

GRUPPENDETERMINANT

par

Michel WALDSCHMIDT

---:---

INTRODUCTION.

"... De 1896 à 1910 s'est développée, entre les mains de Frobenius, Burnside et I. Schur, une théorie voisine de celle des algèbres, la théorie de la représentation linéaire des groupes (limitée au début aux représentations de groupes finis). Elle tire son origine de remarques de Dedekind : celui-ci, avant même la publication de son travail sur les algèbres, avait, vers 1880, rencontré au cours de ses recherches sur les bases normales d'extensions galoisiennes, le "Gruppens determinant":  $\det(x_{st}-1)$  où  $(x_s)_{s \in G}$  est une suite d'indéterminées dont l'ensemble d'indices est un groupe fini  $G$  (en d'autres termes la norme de l'élément générique de l'algèbre du groupe  $G$  relativement à sa représentation régulière); et il avait observé que, lorsque  $G$  est abélien, ce polynôme se décompose en facteurs linéaires (ce qui généralisait une identité démontrée longtemps auparavant pour les déterminants "circulants" qui correspondent aux groupes cycliques  $G$ ). Au cours de sa très intéressante

correspondance avec Frobenius [2], Dedekind, en 1896, attire son attention sur cette propriété, son lien avec la théorie des caractères des groupes abéliens, et quelques résultats analogues sur des groupes non commutatifs particuliers, qu'il avait obtenus en 1886; quelques mois plus tard, Frobenius résolvait complètement le problème de la décomposition du "Gruppen-determinant" en facteurs irréductibles [5], grâce à sa brillante généralisation de la notion de caractère [4]... " Bourbaki [1], Note historique.

I. - DECOMPOSITION DU GRUPPENDETERMINANT EN FACTEURS IRREDUCTIBLES

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $g$ ,  $\mathbb{C}[(X_s)_{s \in G}]$  l'anneau des polynômes sur  $\mathbb{C}$  à  $g$  indéterminées indexées par  $G$ . On définit la matrice du groupe  $G$  par :

$$A_G = [X_{st^{-1}}]_{\substack{s \in G \\ t \in G}} \in M_g(\mathbb{C}[(X_s)_{s \in G}]),$$

où  $s$  est l'indice de ligne et  $t$  l'indice de colonne. Le déterminant de  $A_G$ ,

$$\Delta_G = \Delta_G(X_s)$$

(déterminant du groupe  $G$ ) est un polynôme en  $(X_s)_{s \in G}$ .

**THEOREME.** (Frobenius [5]). - Soit un groupe fini,  $g$  son ordre,  $r$  le nombre de classes de conjugaison,  $\rho_n$  ( $1 \leq n \leq r$ ) les représentations irréductibles de  $G$  ([7]),  $f_n$  le degré de  $\rho_n$  et  $\chi_n$  son caractère.

Soit  $A_n$  l'ensemble des éléments  $(a) = (a_1, \dots, a_{f_n})$  de  $\mathbb{N}^{f_n}$  qui vérifient :

$$\sum_{i=1}^{f_n} i a_i = f_n.$$

On pose :

$$(1) \quad S_{k,n} = \sum_{s_1, \dots, s_k \in G} \chi_n(s_1 \dots s_k) X_{s_1} \dots X_{s_k} \quad 1 \leq n \leq r, 1 \leq k \leq f_n$$

$$(2) \quad \Phi_n = (-1)^n \sum_{(a) \in A_n} \prod_{k=1}^n \frac{S_{k,n}^{a_k}}{(-k)^{a_k} \cdot a_k!}, \quad 1 \leq n \leq r.$$

Pour tout  $n = 1, \dots, r$ ,  $\Phi_n$  est un polynôme homogène irréductible et le déterminant de G vérifie :

$$(3) \quad \Delta_G = \prod_{n=1}^r \Phi_n^{f_n}.$$

II. - UN EXEMPLE D'APPLICATION : LIEN AVEC LE REGULATEUR p-ADIQUE

1. - Soit  $K$  une extension galoisienne réelle finie de  $\mathbb{Q}$ , de groupe de Galois  $G$ . Soit  $p$  un nombre premier,  $\epsilon$  une unité de Minkowski de  $K$  ([3]), soit  $\sigma_0 \in G$  et

$$R_p = \det [\text{Log } \sigma \tau^{-1} \epsilon]_{\substack{\sigma \neq \sigma_0 \\ \tau \neq \tau_0}}$$

le régulateur  $p$ -adique de  $K$ .

Le déterminant du groupe  $G$  est un polynôme divisible par

$\prod_{s \in G} X_s$ ; soit  $P(X_s)_{s \in G}$  le quotient :

$$P(X_s)_{s \in G} = \frac{\Delta_G}{\prod_{s \in G} X_s} = \det \begin{vmatrix} 1 & X_{s_1 s_0^{-1}} & \dots & X_{s_{g-1} s_0^{-1}} \\ 1 & X_e & \dots & X_{s_{g-1} s_1^{-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{s_1 s_{g-1}^{-1}} & \dots & X_e \end{vmatrix},$$

où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ . Si on développe  $P(\text{Log } s \epsilon)_{s \in G}$  par rapport à la première colonne, la relation :

$$\sum_{s \in G} \text{Log } s \epsilon = 0$$

montre que tous les cofacteurs sont égaux à  $R_p$ , d'où :

$$R_p = \frac{1}{g} P(\text{Log } s \epsilon)_{s \in G}.$$

2. - Dans le cas où  $G$  est abélien de groupe de caractères  $\mathcal{K}$ , on retrouve la relation :

$$R_p = \frac{1}{g} \sum_{\substack{\chi \in \mathcal{K} \\ \chi \neq \chi_0}} \overline{\chi(s)} \chi(s) \text{Log } s \varepsilon,$$

que Hasse ([6]) utilise pour donner une formule explicite du nombre de classes d'idéaux de  $K$ , et qui permet de calculer le rang  $p$ -adique du groupe des unités de  $K$  ([3]).

### III. - CARACTERES GENERALISES [4]

Soit  $\rho$  une représentation irréductible d'un groupe  $G$  fini,  $\chi$  son caractère,  $f$  son degré. Pour tout entier  $k \geq 1$ , on définit une fonction  $\chi(s_1, \dots, s_k)$  sur  $G^k$  à valeur dans  $\mathbb{C}$  par la formule de récurrence :

$$(4) \quad \chi(s, s_1, \dots, s_k) = \chi(s) \cdot \chi(s_1, \dots, s_k) - \sum_{i=1}^k \chi(s_1, \dots, s s_i, \dots, s_k).$$

Ainsi

$$\chi(s_1, s_2) = \chi(s_1) \chi(s_2) - \chi(s_1 s_2).$$

On aura alors, en désignant par  $e$  l'élément neutre de  $G$  :

$$\chi(e, s_1, \dots, s_k) = (f-k) \chi(s_1, \dots, s_k)$$

$$\chi(s_1, \dots, s_k) = 0 \quad \text{si } k > f.$$

PROPOSITION. - Soit  $\Phi_n$  le polynôme défini par la relation (2). On a :

$$(5) \quad \Phi_n = (-1)^f \sum_{s_1, \dots, s_f \in G} \chi_n(s_1, \dots, s_f) X_{s_1} \dots X_{s_f}.$$

Démonstration. D'après (4),  $(-1)^f \chi(s_1, \dots, s_f)$  est somme de  $f!$  produits.

D'autre part, pour chaque permutation des  $f$  symboles  $(s_1, \dots, s_f)$ , il y

a  $a_i$  cycles de  $i$  symboles avec

$$\sum_{i=1}^f i a_i = f.$$

Enfin on peut effectuer le produit

$$(-1)^{a_1 + \dots + a_f} S_{1,n}^{a_1} \dots S_{f,n}^{a_f}$$

de

$$\frac{f!}{\prod_{i=1}^f i^{a_i} a_i!} \quad \text{manières.}$$

D'où :

$$(5) \quad (-1)^f \sum_{s_1, \dots, s_f \in G} \chi(s_1, \dots, s_f) X_{s_1} \dots X_{s_f} =$$

$$= (-1)^f \sum_{\substack{\sum_{i=1}^f i a_i = f}} \frac{f!}{\prod_{k=1}^f k^{a_k} a_k!} S_{k,n}^{a_k}.$$

#### IV. - PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME

1. - LEMME 1. - Soient  $X = (X_s)_{s \in G}$  et  $Y = (Y_s)_{s \in G}$  deux systèmes de  
g indéterminées sur  $\mathbb{C}$ . On pose :

$$(6) \quad X * Y = \left( \sum_{tu=s} X_t Y_u \right)_{s \in G}.$$

On a alors :

$$(7) \quad A_G(X * Y) = A_G(X) \cdot A_G(Y),$$

et il existe une décomposition de  $\Delta_G$  en facteurs irréductibles  $\Phi$  tels que

$$(8) \quad \Phi(X * Y) = \Phi(X) \cdot \Phi(Y).$$

En effet, la relation (7) montre que  $\Phi(X * Y)$  est le produit d'une fonction  $\Lambda(X)$  ne dépendant que des variables  $X_s$  par une fonction  $M(Y)$  ne dépendant que des variables  $Y_t$ . Soit  $\varepsilon = (\delta_{s,e})_{s \in G}$  où

$$\delta_{s,e} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = e \\ 0 & \text{si } s \neq e \end{cases} \quad e \text{ élément neutre de } G.$$

On a :

$$\Phi(X) = \Lambda(X) M(\varepsilon)$$

et 
$$\Phi(Y) = M(Y) \Lambda(\varepsilon).$$

Comme  $A_G(\varepsilon) = 1$  (coefficient de  $X_e^G$ ), on peut choisir  $\Phi(\varepsilon) = 1$ , d'où  $\Lambda(\varepsilon) M(\varepsilon) = 1$ .

### Remarques

1 - La relation  $(X * Y) * Z = X * (Y * Z)$  permet de généraliser le lemme 1 de façon évidente.

2 - On définira  $X^{*n}$ , pour  $n$  entier positif, par la relation de récurrence :

$$X^{*n} = X^{*(n-1)} * X, \quad X^{*1} = X.$$

### 2. - LEMME 2. - Diviseurs de $\Delta_G$ du premier degré.

Soit  $P = \sum_{s \in G} a(s) X_s$  un polynôme homogène du premier degré qui divise  $\Delta_G$ , et tel que  $P(X * Y) = P(X) P(Y)$ .

1. Il existe une représentation irréductible de  $G$  de degré 1 et de caractère  $s \mapsto a(s)$ .

2.  $P^2$  ne divise pas  $\Delta_G$ .

Preuve. 1. La relation

$$(8) \quad P(X * Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

montre que l'on a  $a(st) = a(s)a(t)$  et  $a(e) = 1$ .

2. Le changement de variable  $Y_s = \chi(s) X_s$  nous ramène au cas où  $P = \sum_{s \in G} X_s$ . Or  $\frac{\Delta_G}{\sum_{s \in G} X_s}$  ne dépend que de  $X_s - X_t$ , donc  $(\sum_{s \in G} X_s)^2$  ne divise pas  $\Delta_G$ .

3. - Nous considérons dans toute la suite un diviseur  $\Phi$  de  $\Delta_G$ , irréductible, homogène, de degré  $f$ , tel que :

$$(8) \quad \Phi(X * Y) = \Phi(X) \cdot \Phi(Y) .$$

Soit  $\psi(s)$  le coefficient de  $X_e^{f-1}$  dans  $\frac{\partial \Phi}{\partial X_s}$ , pour tout  $s \in G$ .

LEMME 3. - La fonction  $\psi$  détermine complètement le polynôme  $\Phi$  :

$$\Phi(X) = (-1)^f \sum \prod_{i=1}^f \frac{(-1)^{a_i} S_i^{a_i}}{i^{a_i} a_i !}$$

où la somme du second membre est étendue à l'ensemble des familles

d'entiers naturels  $(a_1, \dots, a_f)$  tels que  $\sum_{i=1}^f i a_i = f$ , et où

$$S_k = \sum_{s_1, \dots, s_k} \psi(s_1, \dots, s_k) X_{s_1} \dots X_{s_k} .$$

Preuve. Soit  $\varepsilon = (\delta_{s,e})_{s \in G}$ . Pour une indéterminée  $u$ ,  $\Phi(X+u\varepsilon)$  est un polynôme en  $u$ . Soit  $(u+u_1) \dots (u+u_f)$  sa décomposition dans une clôture algébrique  $K$  de  $\mathbb{C}(X_s)_{s \in G}$ . Le coefficient de  $u^{f-1}$  dans  $\Phi(X+u\varepsilon)$  est  $\sum_{s \in G} \psi(s) X_s$ .

A tout polynôme  $P(T) = a(t+t_1) \dots (t+t_n) \in K(u)[t]$  on associe un système de  $n$  indéterminées :

$$P(X) = a(X+t_1 \varepsilon) * \dots * (X+t_n \varepsilon) .$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} \Phi(P(X)) &= \prod_{i=1}^n a \Phi(X+t_i \varepsilon) \\ &= \prod_{i=1}^n a \prod_{j=1}^f (t_i+u_j) = \prod_{j=1}^f P(u_j) . \end{aligned}$$

En particulier, pour  $P(t) = t^n + u$ , on obtient :

$$\Phi(X^{*n} + u \varepsilon) = \prod_{j=1}^f (u+u_j^n) .$$

En comparant les coefficients de  $u^{f-1}$  dans chaque membre, on a :

$$S_n = u_1^n + \dots + u_f^n = \sum_{s_1, \dots, s_n} \psi(s_1 \dots s_n) X_{s_1} \dots X_{s_n} .$$

Le produit  $u_1 \dots u_f$  se calcule à partir des fonctions  $S_1, \dots, S_f$ :

$$u_1 \dots u_f = (-1)^f \sum_{\substack{f \\ \sum_{i=1}^f i a_i = f}} \prod_{i=1}^f \left( -\frac{S_i}{i} \right)^{a_i} \times \frac{1}{a_i!}$$

d'où le lemme 3.

4. - LEMME 4. -  $\Phi^f$  divise  $\Delta_G$  et  $\Phi^{f+1}$  ne divise pas  $\Delta_G$ .

Démonstration. Le cas  $f = 1$  résulte du lemme 2. Nous allons examiner le cas  $f = 2$ ; la démonstration générale suit les mêmes principes et est exposée en détail dans [5].

Cas  $f = 2$ . On a :  $2\Phi = S_1^2 - S_2$ .

Soit  $\ell$  l'entier positif tel que  $\Phi^\ell$  divise  $\Delta_G$  et  $\Phi^{\ell+1}$  ne divise pas  $\Delta_G$ . La relation :

$$\psi(s_1, s_2, s_3) = 0 \quad \forall (s_1, s_2, s_3) \in G^3$$

s'écrit aussi :

$$(9) \quad \psi(s_1) \psi(s_2) \psi(s_3) - \psi(s_1) \psi(s_2 s_3) - \psi(s_2) \psi(s_1 s_3) - \psi(s_3) \psi(s_1, s_2) \\ + \psi(s_1 s_2 s_3) + \psi(s_1 s_3 s_2) = 0.$$

Soit  $t \in G$ . On effectue la somme des relations (9) correspondant aux couples  $(s_2, s_3) \in G^2$  tels que  $s_2 s_3 = t$ . D'où :

$$\frac{g}{\ell} \psi(s) \psi(t) - g \psi(s) \psi(t) - \frac{g}{\ell} \psi(st) - \frac{g}{\ell} \psi(st) + g \psi(st) \\ + \frac{g}{\ell} \psi(s) \psi(t) = 0.$$

D'où, pour  $f = 2$  :

$$\left( \frac{g}{\ell} - \frac{g}{f} \right) [\psi(s) \psi(t) - 2\psi(st)] = 0.$$

Si  $\ell \neq f$ , alors :  $\psi(s) \psi(t) = 2\psi(st)$ ,  $\forall (s, t) \in G^2$ , et  $S_1^2 = 2S_2$ ,

d'où  $4\Phi = S_1^2$  ce qui contredit l'irréductibilité de  $\Phi$ . Donc  $\ell = 2$ .



5. - LEMME 5. - La fonction  $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction centrale :

$$\psi(st) = \psi(ts)$$

pour tout  $s, t \in G$ .

Soit  $a \in G$  et  $Y^{(a)} = (Y_a \delta_{s,a})_{s \in G}$ , où :

$$\delta_{s,a} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = a. \\ 0 & \text{si } s \neq a. \end{cases}$$

On a, d'après (8),

$$Y_a^f \Phi(X_{s a^{-1}})_{s \in G} = \Phi(Y^{(a)}) \Phi(X_s)_{s \in G},$$

$$Y_a \Phi(X_{a^{-1} s})_{s \in G} = \Phi(Y^{(a)}) \Phi(X_s)_{s \in G}.$$

Donc :

$$\Phi(X_{st})_{s \in G} = \Phi(X_{ts})_{s \in G}, \quad \forall t \in G \text{ et } \forall s, t \in G.$$

6. - LEMME 6. -  $\psi$  est un caractère irréductible de degré  $f$  de  $G$ .

Le principe de la démonstration ([4] et [5]) que nous ne reproduisons pas, est le suivant :

Soient  $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_{r-1}$  les classes de conjugaisons de  $G$ . Comme  $\psi(s)$  ne dépend que de la classe de  $s$ , d'après le lemme 5, on définit :

$$\psi_\alpha = \psi(s) \text{ pour } s \in \mathcal{C}_\alpha.$$

Soit  $h_\alpha$  le nombre d'éléments de  $\mathcal{C}_\alpha$  et  $h_{\alpha\beta\gamma}$  le nombre de triplets  $(s_1, s_2, s_3) \in G^3$  tels que :

$$s_1 \in \mathcal{C}_\alpha, \quad s_2 \in \mathcal{C}_\beta, \quad s_3 \in \mathcal{C}_\gamma, \quad s_1 s_2 s_3 = e.$$

On établit alors la relation :

$$h_\alpha h_\beta \psi_\alpha \psi_\beta = f \sum_{\gamma=0}^{r-1} h_{\alpha\beta\gamma} \psi_\gamma$$

pour tout  $(\alpha, \beta)$ ,  $0 \leq \alpha \leq r-1$

$$0 \leq \beta \leq r-1.$$

D'après [5], il s'ensuit que  $\psi$  est un caractère irréductible de  $G$ .

### 7. - Fin de la démonstration du théorème.

La relation  $\sum f_n^2 = g$  ([7] §. 2. 4) et les lemmes 4, 5 et 6 établissent la décomposition :

$$(3) \quad \Delta_G = \prod_{n=1}^r \Phi_n^f$$

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI. - Eléments de Mathématiques. Livre II (Algèbre) ; ch. 8 (Modules et Anneaux semi-simples).
- [2] R. DEDEKIND. - Gesammelte Mathematische Werke. Aus Briefen am Frobenius. t. II, p. 414-442.
- [3] J. FRESNEL. - Rang p-adique du groupe des unités d'un corps de nombres. Sémin. Théorie des Nombres de Bordeaux, 1968-1969, exposé n°9.
- [4] G. FROBENIUS. - Über Gruppencharaktere. Berliner Sitzungsberichte (1896) p. 985-1021, gesammelte Abhandlungen Band III, p. 1-37.
- [5] G. FROBENIUS. - Über Primfactoren der Gruppendeteminante. Berliner Sitzungsber. (1896) p. 1343-1382. Gesammelte Abhandlungen Band III p. 38-77.
- [6] H. HASSE. - Über die Klassenzahl Abelscher Zahlkörper. Berlin; Academie Verlag, 1952.
- [7] J. P. SERRE. - Représentations linéaires des groupes finis. Hermann (1967). Coll. Méthodes.

---:---