

## Rapport sur ma mission en Inde du 17 Octobre au 10 Novembre 2007

Michel Waldschmidt

### Introduction

Le but de ma mission était de participer, pour la deuxième année consécutive, au programme **French Science Today**

<<http://www.frenchsciencetoday.org/>>

de l'Ambassade de France avec la participation des Alliances Françaises. Dans mon rapport de mission de l'an dernier

<<http://www.institut.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/MissionIndeFST2006.pdf>>

je commençais en affirmant mon enthousiasme pour ce programme, je n'ai pas changé d'avis.

### Exposés donnés

J'ai donné en tout 13 exposés (les résumés sont donnés en annexe):

**a** *From classical arithmetics to information science: some applications of abstract research* (2 fois)

**b** *Some recent results in mathematics related to data transmission* (7 fois)

**c** *History of irrational and transcendental numbers* (3 fois)

**d** *Density of rational points on Abelian Varieties* (1 fois)

Les deux premiers sujets sont des conférences *grand public* et les deux suivants sont destinés à des mathématiciens.

J'ai aussi profité de cette mission pour donner quatre cours à l'*Indian Statistical Institute* de Kolkata

*Introduction to Diophantine methods: irrationality and transcendence.*

C'est une version développée de l'exposé **c**. Au dernier cours j'ai complété la démonstration par Hermite de la transcendance de  $e$ .

J'avais mis sur mon site tous les fichiers powerpoint ppt ou LaTeX pdf de ces exposés, ce qui permettait aux personnes intéressées de les télécharger soit avant, soit après mon intervention.

L'exposé **a** est une introduction à la cryptographie, c'est une mise à jour de ce que j'avais raconté l'an dernier lors de ma tournée *French Science Today*. L'exposé **b** est une introduction aux codes correcteurs d'erreurs. Au Collège St Thomas de Trivandrum le 5 Novembre, c'est une variante de cet exposé **b** que j'ai donnée sous le titre *Coding Theory, Card Tricks and Hat Problems*: j'y ai ajouté un autre tour de carte connu sous le nom de *Best Card Trick*.

### Déroulement de la mission et exposés donnés:

Arrivée à Mumbai le mercredi 17 Octobre.

Du 18 au 22 Octobre, Mumbai, Tata Institute of Fundamental Research TIFR, School of Mathematics

Lundi 22 Octobre matin, University of Mumbai, Department of Mathematics, Colloquium Lecture: **b**

Lundi 22 Octobre après-midi, TIFR, School of Mathematics, Colloquium lecture: **d**

Mardi 23 Octobre Pune, Bhaskaracharya Pratishthana: **b**

Mercredi 24 Octobre

matin, University of Pune, Department of Mathematics: **a**

après-midi, Hyderabad, Planetarium, B.M. Birla Science Centre: **b**

Jeudi 25 Octobre, Hyderabad Central University: **c**

Vendredi 26 et Samedi 27 Octobre, Hampi

Du Lundi 29 Octobre au Dimanche 4 Novembre: Kolkata, Indian Statistical Institute, Theoretical Statistics and Mathematics Division

Lundi 29 Octobre, ISI Colloquium lecture: **c**

Mardi 30, Mercredi 31 Octobre, Jeudi 1 et Vendredi 2 Novembre,

exposés de théorie des nombres aux étudiants de l'ISI:

*Introduction to Diophantine methods: irrationality and transcendence*

Jeudi 1 Novembre, Kolkata, M.P. Birla Planetarium: **b**

Lundi 5 Novembre, Guwahati, Indian Institute of Technology, **a + b**

Mardi 6 Novembre, Bangalore, Indian Institute of Science: **c**

Mercredi 7 Novembre, Trivandrum,

matin, St. Thomas School: **b**

après-midi, Kerala University, Department of Mathematics: **b**

Du 8 au 10 Novembre, Chennai, The Institute of Mathematical Sciences IMSc.

Départ de Chennai le Samedi 11 Novembre pour Paris.

## Commentaires

### Mumbai (= Bombay).

J'ai visité le Tata Institute pour la première fois en 1976, j'y retourne régulièrement; maintenant que K. Ramachandra est à Bangalore, mes deux principaux contacts sont N. Saradha et T.N. Shorey, que j'ai eu plaisir à retrouver. Le surlendemain de mon arrivée (vendredi 19) je suis allé à l'Alliance Française faire la connaissance du Directeur, Bernard Rouhaud. J'ai appris que mon exposé au colloquium du Tata Institute le 22 était inscrit dans le cadre de *French Science Today* - avec la précision qu'il s'adresse à des spécialistes. J'ai commencé ma tournée par un exposé à l'Université de Bombay le Lundi 22 au matin, il a été ajouté à mon programme le vendredi 19, quand le Professeur Poornima Raina, Chef du Département de Mathématiques (dont le mari est professeur de Physique au TIFR) est venue au Tata Institute pour m'inviter. L'accueil des responsables du département de mathématiques a été chaleureux, la salle était pleine et l'assistance très attentive. J'ai été invité à revenir y donner un autre exposé, ce que je ferai peut-être début janvier quand je retournerai à l'Indian Institute of Technology de Bombay (qui est proche de l'Université) pour une école du CIMPA.

L'après-midi j'ai donné un exposé de colloquium aux mathématiciens du Tata Institute, la salle était bien remplie et il y a eu plusieurs questions à la fin.

### Pune (= Poona).

J'ai été accueilli par Anand, de l'Alliance Française, qui m'a emmené à l'Université où j'ai retrouvé le responsable du département de Mathématiques, le Professeur S.A. Katre, théoricien des nombres que je connais depuis longtemps. Le Directeur de l'Alliance Française, Jean-Jacques Scaërou, nous y a rejoint pour un rendez-vous que nous avions avec le Vice Chancelier, le Dr Narendra Jadhav. Celui-ci m'a impressionné. C'est un érudit, il m'a raconté des anecdotes sur les mathématiques et notamment sur Ramanujan. Il faut profiter de sa présence comme VC de l'Université pour développer les contacts. J'ai l'intention de lire son livre *Intouchable* qui est un *best seller*. Après cette rencontre le déjeuner, offert par le département de mathématiques, m'a permis de rencontrer les mathématiciens de l'Université de Pune.

Ma conférence FST le mardi soir était donnée à Bhaskaracharya Pratishthana. Le Bhaskaracharya Institute of Mathematics

<<http://www.bprim.org/>>

a été créé à Pune en 1976 par Shreeram Abhyankar, géomètre algébriste, Professeur à Purdue, auteur de travaux très connus sur la résolution des singularités. Cet institut de recherches mathématiques de haut niveau organise des conférences et des groupes de travail. Il prépare également les étudiants aux olympiades mathématiques et publie un journal à l'intention de ces étudiants, *Bona Mathematica*. Leur bibliothèque est bien fournie, grâce notamment à des dons d'Abhyankar et à des subventions du *National Board For Higher Mathematics*. Leur collection de livres anciens est étonnante. Ils ont de nombreuses activités visant à développer la visibilité des mathématiques vers les non-spécialistes, et ma conférence entrait dans ce cadre. Une quarantaine de personnes y ont assisté, un peu plus de filles que de garçons (j'y ai retrouvé un ancien élève de Phnom Penh qui étudie les statistiques à Pune). Il n'y a pas eu beaucoup de questions immédiatement, mais après la conférence j'ai discuté avec plusieurs personnes. C'était un peu pareil le lendemain matin à l'Université de Pune, la proportion de filles était nettement plus importante, et la salle était entièrement pleine (près d'une centaine de personnes). Un ancien président de l'Alliance Française, V.V. Mujumdar, a assisté à mes deux conférences à Pune et a participé (avec Anand et S.A. Katre) au dîner du mardi soir offert par Jean-Jacques Scaërou. V.V. Mujumdar est un francophile convaincu, directeur d'un centre de recherches, qui soutient fortement l'action de l'Alliance Française. J'ai pris plaisir à discuter avec lui.

### Hyderabad.

J'ai été accueilli par Uma, de l'Alliance Française, et le Directeur Frédéric Dart. Le mercredi 23 au soir au B.M. Birla Science Centre il y avait très peu de monde, à peine 20, mais parmi les exposés que j'ai donnés c'est un de ceux où j'ai senti l'auditoire le plus réceptif. D'ailleurs après l'exposé il y a eu pas mal de questions. Le directeur du Birla Science Centre et du Musée des Sciences, le Dr Sidhart, astrophysicien, connaît bien l'histoire des mathématiques en Inde. Il avait même lu un texte que j'ai écrit sur ce sujet, ce texte lui avait été communiqué par le président de l'Université d'Udine.

J'ai été invité à dîner par Frédéric Dart, ce qui nous a permis de bien discuter.

Le lendemain à l'Université nous étions invités à déjeuner avec tous les collègues mathématiciens, que je connais bien car j'avais déjà visité déjà deux fois cette université. Le Professeur Rajat Tandon, un très bon théoricien des nombres, est un des principaux responsables de l'organisation de la Conférence Internationale des Mathématiciens ICM2010 qui réunira entre 4000 et 5000 mathématiciens à Hyderabad en 2010. Ces conférences ont lieu tous les 4 ans (c'est à cette occasion que sont décernées les Médailles Fields), ce sera la première fois qu'elle se tiendra en Inde. J'ai retrouvé aussi le Professeur V. Kannan, maintenant en retraite, avec lequel j'avais enregistré des émissions de télévision pour présenter les mathématiques au grand public il y a plusieurs années. Je pensais que mon exposé allait s'adresser aux mathématiciens, mais quand j'ai vu que beaucoup d'étudiants étaient présents j'ai décidé de présenter le sujet plus lentement.

Après cet exposé j'ai été pris en charge par le responsable à Hyderabad de Campus France, K.J. Pramod,

(International Higher Education Council). C'était utile pour moi de discuter avec lui car la mission suivante que je devais effectuer était pour présenter Campus Math au Vietnam.

### **Kolkata (= Calcutta).**

J'ai été accueilli à Kolkata par deux jeunes *research scholars* de l'ISI, Rajat Hazra et Biswaroop Das, à qui j'avais fourni des références sur un problème qu'ils étudiaient l'an dernier. C'est Amartya Kumar Dutta qui avait préparé ma venue et qui en a assuré la parfaite organisation. Il m'avait déjà accueilli l'an dernier à l'ISI et nous avons eu des échanges (qui se prolongent après mon retour) sur différentes questions mathématiques et historiques: il m'a appris beaucoup de choses sur l'histoire des mathématiques en Inde. Un jeune chercheur du Harish Chandra Research Institute de Allahabad, R. Thangadurai, est venu à l'ISI pendant la semaine où j'y étais pour mettre au point la publication des oeuvres de Pillai à laquelle j'ai accepté de contribuer. Avec lui j'ai aussi discuté de cryptographie elliptique.

L'exposé de colloquium que j'ai donné le Lundi 29 s'adressait aux mathématiciens de l'Indian Statistical Institute et aux étudiants qui allaient suivre mon cours les jours suivants. J'ai été sensiblement plus vite que pour mon exposé à l'Université d'Hyderabad.

À part le deuxième cours qui tombait un jour de grève, l'assistance à mes quatre cours donnés ensuite à l'ISI a été d'une trentaine d'auditeurs, principalement des étudiants de l'ISI plus quelques collègues.

L'exposé que j'ai donné dans le cadre de *French Science Today* m'a donné l'occasion de revoir le directeur du M.P. Birla Planetarium de Kolkata (où j'étais déjà intervenu l'an dernier), le Dr. Debiprosad Duari, et de faire la connaissance du nouveau directeur de la French Association (qui est devenue Alliance Française du Bengale le lendemain), Christian Chatton, ainsi que la responsable de Campus France à Kolkata (je suis retourné les voir tous les deux le lendemain). La salle du Birla Planetarium est assez petite mais elle était presque pleine. Il y a eu pas mal de questions après la conférence, pendant la collation qui était offerte. Plusieurs étudiants m'ont demandé mon adresse électronique, certains m'ont invités à visiter leur collège (Presidency College, qui est réputé). Je n'avais plus le temps d'accepter puisque je quittais Calcutta deux jours après, mais le Directeur du Birla Planetarium m'a dit qu'il organiserait cette visite la prochaine fois que je reviendrai. Ce sera peut-être en Novembre 2008.

### **Guwahati.**

C'est le Professeur Rafikul Alam qui a organisé mon court séjour à l'IIT de Guwahati. Le lundi matin il m'a fait rencontrer les mathématiciens, dont Anupam Saikia, jeune théoricien des nombres dont j'avais déjà entendu parler. J'ai eu une brève rencontre avec le directeur de l'IIT le matin; il s'est montré désireux de développer les coopérations internationales, notamment avec la France; il devait recevoir la visite de délégués du programme n+i (national + international, pour les écoles d'ingénieurs) de Campus France le 13 Novembre.

L'après-midi pour les deux conférences successives que je donnais il y avait une bonne soixantaine d'auditeurs, quelques mathématiciens et surtout des étudiants; j'ai dû écourter légèrement les présentations faute de temps, mais l'accueil a été bon, plusieurs auditeurs m'ont demandé des références.

Après ma rencontre avec le Directeur de l'IIT de Guwahati, je pense que cet institut mérite de retenir l'attention pour que les scientifiques français développent des coopérations; les collègues mathématiciens n'ont pas manifesté un intérêt prononcé pour cela, mais il faudrait voir si d'autres spécialités seraient plus réceptives.

### **Bangalore.**

Mon passage à Bangalore a été très court puisque je suis arrivé de Guwahati via Kolkata le mardi matin et que j'en suis reparti le soir même pour Trivandrum. J'ai été très amicalement accueilli par Bruno Rouot qui m'a ensuite accompagné à Trivandrum. L'après-midi de ce mardi j'ai donné un exposé à l'Indian Institute of Science IISc où je connais plusieurs collègues. L'exposé de colloquium, à l'invitation du Professor Siddhartha Gadgil, s'adressait aux mathématiciens et aux étudiants de mathématiques. J'ai profité de ce passage à Bangalore pour mettre au point avec le Professeur Alladi Sitaram le programme de la conférence Franco Indienne organisée par la Société Mathématique de France et la Ramanujan Mathematical Society à l'Institut des Sciences Mathématiques IMSc de Chennai en décembre 2008.

### **Thiruvananthapuram (= Trivandrum).**

J'ai donné deux conférences FST, la première le matin à St. Thomas School s'adressait à un public de première et terminale scientifique de lycée; il y avait une centaine de présents. Pour la seconde l'après-midi, au département de mathématiques de l'Université du Kerala, il y avait une cinquantaine d'étudiants en mathématiques du niveau Master et Doctorat. Ces deux conférences avaient été spécialement bien préparées à l'avance par le Directeur de l'Alliance Française de Trivandrum, José-Marie Cortès, qui avait transmis les fichiers powerpoint de mes interventions aux deux responsables sur place à l'avance, permettant ainsi aux personnes intéressées de se familiariser avec le sujet et de se préparer à la rencontre. Il nous a invités avec Bruno Rouot à un excellent dîner le soir à Kovalam.

## Chennai (= Madras).

Je suis arrivé à Chennai le jour de Divali (Deepavali), je n'étais pas fâché de pouvoir me reposer et de ne pas y donner de conférence. J'ai rencontré la directrice de l'Alliance Française, Marie-Paule Serre, nous avons convenu que je ferai deux autres interventions FST en Décembre quand je reviendrai à l'IMSc avant d'aller à Puducherry (Pondicherry) puis à Kumbakonam pour la conférence SASTRA qui a lieu chaque année au moment de l'anniversaire de Ramanujan (j'y ai participé ces deux dernières années, et je fais partie du jury qui a décerné le prix SASTRA à Terence Tao l'an dernier et à Ben Green cette année). Ces deux prochaines conférences sont programmées le Lundi 17 Décembre à l'IMSc et le Mardi 18 Décembre à Anna University.

## Conclusion.

Comme l'an dernier Bruno Rouot a brillamment organisé ma tournée, c'est agréable de travailler dans de telles conditions quand tout est bien programmé. J'ai aussi été spécialement bien reçu à Mumbai par N. Saradha et T.N. Shorey, à Pune par S.A. Katre et Jean-Jacques Scaërou, à Hyderabad par Frédéric Dart et Rajat Tandon, à Kolkata par Amartya Dutta, à Guwahati par Rafikul Alam, à Trivandrum par José-Marie Cortès et à Chennai par Marie-Paule Serre. Merci à toutes et tous, j'ai pris beaucoup de plaisir à effectuer cette mission.

## Résumés

### *a From classical arithmetics to information science: some applications of abstract research*

Theoretical research in number theory has a long tradition, in particular in India and in France. Since many centuries, the main goal of these investigations is a better understanding of the abstract theory. Numbers are basic not only for mathematics, but more generally for all sciences; a deeper knowledge of their properties is fundamental for further progress. Remarkable achievements have been obtained, especially recently, as many conjectures have been settled. Yet, a number of old questions still remain open.

Among the unexpected features of recent developments in technology are the connections between classical arithmetic on the one hand, and new methods for reaching a better security of data transmission on the other. We will illustrate this aspect of the subject by showing how modern cryptography is related to our knowledge of some properties of natural numbers. As an example, we explain how prime numbers play a key role in the process which enables you to withdraw safely your money from your bank account using your PIN (Personal Identification Number) secret code.

### *b Some recent results in mathematics related to data transmission*

Starting with card tricks, we show how mathematical tools are used to detect and to correct errors occurring in the transmission of data.

These so-called "error-detecting codes" and "error-correcting codes" enable identification and correction of the errors caused by noise or other impairments during transmission from the transmitter to the receiver. They are used in compact disks to correct errors caused by scratches, in satellite broadcasting, in digital money transfers, in telephone connexions, they are useful for improving the reliability of data storage media as well as to correct errors cause when a hard drive fails. The National Aeronautics and Space Administration (NASA) has used many different error-correcting codes for deep-space telecommunications and orbital missions.

Most of the theory arises from earlier developments of mathematics which were far removed from any concrete application. One of the main tools is the theory of finite fields, which was invented by Galois in the XIXth century, for solving polynomial equations by means of radicals. The first error-correcting code happened to occur in a sport newspaper in Finland in 1930. The mathematical theory of information was created half a century ago by Claude Shannon. The mathematics behind these technical devices are being developed in a number of scientific centers all around the world, including in India and in France.

### *c History of irrational and transcendental numbers*

The transcendence proofs for constants of analysis are essentially all based on the seminal work by Ch. Hermite: his proof of the transcendence of the number  $e$  in 1873 is the prototype of the methods which have been subsequently developed. We first show how the founding paper by Hermite was influenced by earlier authors (Lambert, Euler, Fourier, Liouville), next we explain how his arguments have been expanded in several directions: Padé approximants, interpolation series, auxiliary functions.

### *d Density of rational points on Abelian Varieties*

In a recent paper on the rank of elliptic curves in cubic extension, H. Kisilevsky asks under which conditions the set of multiples of a rational point on an elliptic curve defined over the rational number field is dense in the space of complex points. The answer is easy in the CM case, while in the non-CM case a complete answer relies on a conjecture from transcendental number theory. This topic is closely related to a question raised by B. Mazur in 1994. Related questions have been considered by Dipendra Prasad in 2004, by Gopal Prasad and Andrei Rapinchuk in 2005. A complete answer to such questions would follow from a special case of Schanuel's conjecture: it would suffice to prove that linearly independent logarithms of algebraic numbers are algebraically independent. We shall explain the state of the art on this question.

Mis à jour le 19 Novembre 2007  
Michel Waldschmidt

---

Michel Waldschmidt  
Institut de Mathématiques de Jussieu  
Théorie des Nombres 7A28  
175 rue du Chevaleret 75013 PARIS  
Tél.: + 33 (0)1 44 27 53 36  
Fax: +33 (0)1 44 27 63 25  
<<http://www.institut.math.jussieu.fr/~miw>>  
<[miw@math.jussieu.fr](mailto:miw@math.jussieu.fr)>

---