

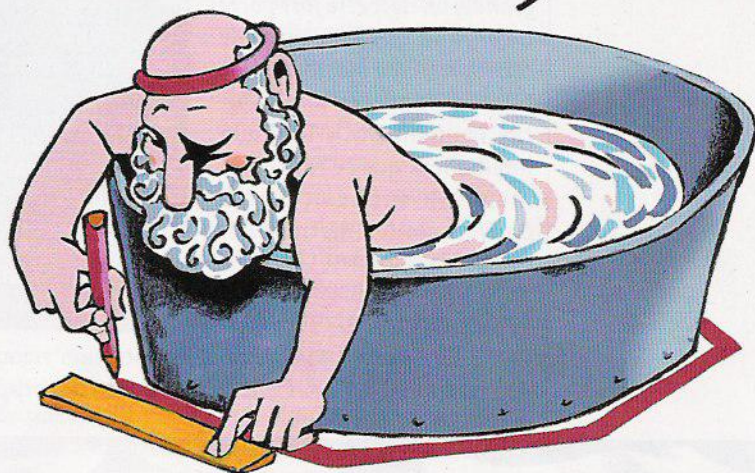
■ EN DEUX MOTS ■ Il y a plus de deux mille ans, les mathématiciens grecs posaient le problème de la quadrature du cercle. La preuve qu'il s'agit d'un problème impossible n'a été apportée qu'en 1882, par Ferdinand Lindemann. Entre-temps, on

a découvert que ce type de questions est directement lié à la nature des nombres. Pour la quadrature du cercle, le tout était de montrer que π n'est pas algébrique mais « transcendant ». Par la suite, la soif de mieux connaître π a amené

certains mathématiciens à défricher des pans nouveaux des mathématiques. L'étude de e^π par exemple conduit à une théorie aux applications importantes en informatique : l'approximation diophantienne.

La quadrature impossible du cercle

EURĒKA!!



À quoi π ressemble-t-il exactement? Peut-il s'écrire sous la forme d'une fraction? Est-il la solution d'une équation? Loin d'être anecdotiques, ces questions ont réclamé deux mille ans d'efforts aux mathématiciens. Et toutes les réponses n'ont pas encore été livrées.

Michel Waldschmidt est professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie à Paris et membre de l'Institut de mathématiques de Jussieu.
miw@math.jussieu.fr

« **C**'est la quadrature du cercle! » Cette expression commune permet de désigner un problème sans solution, une question dont on pense qu'elle n'a pas de réponse. Non sans raison: on sait depuis la fin du XIX^e siècle que le problème de la quadrature du cercle, posé par les mathématiciens grecs quelque deux mille ans plus tôt, n'a pas de solution exacte. On ne peut pas construire, avec la règle et le compas, un carré de même aire qu'un disque donné. Les géomètres grecs ne se limitaient pas aux constructions à la règle et au compas: ils disposaient d'autres outils, notamment des courbes appelées « quadratrices » grâce auxquelles ils pouvaient justement faire de telles constructions (voir figure p. 36). Mais ils n'en étaient pas moins intrigués par le fait qu'ils ne trouvaient pas de solution sans elles. Dès le XVIII^e siècle, les mathématiciens ont commencé à comprendre que la question de la quadrature du cercle

était intimement liée à une autre question, celle de la « nature arithmétique » du nombre π : peut-il s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers positifs? En d'autres termes, est-il « rationnel »? L'aire d'un cercle est directement reliée à π par la formule $A = \pi r^2$, et si π est rationnel, alors il sera facile de construire un carré dont l'aire est le nombre π .

Le premier à avoir apporté une réponse à la question « π est-il rationnel? » fut le mathématicien allemand Johann Heinrich Lambert, dans son *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques* daté de 1761 [1]. Voyons quelques éléments de sa démarche. Il commence par remarquer que la somme de la série

$$2/(1 \cdot 3) + 2/(3 \cdot 5) + 2/(5 \cdot 7) + 2/(7 \cdot 9) + \dots$$
 est égale à 1. Mais si l'on omet un terme sur deux:
$$2/(1 \cdot 3) + 2/(5 \cdot 7) + 2/(9 \cdot 11) + 2/(13 \cdot 15) + \dots$$
 on trouve $\pi/4$. ⇒

[1] J. Lambert, *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, 17, 265, 1768.

L'INDISPENSABLE NOMBRE π

→ TRANSCENDANCE

⇒ Lambert prit cette série pour définir le nombre $\pi/4$ et commenta ce résultat ainsi: « Si c'était une quantité rationnelle, on doit assez naturellement conclure qu'elle sera ou un nombre entier ou une fraction très simple... Mais, comme après la fraction $11/14$ trouvée par Archimède, qui ne donne qu'un à peu près, on passe à celle de Metius $355/452$ qui n'est pas non plus exacte, et dont les nombres sont considérablement plus grands, on doit être fort porté à conclure que la somme de cette suite, bien loin d'être une fraction simple, est une quantité irrationnelle. » Il ajouta lucidement que ce raisonnement ne suffirait pas à convaincre les mathématiciens de l'époque.



Irrationalité

Lambert entreprit alors une démonstration rigoureuse de l'irrationalité de π . Celle-ci fait appel à des propriétés

des fractions continues (lire « Les fractions continues », p. 37). Une des difficultés est que l'on ne connaît pas la fraction continue du nombre π . On peut en calculer les premiers termes, mais aussi loin qu'on aille, on ne trouve pas de régularité dans cette suite. L'idée originale de Lambert consiste à adapter aux fonctions les études arithmétiques qui portaient jusque-là sur les nombres. La notion de fraction continue, notamment, peut être adaptée aux fonctions. C'est avec elle que Lambert démontra rigoureusement le théorème: « Si x est un nombre rationnel non nul, la tangente de x est irrationnelle. En particulier, le nombre $\pi/4$, et donc le nombre π , est irrationnel. »

Pour arriver à ses fins, Lambert utilisa brillamment des propriétés de la fonction arctangente. De quoi s'agit-il? La tangente d'un nombre x compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$ est le quotient de son sinus par son cosinus: $\operatorname{tg} x = (\sin x)/(\cos x)$. Pour chaque nombre réel t il existe un unique nombre x dans l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$ tel que $t = \operatorname{tg} x$. Ce nombre x est l'arctangente de t et on écrit $x = \operatorname{arctg} t$. La fonction arctangente intervient pour écrire $\pi/4$ comme somme d'une série, et la fonction tangente est utilisée par son développement en fraction continue [2].

Cependant, l'irrationalité de π ne suffisait pas à interdire toute réponse à la quadrature du cercle. La solution n'en était pas moins déjà contenue dans la conclusion de l'article de Lambert: il y suggérait que non seulement π n'est pas rationnel mais qu'il n'est pas non plus algébrique [3].

Pour comprendre l'importance de cette précision, rappelons qu'un nombre algébrique est un nombre (réel ou complexe) x racine d'une équation polynomiale, c'est-à-dire qui satisfait une équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

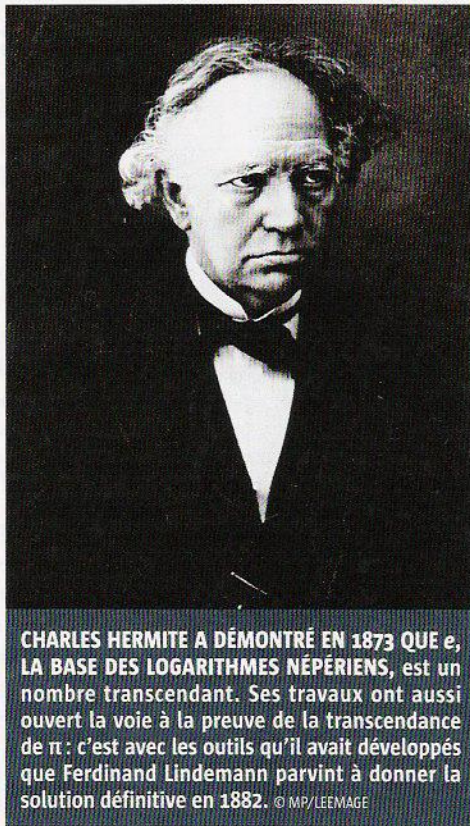
avec des entiers a_0, \dots, a_n qui ne sont pas tous nuls. Par exemple, un nombre rationnel est algébrique: en effet, si on l'écrit a/b avec a et b entiers, alors il est racine de l'équation $ax - b = 0$. Mais parmi les nombres algébriques il en existe qui sont irrationnels. Ainsi, le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est algébrique car il satisfait $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$. De même pour le nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, qui vérifie $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Les nombres qui ne sont pas algébriques sont les nombres transcendants.



JOHANN HEINRICH LAMBERT fut le premier à démontrer l'irrationalité de π . Sans toutefois le prouver, il suggéra aussi que π est transcendant, ce qui revenait à dire que la quadrature du cercle avec une règle et un compas est un problème impossible.

© COURTESY OF SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES, WASHINGTON, DC

En 1837, le Français Pierre Wantzel a rigoureusement établi le lien entre la nature arithmétique d'un nombre et la possibilité de le construire à la règle et au compas [2]. Les nombres « constructibles » sont tous algébriques (mais les nombres algébriques ne sont pas tous constructibles). Un nombre transcendant ne peut donc pas être construit à la règle et au compas. C'est pourquoi, une fois l'irrationalité de π démontrée et la notion de transcendance précisée, savoir si π est transcendant ou non a représenté un défi majeur pour les mathématiciens : c'était la clé pour montrer que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.



CHARLES HERMITE A DÉMONTRÉ EN 1873 QUE e , LA BASE DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS, est un nombre transcendant. Ses travaux ont aussi ouvert la voie à la preuve de la transcendance de π : c'est avec les outils qu'il avait développés que Ferdinand Lindemann parvint à donner la solution définitive en 1882. © MP/LEEMAGE

Théorème d'Hermite-Lindemann

Après avoir prouvé la transcendance du nombre e , en 1873, le Français Charles Hermite avait écrit à son ami allemand Carl Borchardt : « *Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre π . Que d'autres tentent l'entreprise; mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas que de leur coûter quelques efforts.* » Pourtant Hermite n'était pas loin du but. C'est en reprenant les outils qu'il avait développés que le mathématicien allemand Ferdinand Lindemann apporta la solution définitive en 1882 : Lambert avait bien deviné, le nombre π ne satisfait aucune équation algébrique; il est donc transcendant, et la quadrature du cercle avec la règle et le compas est un problème impossible.

Les formules d'Hermite jouent un rôle essentiel dans la démonstration de Lindemann. Un extrait d'une lettre de Lindemann à Hermite, publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* le 10 juillet 1882, se termine ainsi : « *Les logarithmes népériens de tous les nombres rationnels, l'unité seule exceptée, et de toutes les irrationnelles algébriques, sont des nombres transcendents.* » Cet énoncé est appelé aujourd'hui « Théorème d'Hermite-Lindemann ». Il contient la transcendance du nombre e : comme le logarithme de e , qui vaut 1, n'est pas transcendant, alors e n'est ni rationnel ni algébrique. Il contient aussi la transcendance du nombre π . En effet, la relation d'Euler $e^{i\pi} = -1$ signifie que $i\pi$ est un logarithme du nombre algébrique -1 ; il en résulte que $i\pi$ est transcendant. Or le produit de deux nombres algébriques est encore un nombre algébrique; si π était

algébrique, son produit par i serait encore algébrique; $i\pi$ étant transcendant, π est donc transcendant. La démonstration ne souffre pas la critique. Pourtant, aujourd'hui encore, quelques amateurs continuent de rechercher une solution : l'Académie des sciences a même dû prendre la décision formelle de ne plus accepter les preuves qui lui sont régulièrement soumises !

Indépendance algébrique

Il n'en reste pas moins que certains mathématiciens ne se satisfont pas de savoir que π est transcendant et cherchent à le connaître mieux encore. Pour cela, ils explorent ses relations avec d'autres nombres transcendents, au premier rang desquels e . C'est la question de l'indépendance algébrique. Par exemple, e^2 et e^3 sont transcendents (car e est transcendant) et reliés par une équation

$$\text{algébrique: } (e^2)^3 - (e^3)^2 = 0.$$

D'après une vieille conjecture – qui remonte au moins au début du XX^e siècle – e et π sont algébriquement \Leftrightarrow

[2] M. Serfati, *Fragments d'histoire des mathématiques IV*, APMEP, 86, 1992.

[3] P. Wantzel, *J. Math. Pures et Appl.*, 2, 366, 1837.

DÉVELOPPEMENT

Les fractions continues

POUR DÉTERMINER si un nombre est rationnel ou non, on peut regarder si son développement décimal (ou dans n'importe quelle autre base) est périodique ou non. Mais la plupart du temps, on ne connaît pas ce développement. Une autre solution est de regarder si le développement en fraction continue est fini.

Qu'est-ce qu'un développement en fraction continue ? Prenons un nombre réel x . On l'écrit $x = [x] + \{x\}$ où $[x]$ est un nombre entier (la « partie entière de x ») et $\{x\}$, un nombre réel dans l'intervalle $[0, 1[$ (la « partie fractionnaire de x »). Si x est entier, alors $x = [x]$ et $\{x\} = 0$. Sinon, on a $0 < \{x\} < 1$, et on pose $x_1 = 1/\{x\}$. On recommence la même pro-

cédure avec $x_1 : x_1 = [x_1] + \{x_1\}$. Seule différence, on sait que $[x_1] \geq 1$. Si x_1 est entier on s'arrête, sinon on pose $x_2 = 1/\{x_1\}$. Et ainsi de suite.

ON PEUT EXPLIQUER cette construction de façon géométrique. On décompose un rectangle de côtés 1 et x en le remplissant avec autant de carrés de côté 1 que possible. Si x n'est pas entier, il reste à la fin un petit rectangle de côtés 1 et $\{x\}$. On le remplit de carrés de côtés $\{x\}$, et s'il reste encore un plus petit rectangle on recommence. Si le processus finit par s'arrêter, c'est que x est rationnel. La réciproque est vraie (pour en savoir plus et pour la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, voir notre site www.larecherche.fr).

L'INDISPENSABLE NOMBRE π

→ TRANSCENDANCE

[4] Jean-Michel Muller et Marc Daumas. *Qualité des calculs sur ordinateur, vers des arithmétiques plus fiables*. Masson, 1997.

[5] Manfred R. Schroeder, *Springer Series in Information Sciences*, 7, Springer-Verlag, 1999.

⇒ indépendants; mais on ne sait pas le démontrer. Il est encore plus difficile de montrer que deux nombres sont algébriquement indépendants que de montrer qu'un nombre est transcendant! Nos connaissances dans ce domaine sont si pauvres que chaque progrès est pris comme un grand succès. C'est ce qui s'est passé en 1996 quand Yuri Nesterenko a démontré que π et e^π sont algébriquement indépendants. Sa démonstration reposait entre autres sur des arguments utilisant les « fonctions modulaires », élaborées l'année précédente par une équipe de recherche en théorie des nombres de l'université de Saint-Étienne. On déduit du théorème de Nesterenko que tout polynôme non constant en deux variables prend au point (π, e^π) une valeur transcendante. Ce résultat est d'autant plus étonnant qu'on ne sait même pas démontrer l'irrationalité d'un nombre comme le produit $e\pi$! Mais l'indépendance algébrique de e et π reste toujours une conjecture...

Dans ce problème, on peut s'étonner du fait que le couple (π, e^π) soit plus facile à appréhender que le couple (π, e) . L'explication vient de la relation d'Euler $e^{i\pi} = -1$, qui, comme nous l'avons vu, fait apparaître le nombre $i\pi$ comme un logarithme d'un nombre algébrique. C'était déjà grâce à cette relation que le mathématicien russe Alexandre O. Gel'fond avait pu démontrer la transcendance du nombre e^π en 1929. Par la suite, l'étude de e^π a elle aussi apporté son lot de surprises. Elle débouche notamment sur un vieux problème



ALEXANDRE O. GEL'FOND montra en 1929 que e^π est un nombre transcendant. Ses travaux l'ont conduit ensuite de façon inattendue à explorer la théorie de l'approximation diophantienne. © DR

lié à l'approximation de π : l'« approximation diophantienne ».

En effet, la démonstration de la transcendance de e^π n'était rien de moins qu'une réponse partielle au septième des 23 problèmes que David Hilbert avait posés au congrès international des mathématiciens à Paris en 1900! Dans ce problème, Hilbert invitait à montrer que tout nombre de la forme a^b , avec a et b algébriques, a différent de 0 et de 1, et b irrationnel, est transcendant. Hilbert donnait deux exemples: le nombre $2^{\sqrt{2}}$, que l'on obtient en prenant $a = 2$ et $b = \sqrt{2}$, et le nombre e^π dont la transcendance se déduit en utilisant la relation d'Euler $e^{i\pi} = -1$: on l'écrit $e^\pi = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$, ce qui permet de prendre $a = -1$, $b = -i$.

Alors qu'il était parti d'un problème théorique et abstrait (la question de transcendance posée par Hilbert), Gel'fond remarqua que sa preuve lui permettait non seulement de montrer que tout nombre a^b est transcendant, mais aussi de minorer la distance de ce nombre à un nombre algébrique. Ce sont ces minoration qui font partie de la théorie de l'approximation diophantienne.

La maîtrise des arrondis

On retrouve notamment cette théorie en informatique [4]. Les ordinateurs ne connaissent que des nombres rationnels (et ils n'en connaissent même qu'un nombre fini); tous les calculs doivent donc être arrondis. Les questions d'arrondi pour les opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division) sont bien maîtrisées. Mais quand on fait intervenir des fonctions comme l'exponentielle, le logarithme ou les fonctions trigonométriques, on doit, pour arrondir proprement, connaître des informations sur l'approximation diophantienne de quantités transcendentes. C'est ainsi que des minoration de $|e^b - a|$, quand a et b sont deux nombres rationnels positifs, interviennent dans ces problèmes d'informatique. Mais ce n'est qu'un exemple parmi tant d'autres: on retrouve encore ces approximations en mécanique céleste, dans les phénomènes de résonance, dans les quasi-cristaux ou encore en acoustique [5].

Les outils permettant de résoudre les problèmes posés en approximation diophantienne sont essentiellement les mêmes que ceux qui sont utilisés pour déterminer si un nombre est algébrique ou transcendant. La théorie que nous avons introduite en prenant π comme modèle va bien au-delà de ce nombre fascinant: π n'est en fin de compte qu'un des éléments les plus représentatifs parmi les nombres dont les propriétés diophantiennes font l'objet de recherches théoriques approfondies. ■ M. W.

EQUATIONS

Questions diophantiennes

■ LE MATHÉMATICIEN GREC Diophante d'Alexandrie ramenait ses questions de géométrie à des équations polynomiales à coefficients entiers entre plusieurs inconnues, les « équations diophantiennes ». La notion a été progressivement étendue. Ainsi, on parle aujourd'hui d'« équation diophantienne exponentielle » lorsque l'on évoque une équation polynomiale dans laquelle certains exposants sont inconnus. Le théorème de Wiles, qui répond au problème de Fermat, peut être énoncé comme un résultat sur l'équation diophantienne exponentielle $X^n + Y^n = Z^n$, où les inconnues sont les entiers X, Y, Z et n , avec $n \geq 3$. Parmi les autres équations

diophantiennes exponentielles, citons celle de Catalan $X^p - Y^q = 1$ dont on sait depuis 2002 seulement qu'elle n'a pas d'autre solution que $x = 3, p = 2, y = 2, q = 3$ - le problème avait été posé par Eugène Catalan en 1844, l'année même où Liouville construisait le premier exemple de nombre transcendant. Déterminer si un nombre réel donné x est rationnel ou non est un problème diophantien puisqu'il s'agit aussi de dire si l'équation $ax = b$ a une solution en entiers rationnels (a, b) autre que $(0, 0)$. Plus généralement, déterminer si un nombre complexe est algébrique ou transcendant est encore un problème diophantien.