

Valeurs zêta multiples. Une introduction

par MICHEL WALDSCHMIDT

À Jacques Martinet, pour ses 60 ans

RÉSUMÉ. Soit $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ un k -uplet d'entiers positifs avec $k \geq 1$. Pour $s_1 \geq 2$, la série

$$\sum_{n_1 > \dots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \dots n_k^{-s_k}$$

converge et sa somme est notée $\zeta(\underline{s})$. Dans le cas $k = 1$ il s'agit simplement des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs. Quelles relations algébriques existent entre ces nombres? Le produit $\zeta(\underline{s}')\zeta(\underline{s}'')$ de deux valeurs de fonctions zêta multiples est une combinaison linéaire de $\zeta(\underline{s})$, comme on le voit facilement en multipliant les séries : c'est le *produit de mélange lié aux séries*. D'autre part une autre expression pour le nombre $\zeta(\underline{s})$ est donnée par une intégrale itérée (intégrale de Chen); cela fournit une autre relation quadratique exprimant de nouveau le produit $\zeta(\underline{s}')\zeta(\underline{s}'')$ comme une combinaison linéaire de $\zeta(\underline{s})$: c'est le *produit de mélange lié aux intégrales*. On conjecture que ces deux produits de mélange suffisent à décrire toutes les relations algébriques entre les nombres $\zeta(\underline{s})$. Se pose alors le problème d'étudier l'algèbre engendrée par des générateurs (les *multizêta symboliques*) indexés par les k -uplets \underline{s} et définie par les relations données par ces deux produits de mélange; on obtient ainsi l'algèbre MZV, dont Écalle est en train de déterminer la structure. Pour définir des séries génératrices permettant de coder simultanément tous les multizêta symboliques il convient d'inclure les \underline{s} correspondant à des séries divergentes (avec $s_1 = 1$). Nous mentionnons enfin brièvement quelques résultats de l'équipe de Petitot sur les polylogarithmes, et encore plus brièvement plusieurs sujets connexes.

ABSTRACT. For positive integers s_1, \dots, s_k with $s_1 \geq 2$, the series

$$\sum_{n_1 > \dots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \dots n_k^{-s_k}$$

converges and its sum is denoted by $\zeta(s_1, \dots, s_k)$. In case $k = 1$

this is nothing else than the value of the Riemann zeta function at the point s_1 . What are the algebraic relations between these numbers? these numbers? The product of two multiple zeta values is again a multiple zeta value: this is easily checked by multiplying the two series, and using a “shuffle” product. An example is

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2, 3) + \zeta(3, 2) + \zeta(5),$$

There are other quadratic relations between these numbers, which arise from another expression of $\zeta(\underline{s}) = \zeta(s_1, \dots, s_k)$ as a (Chen) iterated integral:

$$\zeta(\underline{s}) = \int_{\Delta_p} \omega_{\epsilon_1}(t_1) \cdots \omega_{\epsilon_p}(t_p),$$

with the following notation: $p = s_1 + \cdots + s_k$, the sequence $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ of elements in $\{0, 1\}$ is defined by writing the word

$$x_0^{s_1-1} x_1 \cdots x_0^{s_k-1} x_1 = x_{\epsilon_1} \cdots x_{\epsilon_p}$$

on the alphabet $X = \{x_0, x_1\}$, the differential forms ω_ϵ are defined by

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

and Δ_p is the following simplex in \mathbb{R}^p :

$$\Delta_p = \{\underline{t} \in \mathbb{R}^p ; 1 > t_1 > \cdots > t_p > 0\}.$$

Again this yields an expression of the product of two multiple zeta values as a linear combination of multiple zeta values, a simple example being

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2, 3) + 3\zeta(3, 2) + 6\zeta(4, 1).$$

The main conjecture is that these two types of relations are sufficient to describe all algebraic relations between these numbers.

This subject has deep connections with many other mathematical topics: combinatoric (the theory of quasisymmetric functions, Radford’s Theorem and Lyndon words), Lie and Hopf algebras, Écalle’s theory of resurgent series, Goncharov’s work on mixed Tate motives on $\text{Spec}\mathbb{Z}$, polylogarithms, monodromy of differential equations, the fundamental group of the projective line minus three points and Belyi’s Theorem, the absolute Galois group of \mathbb{Q} , the group of Grothendieck-Teichmüller, knots theory and Vassiliev invariants, K -theory, Feynman diagrams and quantum field theory, quasi-triangular quasi-Hopf algebras and Drinfeld’s associator Φ_{KZ} (related to the connexion of Knizhnik-Zamolodchikov).

1. Le produit de mélange lié aux séries

Précisons pour commencer que la définition que nous avons choisie

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k}$$

est celle utilisée, par exemple, par M. Hoffman, tandis que D. Zagier et A.B. Goncharov utilisent l'ordre opposé $1 \leq n_1 < \dots < n_k$.

Pour s et s' entiers ≥ 2 , le produit

$$\zeta(s)\zeta(s') = \sum_{n \geq 1} n^{-s} \cdot \sum_{n' \geq 1} (n')^{-s'}$$

s'écrit (*formule de réflexion*)

$$\begin{aligned} \sum_{n > n' \geq 1} n^{-s} (n')^{-s'} + \sum_{n' > n \geq 1} n^{-s} (n')^{-s'} + \sum_{n \geq 1} n^{-s-s'} \\ = \zeta(s, s') + \zeta(s', s) + \zeta(s + s'). \end{aligned}$$

Plus généralement, soient $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et $\underline{s}' = (s'_1, \dots, s'_{k'})$ deux suites finies de nombres entiers ≥ 1 avec $s_1 \geq 2$ et $s'_1 \geq 2$. Le produit de $\zeta(\underline{s})$ par $\zeta(\underline{s}')$ est la somme des $\zeta(\underline{\sigma})$ pour les $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_h)$ obtenus par *mélange* à partir de \underline{s} et \underline{s}' de la manière suivante : on insère, dans la suite $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ de même que dans la suite $\underline{s}' = (s'_1, \dots, s'_{k'})$, des 0 (y compris éventuellement avant le premier et après le dernier terme) de telle sorte qu'on obtienne deux suites de même longueur sans avoir deux 0 de même indice, et on définit $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_h)$ comme la somme (termes à termes) des deux suites ainsi obtenues. Par exemple pour $k = k' = 1$ on trouve trois possibilités pour $\underline{\sigma}$:

$$\frac{\underline{s}}{\underline{\sigma}} : \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} s & 0 \\ 0 & s' \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & s \\ s' & 0 \end{array} & \begin{array}{c} s \\ s + s' \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} s & s' \end{array} & \begin{array}{cc} s' & s \end{array} & \begin{array}{c} s \\ s + s' \end{array} \end{array}$$

La *relation de mélange liée aux séries* s'écrit alors

$$\zeta(\underline{s})\zeta(\underline{s}') = \sum_{\underline{\sigma}} \zeta(\underline{\sigma}),$$

où $\underline{\sigma}$ décrit les suites $(\sigma_1, \dots, \sigma_h)$ ($h \geq 1$) ainsi obtenues à partir de \underline{s} et \underline{s}' . L'indice h décrit l'intervalle $[\max\{k, k'\}, k + k']$.

Voici une autre description (équivalente) de ce produit de mélange. On considère les mots construits sur l'alphabet à deux lettres $X = \{x_0, x_1\}$. À chaque entier strictement positif s on associe le mot $y_s = x_0^{s-1}x_1$, et à chaque suite finie $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ (avec $k \geq 1$) formée d'entiers strictement positifs on associe le mot $x_{\underline{s}} = y_{s_1} \dots y_{s_k}$. Ainsi $x_{\underline{s}}$ est une suite de x_0 et de x_1 , le nombre k de facteurs x_1 est la *profondeur* (*depth*, encore appelée *longueur*) du mot $x_{\underline{s}}$ (ou du multi-indice \underline{s}), tandis que le nombre $p = s_1 + \dots + s_k$ de lettres en est le *poids* (*weight*). On désigne par X^* l'ensemble de tous les mots en x_0, x_1 , et par $\mathbb{Q}(X)$ l'anneau des polynômes en deux variables non commutatives x_0, x_1 à coefficients rationnels (ce sont les combinaisons linéaires de mots à coefficients rationnels). Les mots associés à une suite \underline{s} sont ceux qui terminent par x_1 , et leur ensemble est

X^*x_1 . Les *mots convergents* sont, outre le mot vide, ceux de $x_0X^*x_1$, qui commencent par x_0 et terminent par x_1 , c'est-à-dire ceux qui s'écrivent $x_{\underline{s}}$ avec $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et $s_1 \geq 2$; pour un tel mot w on pose $\zeta(w) = \zeta(\underline{s})$. Pour $k = 0$ la suite $\underline{s} = \emptyset$ est codée par le mot vide que nous noterons e . Il est commode de convenir que $\zeta(\emptyset) = \zeta(e) = 1$.

On prolonge par linéarité la définition de $\zeta(w)$ aux *polynômes convergents*, qui sont les éléments w de $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ s'écrivant comme combinaisons linéaires (à coefficients rationnels) de mots de l'ensemble $x_0X^*x_1$.

On définit (par récurrence sur la longueur) une loi associative et commutative $*$ sur l'ensemble X^*x_1 de la manière suivante : on a d'abord

$$e * w = w$$

pour tout w dans X^*x_1 , et ensuite, pour s et t entiers strictement positifs, w et w' dans X^*x_1 ,

$$(y_s w) * (y_t w') = y_s(w * y_t w') + y_t(y_s w * w') + y_{s+t}(w * w').$$

On vérifie alors, avec les notations précédentes,

$$x_{\underline{s}} * x'_{\underline{s}} = \sum_{\underline{\sigma}} x_{\underline{\sigma}},$$

ce qui signifie que les relations de mélange introduites ci-dessus s'écrivent, pour w et w' dans $x_0X^*x_1$,

$$(1) \quad \zeta(w)\zeta(w') = \zeta(w * w').$$

Ce produit de mélange est lié à la théorie des fonctions "quasi-symétriques". Soit $\underline{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$ un alphabet commutatif infini. On considère l'algèbre $\mathbb{Q}[[\underline{t}]]$ des séries formelles en ces variables. Une série $F(\underline{t}) \in \mathbb{Q}[[\underline{t}]]$ est *quasi-symétrique* si pour tout $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ le coefficient dans $F(\underline{t})$ de tout monôme $t_{i_1}^{s_1} \cdots t_{i_k}^{s_k}$ avec $i_1 > \dots > i_k$ ne dépend pas du multi-indice (i_1, \dots, i_k) . Le produit de deux séries quasi-symétriques est encore quasi-symétrique. À chaque mot $w = y_{s_1} \cdots y_{s_k} \in X^*x_1$ on associe la série quasi-symétrique

$$F_w(\underline{t}) = \sum_{n_1 > \dots > n_k \geq 1} t_{n_1}^{s_1} \cdots t_{n_k}^{s_k}.$$

Pour tous w et w' dans X^*x_1 on a

$$F_w(\underline{t})F_{w'}(\underline{t}) = F_{w*w'}(\underline{t}).$$

Si w est un mot convergent alors $\zeta(w)$ est la valeur de $F_w(\underline{t})$ quand on spécialise chaque t_n en $1/n$, ($n \geq 1$).

2. Le produit de mélange lié aux intégrales

Un autre codage des mots de X^*x_1 va nous être utile. À toute suite $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ d'entiers strictement positifs de poids $p = s_1 + \dots + s_k$ on associe la suite $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ d'éléments de $\{0, 1\}$ définie par

$$x_{\underline{s}} = x_{\epsilon_1} \cdots x_{\epsilon_p}.$$

On introduit les deux formes différentielles

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}.$$

On désigne par Δ_p le simplexe suivant de \mathbb{R}^p :

$$\Delta_p = \{t \in \mathbb{R}^p ; 1 > t_1 > \dots > t_p > 0\}.$$

Proposition 1. *Si, de plus, $s_1 \geq 2$, alors*

$$\zeta(\underline{s}) = \int_{\Delta_p} \omega_{\epsilon_1}(t_1) \cdots \omega_{\epsilon_p}(t_p).$$

On vérifie facilement cette relation en développant $1/(1-t)$ en série entière à l'origine.

On peut écrire l'intégrale intervenant dans l'énoncé de la proposition comme une *intégrale itérée* (ou *intégrale de Chen*) définie de la manière suivante.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes différentielles sur \mathbb{R} . On définit par récurrence

$$\int_{\text{Ch}}^t \varphi_n \cdots \varphi_1 = \int_0^t \left(\varphi_n(s) \int_{\text{Ch}}^s \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1 \right),$$

avec, pour $n = 1$,

$$\int_{\text{Ch}}^t \varphi_1 = \int_0^t \varphi_1.$$

Ainsi

$$\zeta(\underline{s}) = \int_{\text{Ch}}^1 \omega_{\epsilon_1} \cdots \omega_{\epsilon_p}.$$

On peut aussi définir les intégrales de Chen en introduisant d'abord le produit (associatif et non commutatif) $\alpha \# \beta$ de deux formes différentielles α et β :

$$\alpha \# \beta := \alpha P$$

où

$$P(t) = \int_0^t \beta$$

est la primitive de β nulle en 0. Alors

$$\int_{\text{Ch}}^t \varphi_n \cdots \varphi_1 = \int_0^t \varphi_n \# \cdots \# \varphi_1.$$

La proposition précédente s'écrit ainsi : *quand* $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ *est convergent* ($s_1 \geq 2$), *on a*

$$\zeta(\underline{s}) = \int_0^1 \varphi_{s_1} \# \cdots \# \varphi_{s_k},$$

où, pour s entier ≥ 1 , on a posé

$$\varphi_s := \omega_0^{\#(s-1)} \# \omega_1.$$

De cette proposition on va déduire la relation de mélange liée aux intégrales. On définit (par récurrence sur le poids p) un produit \sqcup (*shuffle*, encore appelé *intercalement* ou *battage*) sur X^* de la manière suivante :

$$e \sqcup w = w \sqcup e = w,$$

et ensuite, pour i et j dans $\{0, 1\}$, u et v dans X^* ,

$$(x_i u) \sqcup (x_j v) = x_i (u \sqcup x_j v) + x_j (x_i u \sqcup v)$$

(on notera ici l'absence du terme diagonal qui apparaissait dans la loi $*$ du produit de mélange lié aux séries). On vérifie alors que les relations

$$(2) \quad \zeta(w)\zeta(w') = \zeta(w \sqcup w')$$

sont satisfaites pour tout w et w' dans $x_0 X^* x_1$. Pour cela on décompose le produit cartésien $\Delta_p \times \Delta_{p'}$ de deux simplexes en réunion disjointe (aux bords près) de $(p+p')!/p!p'!$ simplexes.

Ces relations (2) permettent d'exprimer le produit $\zeta(\underline{s})\zeta(\underline{s}')$, où \underline{s} a pour poids p et \underline{s}' pour poids p' , comme une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de valeurs $\zeta(\underline{s}'')$. La somme des coefficients est $(p+p')!/p!p'!$.

Par exemple de l'égalité

$$y_2 \sqcup y_3 = y_2 y_3 + 3y_3 y_2 + 6y_4 y_1$$

on déduit

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2, 3) + 3\zeta(3, 2) + 6\zeta(4, 1).$$

Quand on combine cette relation avec celle du mélange liée aux séries qui donne

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2, 3) + \zeta(3, 2) + \zeta(5),$$

on obtient

$$\zeta(5) = 2\zeta(3, 2) + 6\zeta(4, 1).$$

On étend par linéarité \sqcup à l'algèbre des polynômes non commutatifs $\mathbb{Q}\langle X \rangle$, ce qui donne une algèbre commutative et associative $\text{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X \rangle$. La structure de cette algèbre est décrite par le *Théorème de Radford* : c'est l'algèbre des polynômes sur l'ensemble L des "mots de Lyndon" :

$$\text{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X \rangle = \mathbb{Q}[L].$$

Un *mot de Lyndon* est un mot non vide dans X^* qui est inférieur à tous ses facteurs à droite stricts pour l'ordre lexicographique, avec $x_0 < x_1$. À

part x_0 et x_1 , ils commencent tous par x_0 et terminent par x_1 : ce sont donc des mots convergents.

3. Les algèbres MZV

Nous nous sommes restreints jusqu'à présent aux mots convergents $w \in x_0 X^* x_1$. Si on désire éviter d'étendre la définition de $\zeta(w)$ à $X^* x_1$, il convient alors de remarquer que pour w dans $x_0 X^* x_1$, on peut écrire $x_1 \sqcup w - x_1 * w$ comme combinaison linéaire de mots convergents. En combinant (formellement) les deux relations de mélange, on déduit alors

$$(3) \quad \zeta(x_1 \sqcup w - x_1 * w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in x_0 X^* x_1.$$

Un exemple de telle relation (connue d'Euler, qui en connaissait d'ailleurs beaucoup d'autres!) est

$$\zeta(3) = \zeta(2, 1),$$

que l'on déduit de (3) en prenant $w = x_0 x_1$:

$$x_1 \sqcup (x_0 x_1) - x_1 * (x_0 x_1) = x_0 x_1^2 - x_0^2 x_1.$$

On introduit des symboles (*multizêta symboliques*) $\text{Ze}(\underline{s})$ pour chaque $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$, pour $k \geq 0$ et s_i entiers positifs. On définit aussi $\text{Ze}(w)$ pour tout w dans $X^* x_1$ par $\text{Ze}(x_{\underline{s}}) = \text{Ze}(\underline{s})$. Un symbole $\text{Ze}(\underline{s})$ est dit *convergent* si $s_1 \geq 2$ ou $k = 0$: ce sont les $\text{Ze}(w)$ pour w dans $x_0 X^* x_1$ sans oublier $\text{Ze}(e) = \text{Ze}(\emptyset)$.

On considère d'abord MZV_{conv} ("*multiple zêta values*" *convergentes*) comme étant l'algèbre commutative sur \mathbb{Q} définie par les générateurs convergents $\text{Ze}(\underline{s})$ et les relations quadratiques *standard*, qui sont celles que l'on déduit de (1), (2) et (3) en remplaçant $\zeta(w)$ par $\text{Ze}(w)$:

$$(1') \quad \text{Ze}(w)\text{Ze}(w') = \text{Ze}(w * w') \quad \text{pour } w \text{ et } w' \text{ dans } x_0 X^* x_1,$$

$$(2') \quad \text{Ze}(w)\text{Ze}(w') = \text{Ze}(w \sqcup w') \quad \text{pour } w \text{ et } w' \text{ dans } x_0 X^* x_1,$$

$$(3') \quad \text{Ze}(x_1 \sqcup w - x_1 * w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in x_0 X^* x_1.$$

On dispose donc d'un morphisme naturel de spécialisation de cette algèbre dans \mathbb{C} , qui envoie $\text{Ze}(\underline{s})$ sur $\zeta(\underline{s})$. La conjecture principale est :

Conjecture Diophantienne. *Le morphisme de l'algèbre MZV_{conv} dans \mathbb{C} qui envoie $\text{Ze}(\underline{s})$ sur $\zeta(\underline{s})$ est injectif.*

En d'autres termes toutes les relations de dépendance algébrique entre les nombres $\zeta(\underline{s})$, $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$, $s_1 \geq 2$, $s_j \geq 1$ ($2 \leq j \leq k$) proviennent (conjecturalement) des relations quadratiques fournies par les deux produits de mélange.

On va maintenant inclure parmi les générateurs les symboles $\text{Ze}(\underline{s})$ avec $s_1 = 1$.

Définition. L'algèbre MZV^* (resp. MZV^{\sqcup}) est l'algèbre (sur \mathbb{Q} , pour fixer les idées) commutative définie par les générateurs $Ze(\underline{s})$, où \underline{s} décrit l'ensemble de toutes les suites finies (s_1, \dots, s_k) (avec $k \geq 0$) d'entiers positifs, et la loi $*$ (resp. \sqcup) définie par

$$Ze(w) * Ze(w') = Ze(w * w') \quad (\text{resp. } Ze(w) \sqcup Ze(w') = Ze(w \sqcup w'))$$

pour tout $w \in X^*x_1$.

Chacune de ces deux algèbres contient la sous-algèbre correspondante, notée MZV_{conv}^* et $MZV_{\text{conv}}^{\sqcup}$ respectivement, obtenue en ne prenant comme générateurs que les $Ze(\underline{s})$ avec $s_1 \geq 2$. L'algèbre MZV_{conv} est à la fois quotient de MZV_{conv}^* par les relations (2') et (3'), et de $MZV_{\text{conv}}^{\sqcup}$ par les relations (1') et (3').

On aimerait bien étendre le morphisme de spécialisation, qui est défini sur MZV_{conv} , à chacune des deux algèbres MZV^* et MZV^{\sqcup} . Ce n'est pas possible *simultanément* pour la simple raison suivante : comme

$$x_1 * x_1 = 2x_1^2 + x_0x_1 \quad \text{et} \quad x_1 \sqcup x_1 = 2x_1^2,$$

on a

$$Ze(x_1) * Ze(x_1) = 2Ze(x_1^2) + Ze(x_0x_1) \quad \text{et} \quad Ze(x_1) \sqcup Ze(x_1) = 2Ze(x_1^2),$$

mais $\zeta(2) = \pi^2/6$ n'est pas nul! On peut cependant le faire séparément pour chacune des deux lois. On vérifie en effet que chacune des deux algèbres MZV^* et MZV^{\sqcup} est constituée des polynômes en $Ze(1)$ à coefficients dans la sous-algèbre convergente correspondante :

$$MZV^* = MZV_{\text{conv}}^*[Ze(1)] \quad \text{et} \quad MZV^{\sqcup} = MZV_{\text{conv}}^{\sqcup}[Ze(1)].$$

Par conséquent pour chaque $\theta \in \mathbb{C}$, et pour chacune des deux lois $*$ et \sqcup , il existe une manière unique de définir, pour toute famille finie $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ d'entiers ≥ 1 , la valeur *régularisée* $\zeta^{\text{reg},*}(\underline{s})$ (resp $\zeta^{\text{reg},\sqcup}(\underline{s})$) de telle sorte que

(a) Pour $k = 1$ et $s = 1$ on ait

$$\zeta^{\text{reg},*}(1) = \theta \quad (\text{resp } \zeta^{\text{reg},\sqcup}(1) = \theta).$$

(b) Pour tout w et w' dans X^*x_1 , on ait

$$\begin{aligned} \zeta^{\text{reg},*}(w * w') &= \zeta^{\text{reg},*}(w)\zeta^{\text{reg},*}(w') \\ (\text{resp } \zeta^{\text{reg},\sqcup}(w \sqcup w') &= \zeta^{\text{reg},\sqcup}(w)\zeta^{\text{reg},\sqcup}(w')). \end{aligned}$$

(c) Pour tout \underline{s} convergent on ait

$$\zeta^{\text{reg},*}(\underline{s}) = \zeta(\underline{s}) \quad (\text{resp } \zeta^{\text{reg},\sqcup}(\underline{s}) = \zeta(\underline{s})).$$

On peut choisir par exemple pour θ la constante d'Euler (que nous désignons par γ), mais Écalle préfère prendre $\theta = 0$.

Comme on l'a vu, on a alors

$$\zeta^{\text{reg},*}(1, 1) = \frac{1}{2}\zeta^{\text{reg},*}(1)^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) \quad \text{et} \quad \zeta^{\text{reg},\sqcup}(1, 1) = \frac{1}{2}\zeta^{\text{reg},\sqcup}(1)^2.$$

Plus généralement, en notant $1^{(p)}$ la suite $(1, \dots, 1)$ codée par x_1^p (bien entendu la suite de longueur nulle $1^{(0)} = \emptyset$ est codée par le mot vide e), on a

$$\zeta^{\text{reg},\sqcup}(1^{(p)}) = \frac{1}{p!}\zeta^{\text{reg},\sqcup}(1)^p,$$

tandis que

$$\sum_{p \geq 0} \zeta^{\text{reg},*}(1^{(p)})z^p = \exp \left\{ \zeta^{\text{reg},*}(1)z - \sum_{k \geq 2} (-1)^k \zeta(k) \frac{z^k}{k} \right\}.$$

Cette dernière formule, qu'il est intéressant de comparer avec le développement pour la fonction Gamma d'Euler :

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \exp \left\{ \gamma z - \sum_{k \geq 2} (-1)^k \zeta(k) \frac{z^k}{k} \right\},$$

se déduit des relations de Newton concernant les fonctions symétriques : en posant, pour $s \geq 0$,

$$\psi_s(\underline{t}) = \sum_{n \geq 1} t_n^s \quad \text{et} \quad \sigma_s(\underline{t}) = \sum_{n_1 > \dots > n_s \geq 1} t_{n_1} \cdots t_{n_s},$$

on a dans $\mathbb{Q}[[\underline{t}]]$

$$\sum_{s \geq 0} \sigma_s(\underline{t})z^s = \exp \left\{ - \sum_{k \geq 1} (-1)^k \psi_k(\underline{t}) \frac{z^k}{k} \right\}.$$

Revenons à la conjecture diophantienne. Pour qu'elle permette *effectivement* de décrire conjecturalement toutes les relations entre les valeurs de fonctions zêta multiples, il faut encore savoir décrire MZV_{conv} . Les travaux récents d'Écalle vont dans ce sens (voir § 4).

Goncharov conjecture que l'algèbre MZV_{conv} est duale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie engendrée par des générateurs $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5, \dots, \varphi_{2n+1}, \dots$, avec les seules relations $[\varphi_2, \varphi_{2n+1}] = 0$ pour tout $n \geq 1$.

L'énoncé suivant, conjecturé par Zagier, Drinfeld, Kontsevich et Goncharov, décrit la dimension d_p du sous- \mathbb{Z} -module de MZV_{conv} engendré par les 2^{p-2} éléments $\text{Ze}(\underline{s})$ avec $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ de poids p et $s_1 \geq 2$:

Conjecture. On a $d_1 = 0$, $d_2 = d_3 = d_4 = 1$ et $d_p = d_{p-2} + d_{p-3}$ pour $p \geq 4$.

Pour chaque $p \geq 0$, définissons \mathcal{Z}_p comme le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les $\text{Ze}(\underline{s})$ avec \underline{s} (convergent) de poids p et $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$. Alors la somme des \mathcal{Z}_p ($p \geq 0$) est directe, et la dernière conjecture s'énonce de manière équivalente :

$$\sum_{p \geq 0} q^p \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_p = \frac{1}{1 - q^2 - q^3}.$$

4. Fonctions Génératrices

Quand on dispose des $\zeta(w)$ pour tous les $w \in X^*x_1$ et pas seulement pour les mots convergents, on peut les insérer tous simultanément dans des séries génératrices.

Pour montrer que l'algèbre MZV_{conv} est librement engendrée par une sous-famille d'irréductibles, Écalle introduit des fonctions génératrices qui possèdent un grand nombre de symétries. Ainsi, pour chaque entier $k = 0, 1, \dots$, il définit

$$\text{Zig}(v_1, \dots, v_k) = \sum_{s_1 \geq 1} \cdots \sum_{s_k \geq 1} \text{Ze}(\underline{s}) v_1^{s_1-1} \cdots v_k^{s_k-1}.$$

Si on sommat formellement en remplaçant $\text{Ze}(\underline{s})$ par $\zeta(\underline{s})$ (même pour $s_1 = 1$, bien que la série définissant $\zeta(\underline{s})$ diverge), en permutant les signes de sommation on trouverait, à la place de $\text{Zig}(v_1, \dots, v_k)$, la série

$$\sum_{n_1 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{(n_1 - v_1) \cdots (n_k - v_k)}.$$

La série Zig est donc un substitut pour cette dernière série divergente. Noter que pour $k = 1$ une régularisation de la série est

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n-v} - \frac{1}{n} \right) = -\frac{\Gamma'(-v)}{\Gamma(-v)} - \gamma + \frac{1}{v}.$$

Définissons aussi des $\text{Wa}(\underline{s})$ liés aux $\text{Ze}(\underline{s})$ par la relation

$$\text{Wa}(s_1, \dots, s_k) = \text{Ze}(1 + s_k, \dots, 1 + s_1)$$

dans le cas convergent $s_1 > 1$ et par une relation analogue mais un peu plus compliquée dans le cas divergent $s_1 = 1$, puis associons aux $\text{Wa}(\underline{s})$ la série génératrice

$$\text{Wag}(u_1, \dots, u_k) = \sum_{s_1 \geq 1} \cdots \sum_{s_k \geq 1} \text{Wa}(\underline{s}) u_1^{s_1} (u_1 + u_2)^{s_2} \cdots (u_1 + \cdots + u_k)^{s_k}.$$

Les familles $\text{Ze}(\underline{s})$ et $\text{Wa}(\underline{s})$ sont des exemples de “moules” au sens d'Écalle. Un anneau (commutatif) étant donné, un *moule* est la donnée, pour chaque suite finie $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ de longueur arbitraire $k \geq 0$, d'un élément $M^{\underline{s}}$ de cet anneau. Un tel moule est noté M^\bullet . À $k = 0$ correspond M^\emptyset . L'addition de deux moules A^\bullet et B^\bullet est le moule $(A + B)^\bullet$ qui à \underline{s} associe l'élément

$(A + B)^{\underline{s}} := A^{\underline{s}} + B^{\underline{s}}$ de l'anneau. La multiplication de deux moules est définie de la manière suivante :

$$A^{\bullet} B^{\bullet} = C^{\bullet}$$

où

$$\begin{aligned} C^{\underline{s}} &= \sum_{\underline{s} = \underline{s}' \underline{s}''} A^{\underline{s}'} B^{\underline{s}''} \\ &= A^{\emptyset} B^{\underline{s}} + A^{(s_1)} B^{(s_2, \dots, s_k)} + \dots + A^{\underline{s}} B^{\emptyset}. \end{aligned}$$

Dans la première somme, $\underline{s}' \underline{s}''$ est la suite obtenue par concaténation de \underline{s}' et \underline{s}'' .

Une troisième opération sur les moules est utile : la composition

$$A^{\bullet} \circ B^{\bullet} = C^{\bullet}$$

où

$$C^{\underline{s}} = \sum_{\ell > 0} \sum_{\substack{\underline{s}^1 \dots \underline{s}^{\ell} = \underline{s} \\ \underline{s}^i \neq \emptyset}} A^{(|\underline{s}^1|, \dots, |\underline{s}^{\ell}|)} B^{\underline{s}^1} \dots B^{\underline{s}^{\ell}},$$

et $|\underline{s}|$ désigne le poids $p = s_1 + \dots + s_k$ de \underline{s} .

Multiplication et composition sont associatives, non commutatives.

Sur ces objets Écalle définit six types de symétrie : partant de deux suites \underline{s}' et \underline{s}'' il introduit trois ensembles $\text{Sha}(\underline{s}', \underline{s}'')$, $\text{She}(\underline{s}', \underline{s}'')$, $\text{Shi}(\underline{s}', \underline{s}'')$. Le premier est obtenu par le mélange des deux suites, pour le second on ajoute les termes obtenus en contractant deux termes "adjacents" (voir les exemples ci-dessous), et pour le troisième au lieu de les ajouter on fait une différence symétrique.

Quand la somme des $M^{\underline{s}}$ pour les \underline{s} dans cet ensemble $\text{Sha}(\underline{s}', \underline{s}'')$, $\text{She}(\underline{s}', \underline{s}'')$ ou $\text{Shi}(\underline{s}', \underline{s}'')$ est égale à $M^{\underline{s}'} M^{\underline{s}''}$, on dit que le moule est *symétral*, *symétral* ou *symétril* respectivement. Si la somme correspondante est nulle, alors le moule est *alternel*, *alternel* ou *alternil*. Par exemple un moule symétral satisfait

$$M^{s_1} M^{s_2} = M^{s_1, s_2} + M^{s_2, s_1}$$

et

$$M^{s_1} M^{s_2, s_3} = M^{s_1, s_2, s_3} + M^{s_2, s_1, s_3} + M^{s_2, s_3, s_1},$$

pour un moule symétral on a

$$M^{s_1} M^{s_2} = M^{s_1, s_2} + M^{s_2, s_1} + M^{s_1 + s_2}$$

et

$$M^{s_1} M^{s_2, s_3} = M^{s_1, s_2, s_3} + M^{s_2, s_1, s_3} + M^{s_2, s_3, s_1} + M^{s_1 + s_2, s_3} + M^{s_2, s_1 + s_3},$$

et enfin pour un moule symétril

$$M^{s_1} M^{s_2} = M^{s_1, s_2} + M^{s_2, s_1} + \frac{1}{s_1 - s_2} (M^{s_1} - M^{s_2})$$

et

$$M^{s_1} M^{s_2, s_3} = M^{s_1, s_2, s_3} + M^{s_2, s_1, s_3} + M^{s_2, s_3, s_1} \\ + \frac{1}{s_1 - s_2} (M^{s_1, s_3} - M^{s_2, s_3}) + \frac{1}{s_1 - s_3} (M^{s_2, s_1} - M^{s_2, s_3}).$$

Le moule Wa^\bullet est symétral, tandis que Ze^\bullet est symétriel et que la série Zig définit un moule symétril. Par exemple les formules de réflexion

$$\text{Ze}(s_1)\text{Ze}(s_2) = \text{Ze}(s_1, s_2) + \text{Ze}(s_2, s_1) + \text{Ze}(s_1 + s_2)$$

se traduisent par

$$\text{Zig}(v_1)\text{Zig}(v_2) = \text{Zig}(v_1, v_2) + \text{Zig}(v_2, v_1) + \frac{1}{v_1 - v_2} (\text{Zig}(v_1) - \text{Zig}(v_2)).$$

Pour rigidifier la situation Écalle considère aussi, pour $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ racines de l'unité, ce qu'il appelle les *multizêta modulés*

$$\zeta(\underline{s}; \underline{\sigma}) = \zeta(s_1, \dots, s_k; \sigma_1, \dots, \sigma_k) = \sum_{n_1 > \dots > n_k \geq 1} \frac{\sigma_1^{n_1} \dots \sigma_k^{n_k}}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}} \\ = \int_{\Delta_p} \omega_0^{s_1-1} \omega_{\sigma_1} \omega_0^{s_2-1} \omega_{\sigma_1 \sigma_2} \dots \omega_0^{s_k-1} \omega_{\sigma_1 \dots \sigma_k},$$

où, pour σ racine de l'unité, on a posé

$$\omega_\sigma(t) = \frac{\sigma dt}{1 - \sigma t}.$$

Ces nombres $\zeta(\underline{s}; \underline{\sigma})$ apparaissent déjà chez Nielsen en 1904, et aussi plus récemment dans des travaux de A.B. Goncharov concernant les motifs de Tate mixtes sur $\text{Spec}\mathbb{Z}$.

Écalle introduit alors les *bimoules* (moules indexés par des suites doubles), sur lesquels il définit de nouvelles opérations *swap*, *rec*, *neg* et *push*, à partir de quoi il construit une algèbre de Lie ARI, munie de sous-algèbres ARIM, ARITH, ARITHM et ARITHMÉ, le groupe de Lie GARI (et son sous-groupe de Lie GARITHMÉ), avec des correspondances EXP et LOG entre ARI et GARI. L'introduction de ces objets par Écalle a pour but d'établir que les multizêta symboliques $\text{Ze}(s)$ sont librement engendrés par une sous-famille d'irréductibles canoniques, et de décrire une décomposition explicite programmable des multizêta symboliques en ces irréductibles. Par exemple les irréductibles canoniques d'Écalle de poids ≤ 10 ne sont autres que

$$\text{Ze}(2), \text{Ze}(3), \text{Ze}(5), \text{Ze}(7), \text{Ze}(9)$$

ainsi que deux éléments qui coïncident avec $\text{Ze}(6, 2)$ et $\text{Ze}(8, 2)$ modulo les polynômes en les cinq termes précédents.

5. Polylogarithmes

Le *polylogarithme* classique $\text{Li}_s(z)$, pour s entier ≥ 1 et $|z| < 1$, est

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^s}.$$

Plus généralement, les *fonctions polylogarithmes* sont définies, pour $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ avec s_i entiers ≥ 1 , par

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\underline{s}}(z) &= \sum_{n_1 > \dots > n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}} \\ &= \int_0^z \omega_0^{\#(s_1-1)} \# \omega_1 \# \dots \# \omega_0^{\#(s_k-1)} \# \omega_1, \end{aligned}$$

qui converge pour $|z| < 1$. Si, de plus, $s_1 \geq 2$, alors la série et l'intégrale convergent absolument sur tout le disque unité fermé $|z| \leq 1$, et on a

$$\text{Li}_{\underline{s}}(1) = \zeta(\underline{s}).$$

On écrit encore $\text{Li}_w(z) = \text{Li}_{\underline{s}}(z)$ quand \underline{s} est codé par le mot $w \in X^*x_1$:

$$\text{Li}_w(z) = \int_{\text{Ch}}^z \omega_{\epsilon_1} \dots \omega_{\epsilon_p}$$

quand $w = x_{\epsilon_1} \dots x_{\epsilon_p}$. La condition $\epsilon_p = 1$ garantit la convergence de l'intégrale.

L'exemple le plus simple avec $k = 1$, $s_1 = 1$, $x = x_1$ est

$$\text{Li}_1(z) = \text{Li}_{x_1}(z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t} = -\log(1-z).$$

Pour tout $w \in X^*x_1$, on a

$$\begin{aligned} \text{Li}_{x_0w}(z) &= \int_0^z \text{Li}_w(t) \frac{dt}{t}, \\ \text{Li}_{x_1w}(z) &= \int_0^z \text{Li}_w(t) \frac{dt}{1-t}, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} \text{Li}_{\underline{s}}(z) &= \text{Li}_{(s_1-1, s_2, \dots, s_k)}(z) \quad \text{si } s_1 \geq 2, \\ (1-z) \frac{d}{dz} \text{Li}_{\underline{s}}(z) &= \text{Li}_{(s_2, \dots, s_k)}(z) \quad \text{si } s_1 = 1. \end{aligned}$$

Afin de définir une série génératrice, il faut encore étendre la définition de $\text{Li}_w(z)$ à tous les mots w , même ceux qui ne terminent pas par x_1 . Une

méthode de régularisation des intégrales divergentes consiste à intégrer à partir de 1 au lieu de 0 quand l'intégrale diverge. Ainsi on pose

$$\operatorname{Li}_{x_0}(z) = \int_1^z \frac{dt}{t} = \log z, \quad \operatorname{Li}_{x_0^2}(z) = \int_1^z \frac{dt_1}{t_1} \int_1^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} = \frac{1}{2}(\log z)^2,$$

et plus généralement, pour $s \geq 1$,

$$\operatorname{Li}_{x_0^s}(z) = (-1)^s \int_{1 > t_s > \dots > t_1 > z} \frac{dt_1 \cdots dt_s}{t_1 \cdots t_s} = \frac{1}{s!}(\log z)^s.$$

L'intégrale qui sert d'intermédiaire est bien définie pour z réel dans l'intervalle $0 < z < 1$, mais cela permet de définir $\operatorname{Li}_w(z)$ pour tout $w \in X^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, avec

$$\operatorname{Li}_{u \sqcup v}(z) = \operatorname{Li}_u(z) \operatorname{Li}_v(z)$$

pour tout (u, v) dans $(X^*)^2$. En revanche les relations de mélange liées aux séries ne s'étendent pas aux polylogarithmes en une variable.

La série génératrice

$$\operatorname{Li}(z) = \sum_{w \in X^*} \operatorname{Li}_w(z) w$$

est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Li}(z) = \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z} \right) \operatorname{Li}(z)$$

déterminée par la condition initiale

$$\operatorname{Li}(\epsilon) = e^{x_0 \log \epsilon} + O(\sqrt{\epsilon}) \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Grâce à l'étude de la monodromie de cette équation différentielle, Petitot et ses collègues montrent que les fonctions Li_w , pour w décrivant X^* , sont linéairement indépendantes sur \mathbb{C} .

Il en résulte que tout polylogarithme Li_w s'exprime de manière unique comme polynôme à coefficients rationnels en des polylogarithmes codés par des mots de Lyndon. En particulier pour $k = 1$ les polylogarithmes classiques Li_s , s entier ≥ 1 , qui sont codés par les mots de Lyndon $x_0^{s-1} x_1$, sont algébriquement indépendants.

6. Sujets connexes

Nous n'avons fait qu'effleurer le sujet. Les quelques références ci-dessous développent d'autres aspects de la question. L'algèbre $\operatorname{MZV}_{\text{conv}}$ a aussi des liens très intéressants avec le groupe fondamental de la droite projective privée de trois points et le théorème de Belyi, le groupe de Galois absolu de \mathbb{Q} , le groupe de Grothendieck-Teichmüller, les catégories monoïdales tressées, la théorie des noeuds (invariants de Vassiliev), la K -théorie, les diagrammes de Feynman et la théorie quantique des champs, la renormalisation en physique, les quasi-algèbres de Hopf quasi-triangulaires

et l'associateur Φ_{KZ} (lié à la connexion de Knizhnik-Zamolodchikov) de Drinfeld.

Un groupe de travail consacré à ce thème se réunit à l'Institut Henri Poincaré depuis un an. Le texte ci-dessus est un condensé de quelques exposés qui y ont été donnés par Pierre Cartier, Jean Écalle, Michel Petitot. Quand ils sont originaux, les résultats présentés ici leur sont tous dus.

Bibliographie

- [1] L. EULER, *Meditationes circa singulare serierum genus*. In: Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series Prima XV, Commentationes Analyticae Vol. 2, 217–267; Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. **20** (1775), 140–186.
- [2] V.G. DRINFELD, *On quasitriangular Quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* . Leningrad Math. J. **2** 4 (1991), 829–860.
- [3] D. ZAGIER, *Values of zeta functions and their applications*. Proc. First European Congress of Mathematics, Vol. 2, Birkhäuser, Boston (1994), 497–512.
- [4] A.B. GONCHAROV, *Polylogarithms in arithmetic and geometry*. roc. ICM-94 Zürich, Vol. 1, Birkhäuser, Boston (1995), 374–387.
- [5] D. BAR-NATAN, *On associators and the Grothendieck-Teichmüller Group I*. In <http://xxx.lanl.gov/abs/q-alg/9606021> and <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn>
- [6] M.E. HOFFMAN, *The Algebra of Multiple Harmonic Series*. J. Algebra **194** (1997), 477–495.
- [7] HOANG NGOC MINH, M. PETITOT, J. VAN DER HOEVEN, *Shuffle algebra and polylogarithms*. Proc. of FPSAC'98, 10-th international Conference on *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, June 98, Toronto.
- [8] J.M. BORWEIN, D.M. BRADLEY, D.J. BROADHURST, P. LISONĚK, *Combinatorial Aspects of Multiple Zeta Values*. The Electronic Journal of Combinatorics **5** (1998), #R38.
- [9] A.B. GONCHAROV, *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*. Math. Research Letter **5** (1998), 497–516.
- [10] HOANG NGOC MINH, M. PETITOT, J. VAN DER HOEVEN, *L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices*. Proc. of FPSAC'99, 11-th international Conference on *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, June 99, Barcelona.
- [11] M. KONTSEVICH, *Periods*. Journée annuelle de la Société Mathématique de France 1999, 28–39.
- [12] U. MÜLLER, C. SCHUBERT, *A Quantum Field Theoretical Representation of Euler-Zagier Sums*. <http://xxx.lanl.gov/abs/math/9908067>
- [13] HOANG NGOC MINH, M. PETITOT, *Lyndon words, polylogarithms and the Riemann ζ function*. Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997). Discrete Math. **217** (2000), 273–292.
- [14] J. ÉCALLE, *La libre génération des multizétas et leur décomposition canonico-explicite en irréductibles*. Manuscrit, 1999.
- [15] HOANG NGOC MINH, M. PETITOT, *Contribution à l'étude des MZV*. Manuscrit, 1999.
- [16] HOANG NGOC MINH, G. JACOB, M. PETITOT, N.E. OUSSOUS, *Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler-Zagier*. Sém. Lothar. Combin. **43** (1999), Art. B43e, 29 pp. (electronic).

Michel WALDSCHMIDT
 Université P. et M. Curie (Paris VI)
 Institut de Mathématiques CNRS UMR 7586
 Théorie des Nombres Case 247
 175, rue du Chevaleret
 75013 Paris
 France
 E-mail : miv@math.jussieu.fr