Lycée Jules Verne, Limours, 25 Avril 2007

L'infini en mathématiques

Michel Waldschmidt

http ://www.math.jussieu.fr/∼miw/

Achille et la tortue

Paradoxe de Zénon d'Élée (Vème siècle avant J.C.) :
divisibilité à l'infini d'un segment de droite

$0 \quad 1$

$0 \quad 1/2 \quad 1$

$0 \quad 1/2 \quad 3/4 \quad 1$

$0 \quad 1/2 \quad 3/4 \quad 7/8 \quad 1$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Paradoxe de Zénon d'Élée (Vème siècle avant J.C.) : divisibilité à l'infini d'un segment de droite

0 ______________________________ 1

0 ______________ 1/2 ______________ 1

0 ______________ 1/2 _______ 3/4 _______ 1

0 ______________ 1/2 _______ 3/4 ___ 7/8 ___ 1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Achille et la tortue

Paradoxe de Zénon d'Élée (Vème siècle avant J.C.) : divisibilité à l'infini d'un segment de droite

0	________							1
0	________	1/2	________					1
0	________	1/2	____	3/4			____	1
0	________	1/2	____	3/4	__	7/8	__	1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Paradoxe de Zénon d'Élée (Vème siècle avant J.C.) : divisibilité à l'infini d'un segment de droite

0 ____ 1

0 ____________________ 1/2 ____________________ 1

0 ____________________ 1/2 _________ 3/4 _________ 1

0 ____________________ 1/2 _________ 3/4 ____ 7/8 ____ 1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Achille et la tortue

Paradoxe de Zénon d'Élée (Vème siècle avant J.C.) :
divisibilité à l'infini d'un segment de droite

0 ______________________________ 1

0 _______________ 1/2 _______________ 1

0 _______________ 1/2 _______ 3/4 _______ 1

0 _______________ 1/2 _______ 3/4 ___ 7/8 ___ 1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Achille et la tortue

Paradoxe de Zénon d'Élée (Vème siècle avant J.C.) : divisibilité à l'infini d'un segment de droite

0 ________________________________ 1

0 ________________ 1/2 ________________ 1

0 ________________ 1/2 ________ 3/4 ________ 1

0 ________________ 1/2 ________ 3/4 ___ 7/8 ___ 1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

La préhistoire (suite)

- Pythagoriciens (VIème siècle avant J.C.)
  incommensurabilité de la diagonale du carré

- Eudoxe (début du IVème siècle avant J.C.)
  théorie des proportions

- Aristote (IVème siècle avant J.C.)
  le continu est divisible à l'infini *en puissance*

- Archimède (IIIème siècle avant J.C.)
  rectification et quadrature

La préhistoire (suite)

- Pythagoriciens (VIème siècle avant J.C.)
  incommensurabilité de la diagonale du carré
- Eudoxe (début du IVème siècle avant J.C.)
  théorie des proportions
- Aristote (IVème siècle avant J.C.)
  le continu est divisible à l'infini *en puissance*
- Archimède (IIIème siècle avant J.C.)
  rectification et quadrature

La préhistoire (suite)

- Pythagoriciens (VIème siècle avant J.C.)
  incommensurabilité de la diagonale du carré

- Eudoxe (début du IVème siècle avant J.C.)
  théorie des proportions

- Aristote (IVème siècle avant J.C.)
  le continu est divisible à l'infini *en puissance*

- Archimède (IIIème siècle avant J.C.)
  rectification et quadrature

La préhistoire (suite)

- Pythagoriciens (VIème siècle avant J.C.)
  incommensurabilité de la diagonale du carré
- Eudoxe (début du IVème siècle avant J.C.)
  théorie des proportions
- Aristote (IVème siècle avant J.C.)
  le continu est divisible à l'infini *en puissance*
- Archimède (IIIème siècle avant J.C.)
  rectification et quadrature

Infini potentiel et infini actuel

Aristote : *L'infini, c'est ce qui ne se laisse pas parcourir, qui n'a pas de limite*

Euclide : *le tout est plus grand que l'une quelconque de ses parties* (premier livre des éléments)

Pappus (300 après J.C.)
Proclus (5è siècle après J.C.)
Al Kindi (9ème siècle)
Al Nayrisi, Thabit ibn Qurra, Avicenne ($\sim$1000 après J.C.)
Thabit ibn Qurra : *il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs : exemple d'égalité de deux infinis*

Y a-t-il un infini ou plusieurs ? Peut-on les comparer ? Un infini peut-il être plus grand qu'un autre ?

Infini potentiel et infini actuel

Aristote : *L'infini, c'est ce qui ne se laisse pas parcourir, qui n'a pas de limite*
Euclide : *le tout est plus grand que l'une quelconque de ses parties* (premier livre des éléments)

Pappus (300 après J.C.)
Proclus (5è siècle après J.C.)
Al Kindi (9ème siècle)
Al Nayrisi, Thabit ibn Qurra, Avicenne (∼1000 après J.C.)
Thabit ibn Qurra : *il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs : exemple d'égalité de deux infinis*

Y a-t-il un infini ou plusieurs ? Peut-on les comparer ?
Un infini peut-il être plus grand qu'un autre ?

Infini potentiel et infini actuel

Aristote : *L'infini, c'est ce qui ne se laisse pas parcourir, qui n'a pas de limite*
Euclide : *le tout est plus grand que l'une quelconque de ses parties* (premier livre des éléments)

Pappus (300 après J.C.)
Proclus (5è siècle après J.C.)
Al Kindi (9ème siècle)
Al Nayrisi, Thabit ibn Qurra, Avicenne ($\sim$1000 après J.C.)
Thabit ibn Qurra : *il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs : exemple d'égalité de deux infinis*

Y a-t-il un infini ou plusieurs ? Peut-on les comparer ?
Un infini peut-il être plus grand qu'un autre ?

Infini potentiel et infini actuel

Aristote : *L'infini, c'est ce qui ne se laisse pas parcourir, qui n'a pas de limite*
Euclide : *le tout est plus grand que l'une quelconque de ses parties* (premier livre des éléments)

Pappus (300 après J.C.)
Proclus (5è siècle après J.C.)
Al Kindi (9ème siècle)
Al Nayrisi, Thabit ibn Qurra, Avicenne (∼1000 après J.C.)
Thabit ibn Qurra : *il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs : exemple d'égalité de deux infinis*

Y a-t-il un infini ou plusieurs ? Peut-on les comparer ?
Un infini peut-il être plus grand qu'un autre ?

Infini potentiel et infini actuel

Aristote : *L'infini, c'est ce qui ne se laisse pas parcourir, qui n'a pas de limite*
Euclide : *le tout est plus grand que l'une quelconque de ses parties* (premier livre des éléments)

Pappus (300 après J.C.)
Proclus (5è siècle après J.C.)
Al Kindi (9ème siècle)
Al Nayrisi, Thabit ibn Qurra, Avicenne (∼1000 après J.C.)
Thabit ibn Qurra : *il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs : exemple d'égalité de deux infinis*

Y a-t-il un infini ou plusieurs ? Peut-on les comparer ?
Un infini peut-il être plus grand qu'un autre ?

Infini potentiel et infini actuel

Aristote : *L'infini, c'est ce qui ne se laisse pas parcourir, qui n'a pas de limite*
Euclide : *le tout est plus grand que l'une quelconque de ses parties* (premier livre des éléments)

Pappus (300 après J.C.)
Proclus (5è siècle après J.C.)
Al Kindi (9ème siècle)
Al Nayrisi, Thabit ibn Qurra, Avicenne (∼1000 après J.C.)
Thabit ibn Qurra : *il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs : exemple d'égalité de deux infinis*

Y a-t-il un infini ou plusieurs ? Peut-on les comparer ?
Un infini peut-il être plus grand qu'un autre ?

Analyse infinitésimale

Leibniz (1646–1716) :

Le calcul infinitésimal,

auxiliaire de calcul

Analyse des infinis

Leonhard Euler

(15 Avril 1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

Les paradoxes de l'infini

Bolzano (1781–1848) :

existence positive de l'infini actuel.

Construction d'un concept
purement mathématique

et calcul systématique de l'infini actuel

Georges Cantor (1845–1918)

Introduction du concept de *nombre infini.*

1874 : les nombres réels algébriques sont dénombrables, pas les nombres réels.

Il y a une bijection entre l'ensemble des points du carré $[0,1] \times [0,1]$ et ceux de l'intervalle $[0,1]$.

Pour tout ensemble infini E, l'ensemble des parties de E a une puissance supérieure à celle de E.

Georges Cantor (1845–1918)

Introduction du concept de *nombre infini.*

1874 : les nombres réels algébriques sont dénombrables, pas les nombres réels.

Il y a une bijection entre l'ensemble des points du carré $[0,1] \times [0,1]$ et ceux de l'intervalle $[0,1]$.

Pour tout ensemble infini E, l'ensemble des parties de E a une puissance supérieure à celle de E.

Georges Cantor (1845–1918)

Introduction du concept de *nombre infini.*

1874 : les nombres réels algébriques sont dénombrables, pas les nombres réels.

Il y a une bijection entre l'ensemble des points du carré $[0,1] \times [0,1]$ et ceux de l'intervalle $[0,1]$.

Pour tout ensemble infini E, l'ensemble des parties de E a une puissance supérieure à celle de E.

Georges Cantor (1845–1918)

Introduction du concept de *nombre infini.*

1874 : les nombres réels algébriques sont dénombrables, pas les nombres réels.

Il y a une bijection entre l'ensemble des points du carré $[0,1] \times [0,1]$ et ceux de l'intervalle $[0,1]$.

Pour tout ensemble infini E, l'ensemble des parties de E a une puissance supérieure à celle de E.

Développements en base 10 et en base 2

Le nombre π
en base 10 : $3.14159265358979323846264338327 6\ldots$
en base 2 : $11.001001000011111101101010100010\ldots$

Le nombre $\sqrt{2}$
en base 10 : $1.4142135623730950488016887242 09\ldots$
en base 2 : $1.0110101000001001111001100110011\ldots$

http ://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

Développements en base 10 et en base 2

Le nombre π
en base 10 : $3.14159265358979323846264338327 6\ldots$
en base 2 : $11.001001000011111101101010100010\ldots$

Le nombre $\sqrt{2}$
en base 10 : $1.41421356237309504880168872420 9\ldots$
en base 2 : $1.0110101000001001111001100110011\ldots$

http ://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

Développements en base 10 et en base 2

Le nombre π
en base 10 : $3.14159265358979323846264338327 6\ldots$
en base 2 : $11.001001000011111101101010100010\ldots$

Le nombre $\sqrt{2}$
en base 10 : $1.41421356237309504880168872420 9\ldots$
en base 2 : $1.0110101000001001111001100110011\ldots$

http ://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

Développement binaire d'un nombre réel $0 \leq x < 1$

- Un nombre réel de l'intervalle $[0, 1)$ a un développement binaire

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16} + \cdots$$

avec $a_i \in \{0, 1\}$.

- Chaque suite $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots$ formée de 0 et de 1 correspond à un nombre réel bien défini $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots$

Développement binaire d'un nombre réel $0 \leq x < 1$

- Un nombre réel de l'intervalle $[0, 1)$ a un développement binaire

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16} + \cdots$$

  avec $a_i \in \{0, 1\}$.
- Chaque suite $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots$ formée de 0 et de 1 correspond à un nombre réel bien défini $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots$

Développement binaire d'un nombre réel $0 \leq x < 1$ (suite)

Mais les nombres dont un dénominateur est une puissance de 2 possèdent deux développements binaires, comme

$$0,011111\cdots = 0,100000\cdots = \frac{1}{2}$$

qui exprime la relation

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2}\cdot$$

Essai de numérotation des nombres réels $0 \le x \le 1$

- Si on essaye de numéroter les nombres réels

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

on en oublie forcément :

-
$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots\\
x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots\\
x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots\\
x_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\ldots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Essai de numérotation des nombres réels $0 \leq x \leq 1$

- Si on essaye de numéroter les nombres réels

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

  on en oublie forcément :

- $$\begin{aligned} x_1 &= 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots \\ x_2 &= 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots \\ x_3 &= 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots \\ x_4 &= 0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Procédé diagonal de Cantor

- $$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots \\ x_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots \\ x_5 &= 0, a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

- On pose
$$b_n = 1 - a_{nn} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{nn} = 0 \\ 0 & \text{si } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

- Alors le nombre $0, b_1b_2b_3b_4\dots$ ne figure pas dans la liste.

Procédé diagonal de Cantor

- $$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots \\ x_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\ldots \\ x_5 &= 0, a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

- On pose
$$b_n = 1 - a_{nn} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{nn} = 0 \\ 0 & \text{si } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

- Alors le nombre $0, b_1b_2b_3b_4\ldots$ ne figure pas dans la liste.

Procédé diagonal de Cantor

- $$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots \\ x_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots \\ x_5 &= 0, a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

- On pose
$$b_n = 1 - a_{nn} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{nn} = 0 \\ 0 & \text{si } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

- Alors le nombre $0, b_1b_2b_3b_4\dots$ ne figure pas dans la liste.

L'infini dénombrable

- Les entiers pairs forment un ensemble infini dénombrable : on peut les numéroter.
- Tout sous-ensemble infini de l'ensemble des entiers est dénombrable.

L'infini dénombrable

- Les entiers pairs forment un ensemble infini dénombrable : on peut les numéroter.
- Tout sous-ensemble infini de l'ensemble des entiers est dénombrable.

L'infini dénombrable

Les couples d'entiers forment un ensemble dénombrable (une *double infinité* ne contient pas plus d'éléments qu'une simple infinité) :
on peut numéroter les éléments du tableau

$$\begin{matrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots \\ \vdots \end{matrix}$$

par

$$a_{11}\ a_{12}a_{21}\ a_{13}a_{22}a_{31}\ a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\ a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}\dots$$

L'infini dénombrable

Les couples d'entiers forment un ensemble dénombrable (une *double infinité* ne contient pas plus d'éléments qu'une simple infinité) :
on peut numéroter les éléments du tableau

$$
\begin{array}{c}
a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots\\
a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots\\
a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots\\
a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots\\
\vdots
\end{array}
$$

par

$$a_{11}\ a_{12}a_{21}\ a_{13}a_{22}a_{31}\ a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\ a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}\dots$$

Notion de dimension

Point (dimension 0), courbes (dimension 1), surfaces (dimension 2), volumes (dimension 3).

Si on parcourt une courbe, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x fois plus.

Si on parcourt une surface, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^2 fois plus.

Si on parcourt un volume, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^3 fois plus.

Dimension fractale

Objets fractals ; autosimilarité

Longueur de la côte de Bretagne

Notion de dimension

Point (dimension 0), courbes (dimension 1), surfaces (dimension 2), volumes (dimension 3).

Si on parcourt une courbe, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x fois plus.

Si on parcourt une surface, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^2 fois plus.

Si on parcourt un volume, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^3 fois plus.

Dimension fractale

Objets fractals ; autosimilarité

Longueur de la côte de Bretagne

Notion de dimension

Point (dimension 0), courbes (dimension 1), surfaces (dimension 2), volumes (dimension 3).

Si on parcourt une courbe, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x fois plus.

Si on parcourt une surface, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^2 fois plus.

Si on parcourt un volume, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^3 fois plus.

Dimension fractale

Objets fractals ; autosimilarité

Longueur de la côte de Bretagne

Notion de dimension

Point (dimension 0), courbes (dimension 1), surfaces (dimension 2), volumes (dimension 3).

Si on parcourt une courbe, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x fois plus.

Si on parcourt une surface, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^2 fois plus.

Si on parcourt un volume, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^3 fois plus.

Dimension fractale

Objets fractals ; autosimilarité

Longueur de la côte de Bretagne

Notion de dimension

Point (dimension 0), courbes (dimension 1), surfaces (dimension 2), volumes (dimension 3).

Si on parcourt une courbe, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x fois plus.

Si on parcourt une surface, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^2 fois plus.

Si on parcourt un volume, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^3 fois plus.

Dimension fractale

Objets fractals ; autosimilarité

Longueur de la côte de Bretagne

Notion de dimension

Point (dimension 0), courbes (dimension 1), surfaces (dimension 2), volumes (dimension 3).

Si on parcourt une courbe, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x fois plus.

Si on parcourt une surface, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^2 fois plus.

Si on parcourt un volume, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^3 fois plus.

Dimension fractale

Objets fractals ; autosimilarité

Longueur de la côte de Bretagne

Notion de dimension

Point (dimension 0), courbes (dimension 1), surfaces (dimension 2), volumes (dimension 3).

Si on parcourt une courbe, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x fois plus.

Si on parcourt une surface, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^2 fois plus.

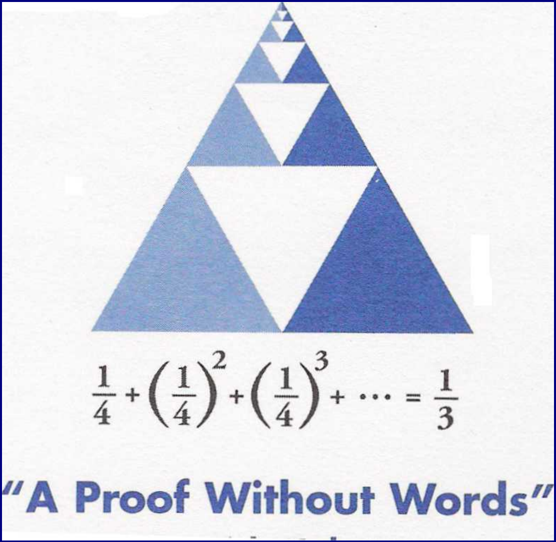
Si on parcourt un volume, quand on fait des pas x fois plus petits, il faut en faire x^3 fois plus.

Dimension fractale

Objets fractals ; autosimilarité

Longueur de la côte de Bretagne

Une démonstration silencieuse



Triangles de Sierpinski sur un coquillage

Séries géométriques

- Soit a un nombre réel et n un entier. On considère la somme de n termes

$$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

- Par exemple

$$\begin{aligned} S_7(2) &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 \\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 \\ &= 254. \end{aligned}$$

- Un autre exemple est $S_n(1) = n$ pour tout n.

Séries géométriques

- Soit a un nombre réel et n un entier. On considère la somme de n termes

$$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

- Par exemple

$$\begin{aligned} S_7(2) &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 \\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 \\ &= 254. \end{aligned}$$

- Un autre exemple est $S_n(1) = n$ pour tout n.

Séries géométriques

- Soit a un nombre réel et n un entier. On considère la somme de n termes

$$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

- Par exemple

$$\begin{aligned} S_7(2) &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 \\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 \\ &= 254. \end{aligned}$$

- Un autre exemple est $S_n(1) = n$ pour tout n.

Série géométrique

$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$

- On écrit aussi

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} a^k$$

avec $a^1 = a$.

- **Formule :** pour $a \neq 1$,

$$\boxed{S_n(a) = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}.}$$

- Exemple :

$$S_7(2) = \frac{2^8 - 2}{2 - 1} = 256 - 2 = 254.$$

Série géométrique

$$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

- On écrit aussi
$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} a^k$$
avec $a^1 = a$.
- **Formule :** pour $a \neq 1$,
$$\boxed{S_n(a) = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}.}$$
- Exemple :
$$S_7(2) = \frac{2^8 - 2}{2 - 1} = 256 - 2 = 254.$$

Série géométrique

$$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

- On écrit aussi
$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} a^k$$
avec $a^1 = a$.
- **Formule :** pour $a \neq 1$,
$$\boxed{S_n(a) = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}.}$$
- Exemple :
$$S_7(2) = \frac{2^8 - 2}{2 - 1} = 256 - 2 = 254.$$

Somme de la série $S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$

Démonstration

- $$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$
- On multiplie par a :
$$aS_n(a) = a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n+1}$$
- On soustrait :
$$(a-1)S_n(a) = a^{n+1} - a$$
- D'où (pour $a \neq 1$) :
$$S_n(a) = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}.$$

Somme de la série $S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$

Démonstration

- $$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$
- On multiplie par a :
$$aS_n(a) = a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n+1}$$
- On soustrait :
$$(a-1)S_n(a) = a^{n+1} - a$$
- D'où (pour $a \neq 1$) :
$$S_n(a) = \frac{a^{n+1} - a}{a-1}.$$

Somme de la série $S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$

Démonstration

- $$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$
- On multiplie par a :
$$aS_n(a) = a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n+1}$$
- On soustrait :
$$(a-1)S_n(a) = a^{n+1} - a$$
- D'où (pour $a \neq 1$) :
$$S_n(a) = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}.$$

Somme de la série $S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$

Démonstration

- $$S_n(a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$
- On multiplie par a :
$$aS_n(a) = a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n+1}$$
- On soustrait :
$$(a-1)S_n(a) = a^{n+1} - a$$
- D'où (pour $a \neq 1$) :
$$S_n(a) = \frac{a^{n+1} - a}{a-1}.$$

Exemple :
$S_n(1/2) = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^n$

Quand $a < 1$ on écrit la formule

$$S_n(a) = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}\cdot$$

- Prenons $a = 1/2$:

$$S_n(1/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

- Comme $1 - a = 1/2$ on trouve

$$\boxed{S_n(1/2) = 1 - \frac{1}{2^n}\cdot}$$

Exemple : $S_n(1/2) = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^n$

Quand $a < 1$ on écrit la formule

$$S_n(a) = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}\cdot$$

- Prenons $a = 1/2$:

$$S_n(1/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

- Comme $1 - a = 1/2$ on trouve

$$\boxed{S_n(1/2) = 1 - \frac{1}{2^n}\cdot}$$

$$S_n(a) = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}$$

Autre exemple

Prenons $a = 1/4$:

$$S_n(1/4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4^n}$$

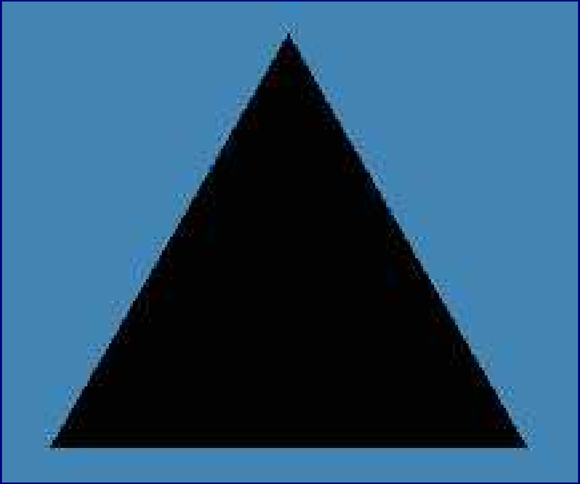
Alors $1 - a = 3/4$ et

$$\boxed{S_n(1/4) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \cdot}$$

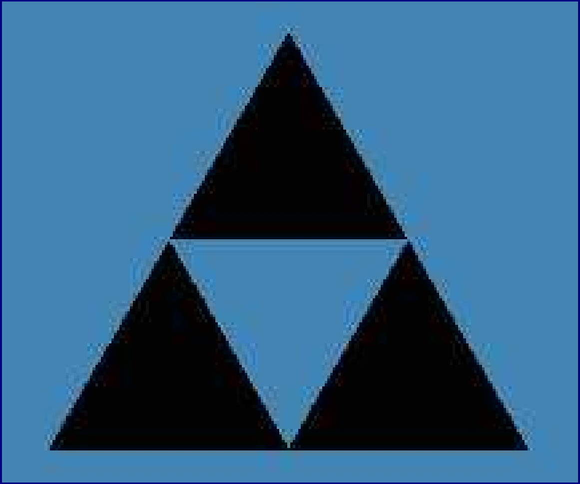
Ainsi

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$$

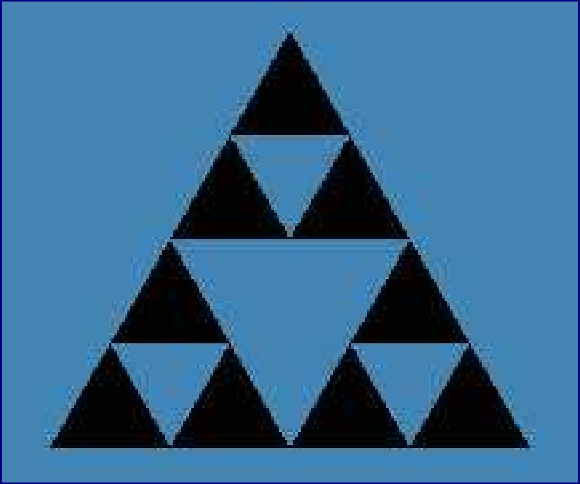
Sierpinski Gasket



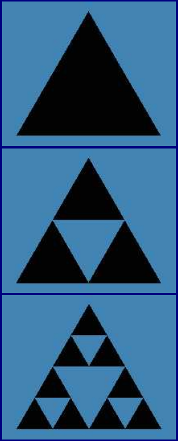
Sierpinski Gasket



Sierpinski Gasket



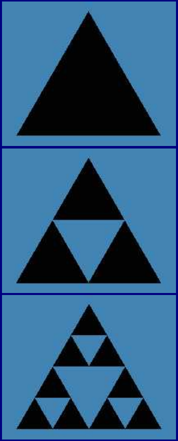
Sierpinski Gasket



Si on diminue la longueur
du côté du triangle
par un coefficient 2,
le nombre de petits triangles noirs
est 3 fois plus grand.
La dimension fractale est $1,5849\ldots$
car $2^{1,5849\ldots} = 3$:

$$\frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849\ldots$$

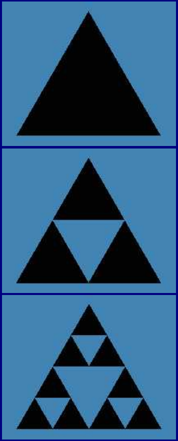
Sierpinski Gasket



Si on diminue la longueur
du côté du triangle
par un coefficient 2,
le nombre de petits triangles noirs
est 3 fois plus grand.
La dimension fractale est $1,5849\ldots$
car $2^{1,5849\ldots} = 3$:

$$\frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849\ldots$$

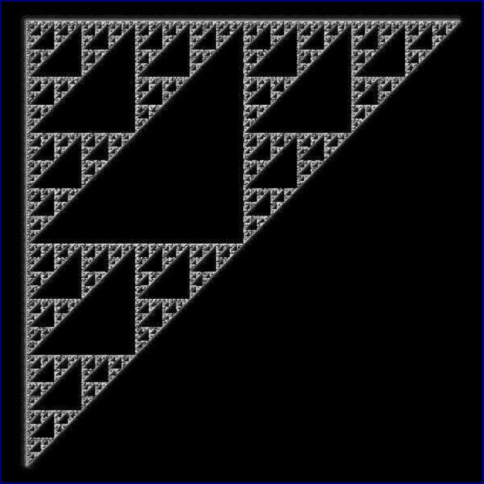
Sierpinski Gasket



Si on diminue la longueur
du côté du triangle
par un coefficient 2,
le nombre de petits triangles noirs
est 3 fois plus grand.
La dimension fractale est $1,5849\ldots$
car $2^{1,5849\ldots} = 3$:

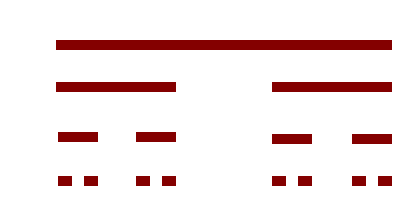
$$\frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849\ldots$$

Sierpinski Gasket



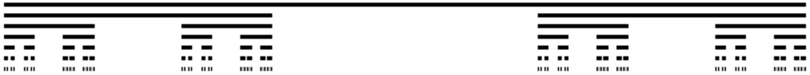
Ensemble triadique de Cantor

Les trois premières étapes



Ensemble triadique de Cantor

Les six premières étapes

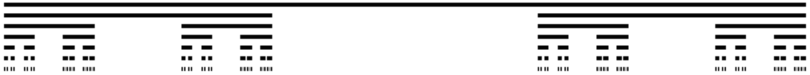


Quand on fait des pas 3 fois plus petit, il faut en faire 2 fois plus pour parcourir l'ensemble.
La dimension fractale est $0,6309\ldots$ car $3^{0,6309\ldots} = 2$.

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\ldots$$

Ensemble triadique de Cantor

Les six premières étapes



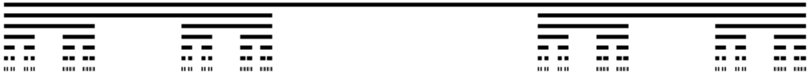
Quand on fait des pas 3 fois plus petit, il faut en faire 2 fois plus pour parcourir l'ensemble.

La dimension fractale est $0,6309\ldots$ car $3^{0,6309\ldots} = 2$.

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\ldots$$

Ensemble triadique de Cantor

Les six premières étapes

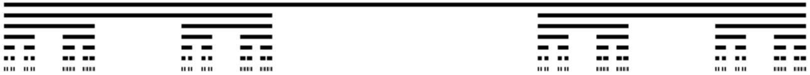


Quand on fait des pas 3 fois plus petit, il faut en faire 2 fois plus pour parcourir l'ensemble.
La dimension fractale est $0,6309\ldots$ car $3^{0,6309\ldots} = 2$.

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\ldots$$

Ensemble triadique de Cantor

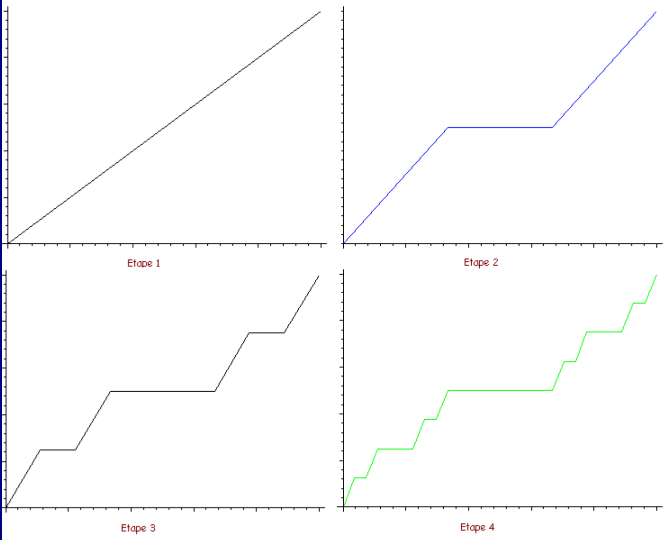
Les six premières étapes



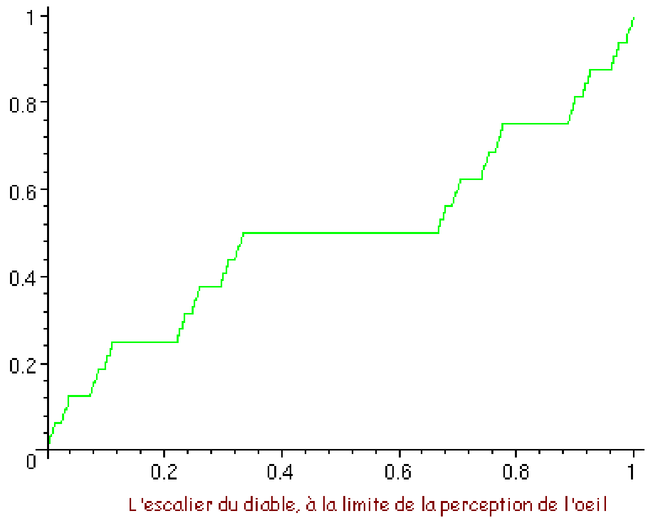
Quand on fait des pas 3 fois plus petit, il faut en faire 2 fois plus pour parcourir l'ensemble.
La dimension fractale est $0,6309\ldots$ car $3^{0,6309\ldots} = 2$.

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\ldots$$

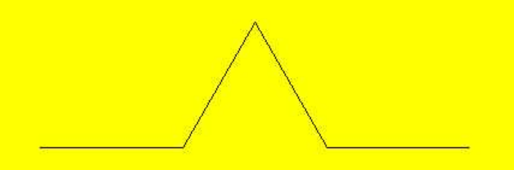
L'escalier du diable



L'escalier du diable



Flocon de Von Koch



Flocon de Von Koch

Flocon de Von Koch

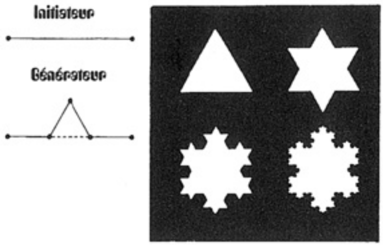
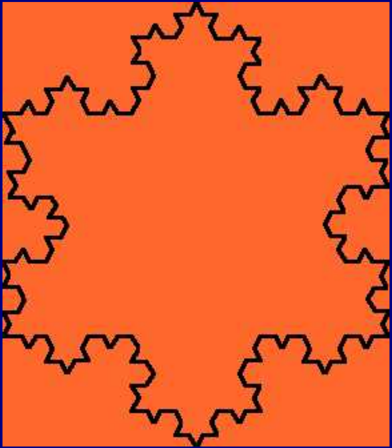


Figure 0.6 L'application successive du générateur aux côtés d'un triangle (un initiateur) crée un flocon de neige aux bords découpés dans lequel le triangle se répète à des échelles de plus en plus petites.

Flocon de Von Koch



Flocon de Von Koch

Stade 0 : triangle, 3 côtés de longueur 1, périmètre 3, aire $\sqrt{3}/4$.

Stade 1 : 3×4 côtés de longueur $1/3$, périmètre $3 \times 4/3 = 4$,

Stade 2 : $3 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade 3 : $3 \times 4 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade n : 3×4^n côtés de longueur $(1/3)^n$, périmètre $4 \times (4/3)^n$.

Flocon de Von Koch

Stade 0 : triangle, 3 côtés de longueur 1, périmètre 3, aire $\sqrt{3}/4$.

Stade 1 : 3×4 côtés de longueur $1/3$, périmètre $3 \times 4/3 = 4$,

Stade 2 : $3 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade 3 : $3 \times 4 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade n : 3×4^n côtés de longueur $(1/3)^n$, périmètre $4 \times (4/3)^n$.

Flocon de Von Koch

Stade 0 : triangle, 3 côtés de longueur 1, périmètre 3, aire $\sqrt{3}/4$.

Stade 1 : 3×4 côtés de longueur $1/3$, périmètre $3 \times 4/3 = 4$,

Stade 2 : $3 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade 3 : $3 \times 4 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade n : 3×4^n côtés de longueur $(1/3)^n$, périmètre $4 \times (4/3)^n$.

Flocon de Von Koch

Stade 0 : triangle, 3 côtés de longueur 1, périmètre 3, aire $\sqrt{3}/4$.

Stade 1 : 3×4 côtés de longueur $1/3$, périmètre $3 \times 4/3 = 4$,

Stade 2 : $3 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade 3 : $3 \times 4 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade n : 3×4^n côtés de longueur $(1/3)^n$, périmètre $4 \times (4/3)^n$.

Flocon de Von Koch

Stade 0 : triangle, 3 côtés de longueur 1, périmètre 3, aire $\sqrt{3}/4$.

Stade 1 : 3×4 côtés de longueur $1/3$, périmètre $3 \times 4/3 = 4$,

Stade 2 : $3 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade 3 : $3 \times 4 \times 4 \times 4$ côtés de longueur $(1/3) \times (1/3) \times (1/3)$, périmètre $4 \times 4/3 \times 4/3 \times 4/3$,

Stade n : 3×4^n côtés de longueur $(1/3)^n$, périmètre $4 \times (4/3)^n$.

Flocon de Von Koch

stade	nombre de côtés	longueur des côtés	périmètre
0	3	1	3
1	3×4	$1/3$	$3 \times 4/3$
2	$3 \times 4 \times 4$	$1/3 \times 1/3$	$3 \times 4/3 \times 4/3$
n	3×4^n	$(1/3)^n$	$3 \times (4/3)^n$

Longueur infinie, aire $2\sqrt{3}/5$.

Si on fait des pas 3 fois plus petit, il faut en faire 4 fois plus.

La dimension fractale est $1,2618\dots$ car $4 = 3^{1,2618\dots}$.

$$\frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618\dots$$

Flocon de Von Koch

stade	nombre de côtés	longueur des côtés	périmètre
0	3	1	3
1	3×4	$1/3$	$3 \times 4/3$
2	$3 \times 4 \times 4$	$1/3 \times 1/3$	$3 \times 4/3 \times 4/3$
n	3×4^n	$(1/3)^n$	$3 \times (4/3)^n$

Longueur infinie, aire $2\sqrt{3}/5$.
Si on fait des pas 3 fois plus petit, il faut en faire 4 fois plus.
La dimension fractale est $1,2618\ldots$ car $4 = 3^{1,2618\ldots}$.

$$\frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618\ldots$$

Flocon de Von Koch

stade	nombre de côtés	longueur des côtés	périmètre
0	3	1	3
1	3×4	$1/3$	$3 \times 4/3$
2	$3 \times 4 \times 4$	$1/3 \times 1/3$	$3 \times 4/3 \times 4/3$
n	3×4^n	$(1/3)^n$	$3 \times (4/3)^n$

Longueur infinie, aire $2\sqrt{3}/5$.
Si on fait des pas 3 fois plus petit, il faut en faire 4 fois plus.
La dimension fractale est $1,2618\ldots$ car $4 = 3^{1,2618\ldots}$.

$$\frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618\ldots$$

Flocon de Von Koch

stade	nombre de côtés	longueur des côtés	périmètre
0	3	1	3
1	3×4	$1/3$	$3 \times 4/3$
2	$3 \times 4 \times 4$	$1/3 \times 1/3$	$3 \times 4/3 \times 4/3$
n	3×4^n	$(1/3)^n$	$3 \times (4/3)^n$

Longueur infinie, aire $2\sqrt{3}/5$.
Si on fait des pas 3 fois plus petit, il faut en faire 4 fois plus.
La dimension fractale est $1,2618\dots$ car $4 = 3^{1,2618\dots}$.

$$\frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618\dots$$

Courbe de Peano

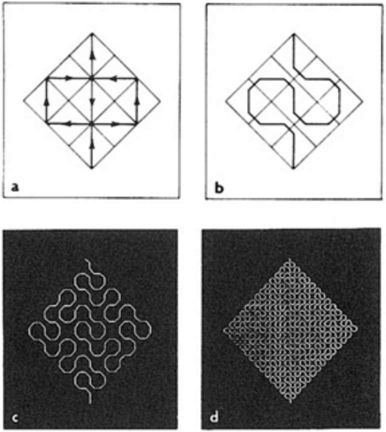
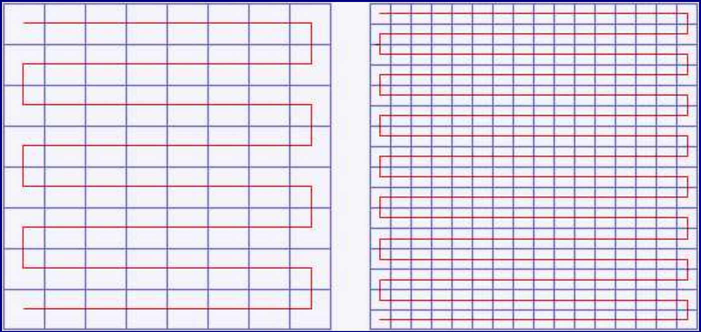


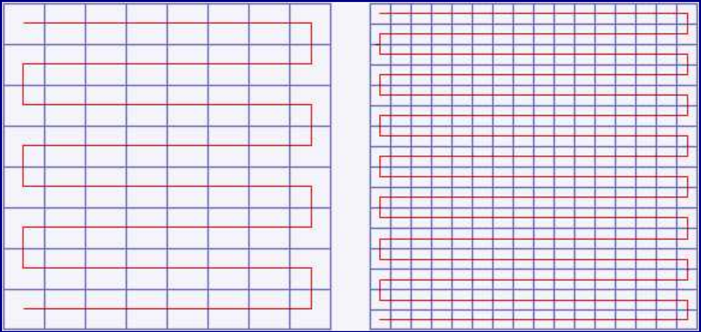
Figure 0.5 Etapes suivies pour la création d'une courbe de Peano. Elles peuvent être répétées jusqu'à l'infini où tout l'espace bidimensionnel est rempli par la courbe.

Courbe de Peano



Si on fait des pas x fois plus petits, le nombre de pas nécessaire est multiplié par x^2.
La dimension fractale est 2

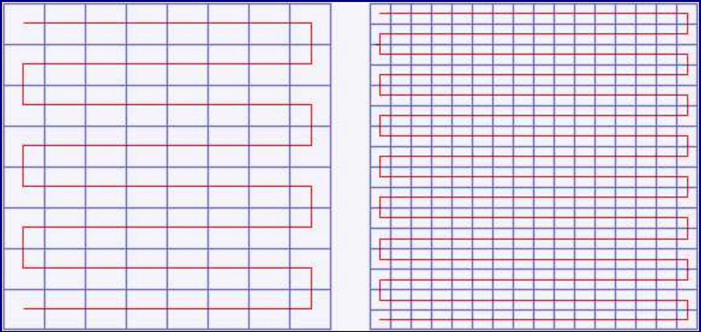
Courbe de Peano



Si on fait des pas x fois plus petits, le nombre de pas nécessaire est multiplié par x^2.

La dimension fractale est 2

Courbe de Peano



Si on fait des pas x fois plus petits, le nombre de pas nécessaire est multiplié par x^2.
La dimension fractale est 2

Mesurer la longueur de la côte de la Bretagne

Longueur de la côte de Bretagne : 1

Longueur de la côte de Bretagne : 2

Longueur de la côte de Bretagne : 3

La dimension fractale de la côte de Bretagne est d'environ $1,2$.

Longueur de la côte de Bretagne : 3

La dimension fractale de la côte de Bretagne est d'environ $1,2$.

L'infini en mathématiques

Michel Waldschmidt

http ://www.math.jussieu.fr/∼miw/