslant M^{\frac{l}{d}+\rho} \ ;$$

d'autre part, on a, pour $s = \mathrm{Card}\, S_M$ et $\delta = \min\limits_{\substack{u \neq v \\ u,v \in S_M}} |u - v|$:

$$\frac{1}{7} \cdot s \cdot \left(\frac{\delta}{r}\right)^{2n-2} \cdot \mathrm{Log} \frac{R}{7\,nr} \geqslant M^l \cdot \left(\frac{M^{-\lambda}}{C.M}\right)^{2n-2} \geqslant M^{l-2(n-1)(\lambda+1)}.$$

Grâce à l'hypothèse (3), on en déduit $(II)_M$.

$(II)_M \Rightarrow (I)_{M+1}$. L'inégalité $(II)_M$ montre que, pour $z \in S_{M+1}$, on a

$$\mathrm{Log}\, F_N(z) \leqslant - M^{l-2(n-1)(\lambda+1)} \ ;$$

or $F_N(z)$ appartient à K, et sa taille est majorée par

$$s(F_N(z)) \leqslant M^{\frac{l}{d}+\rho} \ ;$$

l'inégalité

$$-2 \cdot [K : \mathbf{Q}] \cdot s(\alpha) \leqslant \mathrm{Log}\, |\alpha|$$

étant vérifiée pour tout élément non nul α de K, on en déduit

$$F_N(z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in S_{M+1},$$

et le théorème 1 est démontré.

2. Application aux sous-groupes à plusieurs paramètres.

Le théorème 1 permet de majorer le nombre de points **Q**-linéairement indépendants où un sous-groupe à n paramètres d'une variété de groupe, linéaire ou abélienne, prend des valeurs algébriques.

THEOREME 2. – *Soient* G *une variété de groupe définie sur* $\overline{\mathbf{Q}}$, $\varphi : \mathbf{C}^n \to \mathrm{G}_{\mathbf{C}}$ *un sous-groupe à n paramètres de* G, *de dimension algébrique d, et* $u_1, \ldots, u_l$ *des éléments* **Q**-*linéairement indépendants de* $\mathbf{C}^n$, *tels que*

$$\varphi(u_j) \in \mathrm{G}_{\overline{\mathbf{Q}}} \quad pour \quad 1 \leqslant j \leqslant l.$$

Pour $\mathrm{N} \geqslant 1$, *soit*

$$\Gamma_{\mathrm{N}} = \{k_1 u_1 + \cdots + k_l u_l \ ; \ k_j \in \mathbf{Z} \ , |k_j| \leqslant \mathrm{N}\} \ ;$$

on suppose

$$\min_{\substack{z \in \Gamma_{\mathrm{N}} \\ z \neq 0}} |z| \gg \mathrm{N}^{-\lambda} \quad pour \quad \mathrm{N} \to +\infty.$$

Alors

1) *si* G *est une variété linéaire, on a*

$$l(d-1) \leqslant d + 2d(n-1)(\lambda+1) \ ;$$

2) *si* G *est une variété abélienne, on a*

$$l(d-1) \leqslant 2d(n\lambda + n - \lambda).$$

Pour démontrer le théorème 2, on utilise des coordonnées projectives $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_h)$, avec $\varphi_0 \neq 0$; les fonctions φ_i sont entières dans $\mathbf{C}^n$, d'ordre inférieur ou égal à 1 dans le cas linéaire, à 2 dans le cas abélien, et la dimension algébrique de φ est égale au degré de transcendance sur **Q** du corps $\mathbf{Q}\left(\dfrac{\varphi_1}{\varphi_0}, \ldots, \dfrac{\varphi_h}{\varphi_0}\right)$. Comme les fonctions φ_i/φ_0 $(1 \leqslant i \leqslant h)$ prennent des valeurs dans un corps de nombres aux points de $\Gamma = \cup\, \Gamma_{\mathrm{N}}$ qui ne sont pas pôles de φ_0, il ne reste plus qu'à vérifier l'hypothèse (2) du théorème 1.

Cette vérification est facile dans le cas linéaire (avec $\rho = 1$ et $\mathrm{S_N} = \Gamma_{\mathrm{N}}$) ; dans le cas abélien, on commence par éviter les pôles de φ_0 en construisant un sous-ensemble $\mathrm{S_N}$ de Γ_{N} tel que

$$\mathrm{Card}\ \mathrm{S_N} \gg \mathrm{N}^l \quad \text{et} \quad \max_{z \in \mathrm{S_N}} \mathrm{Log}\, \frac{1}{|\varphi_0(z)|} \ll \mathrm{N}^2 \ ;$$

(cf. [7] § 3.5). On vérifie ensuite la majoration

$$\max_{z \in S_N} s\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_0}(z)\right) \ll N^2 \tag{4}$$

en utilisant la forme quadratique de Néron Tate (cf. [3] § II.4).

Sous-groupes très bien distribués de $\mathbf{C}^n$.

Remarquons que le paramètre λ du théorème 2 doit vérifier :

$$\lambda \geqslant \max\left(0\,,\frac{l}{2n} - 1\right).$$

Inversement, si $l \geqslant 2n$, pour presque tout $(u_1, \ldots, u_l)$ de $(\mathbf{C}^n)$, on a :

$$\min_{\substack{z \in \Gamma_N \\ z \neq 0}} |z| \gg N^{-\lambda}$$

dès que $\lambda > \dfrac{l}{2n} - 1$ (cf. [2 , 5]). Dans ce cas, la conclusion du théorème 2 devient :

$$ld \leqslant n(l + d) \text{ dans le cas linéaire,}$$

et

$$ld \leqslant n(l + 2d) \text{ dans le cas abélien.}$$

DEFINITION. – *Nous dirons qu'un sous-groupe* Γ *de* $\mathbf{C}^n$ *est très bien distribué s'il possède une base (sur* $\mathbf{Z}$) $u_1, \ldots, u_l$ *telle que, pour tout* $\lambda > \max\left(0\,,\dfrac{l}{2n} - 1\right)$, *on ait*

$$\min_{\substack{z \in \Gamma_N \\ z \neq 0}} |z| \gg N^{-\lambda},$$

avec

$$\Gamma_N = \{k_1 u_1 + \cdots + k_l u_l \;\; ; \;\; k_j \in \mathbf{Z} \;\; , \;\; |k_j| \leqslant N\}.$$

Par exemple un sous-groupe de $\mathbf{C}^n$ engendré par des éléments $\mathbf{R}$-linéairement indépendants est très bien distribué.

COROLLAIRE. – *Soient* G *une variété de groupe, linéaire ou abélienne, définie sur* $\mathbf{Q}$, $\varphi : \mathbf{C}^n \to G_{\mathbf{C}}$ *un sous-groupe de* G *à* n *para-*

mètres, et Γ *un sous-groupe très bien distribué de* $\mathbf{C}^n$, *de rang* l *sur* $\mathbf{Z}$, *tel que* $\varphi(\Gamma)$ *soit contenu dans le groupe* $G_{\overline{\mathbf{Q}}}$ *des points algébriques de* G. *On suppose que l'on a*

$$l > n^2 + n \text{ dans le cas linéaire,}$$

et

$$l > 2n^2 + 2n \text{ dans le cas abélien.}$$

Alors $\varphi(\mathbf{C}^n)$ *est un sous-groupe algébrique (fermé) de* $G_{\mathbf{C}}$, *de dimension algébrique* n.

3. Valeurs de sous-groupes à plusieurs paramètres en des points algébriques.

On peut améliorer le théorème 2 quand $u_1, \ldots, u_l$ appartiennent à $\overline{\mathbf{Q}}^n$.

THEOREME 3. – *Sous les hypothèses du théorème 2, on suppose que les coordonnées de* $u_1, \ldots, u_l$ *sont toutes algébriques, Alors on a :*

$$l(d-1) \leqslant d - n + 2d(n-1)(\lambda+1) \text{ dans le cas linéaire, et}$$

$$l(d-1) \leqslant 2(d-n) + 2d(n-1)(\lambda+1) \text{ dans le cas abélien.}$$

La démonstration est semblable à celle du théorème 2 ; on applique le théorème 1 à d fonctions $f_1, \ldots, f_d$ algébriquement indépendantes, avec

$$f_i(z) = z_i \quad \text{pour} \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

et $f_{n+1}, \ldots, f_d$ appartenant à l'ensemble

$$\left\{ \frac{\varphi_i}{\varphi_0} \ , \ 1 \leqslant i \leqslant h \right\}.$$

Comme on a supposé que chaque u_i avait ses coordonnées algébriques, il est facile de trouver des valeurs convenables pour λ. Par exemple, si on écrit les coordonnées de u_i dans $\mathbf{R}^{2n}$ sous la forme :

$$u_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,2n}) \ , \ 1 \leqslant i \leqslant l,$$

avec $\alpha_{i,j}$ réels algébriques, on peut choisir $\lambda = \max_{1 \leqslant j \leqslant 2n} h_j$, où h_j est la dimension du Q-espace vectoriel engendré par $\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{l,j}$ (cf. [5] 7 D). De plus il existe des caractérisations simples des sous-groupes Γ de $\overline{\mathbf{Q}}^n$ qui sont très bien distribués (voir par exemple [5] théorème 7 E).

COROLLAIRE. — *Soit* A *une variété abélienne définie sur* $\overline{\mathbf{Q}}$. *Soit* $\varphi : \mathbf{C}^n \to \mathrm{A}_{\mathbf{C}}$ *un sous-groupe à n paramètres de* A, *et* Γ *un sous-groupe très bien distribué de* $\overline{\mathbf{Q}}^n$, *de rang* $\geqslant 2n + 1$ *sur* $\mathbf{Z}$, *tel que* $\varphi(\Gamma)$ *soit contenu dans le groupe* $\mathrm{A}_{\overline{\mathbf{Q}}}$ *des points algébriques de* A.

Alors $\varphi(\mathbf{C}^n)$ *est une sous-variété abélienne (donc fermée) de* $\mathrm{A}_{\mathbf{C}}$, *de dimension n.*

4. Compléments.

Dans les théorèmes précédents, on peut remplacer partout le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques (ou le corps de nombres K) par une extension de $\mathbf{Q}$ de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbf{Q}$ (et de type fini sur $\mathbf{Q}$) ; cf. [3 , 7]. Dans ces conditions, l'hypothèse (3) du théorème 1 doit être remplacée par

$$(d - \tau)\, l > \tau\,(\rho_1 + \ldots + \rho_d) + 2d\,(n - 1)\,(\lambda + 1),$$

et la conclusion du théorème 2 devient :

$$l(d - \tau) \leqslant d\tau + 2d\,(n - 1)\,(\lambda + 1) \text{ dans le cas linéaire,}$$

et

$$l\,(d - \tau) \leqslant 2\,d\tau + 2d\,(n - 1)\,(\lambda + 1) \text{ dans le cas abélien.}$$

La seule difficulté nouvelle réside dans la vérification de (4) ; au lieu d'utiliser la forme quadratique de Néron-Tate, on utilise la fonction taille sur les variétés abéliennes, introduite par A. Altman (cf. [8]).

D'autre part, on peut améliorer tous ces énoncés quand on normalise le sous-groupe φ, de telle manière que sa dérivée à l'origine soit algébrique [3].

Enfin ces résultats possèdent des analogues p-adiques (voir [6] théorème 2 et [7] proposition 7) ; les fonctions considérées ne sont plus définies que localement, et l'equivalent p-adique du théorème 1 doit être énoncé pour des fonctions analytiques dans un disque ; le lemme de Schwarz correspondant a été démontré par J.P. Serre [6].

ADDITIF. On peut améliorer le théorème 3 dans le cas abélien :

$$l(n + d - 1) \leqslant 2d + 2(n + d)(n - 1)(\lambda + 1),$$

et généraliser son corollaire à des variétés de groupe quelconques (Sém. P. LELONG, Analyse, 14^{e} année, 1974/75).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOMBIERI, Algebraic values of meromorphic maps, *Inventiones Math.*, 10 (1970), 267-287, et 11 (1970), 163-166.

[2] E. BOMBIERI, and S. LANG, Analytic subgroups of group varieties, *Inventiones Math.*, 11 (1970), 1-14.

[3] S. LANG, Introduction to transcendental numbers. Reading Mass., Addison Wesley, 1966.

[4] S. LANG, Transcendental numbers and diophantine approximations, *Bull. Amer. Math. Soc*, 77 (1971) 635-677.

[5] W.M. SCHMIDT, Approximation to algebraic numbers, *L'Enseignement Math.*, 27 (1971) 187-253.

[6] J.P. SERRE, Dependance d'exponentielles p-adiques, *Sem. Delange Pisot Poitou, Théorie des Nombres,* 7e année, 1965/66, n° 15, 14 pp.

[7] M. WALDSCHMIDT, Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, *Acta Arithm.*, 23 (1973), 19-88.

[8] WALDSCHMIDT, Dimension algébrique de sous-groupes analytiques de variétés abéliennes, *C.r. Acad. Sci. Paris,* Sér. A 274, (1972), 1681-1683.

[9] WALDSCHMIDT, Transcendance dans les variétés de groupe, *Sem. Delange Pisot Poitou, Théorie des Nombres,* 14e année, 1972/73, n° 23, 16 pp.

Manuscrit reçu le 17 mai 1974
accepté par C. Chabauty.

Michel WALDSCHMIDT,
Analyse complexe et géométrie
(Laboratoire associé au CNRS, n° 213)
Université de Paris VI
Mathématiques, T 45-46
11, Quai St Bernard
75230 Paris Cedex 05.