Vendredi 15 juin 2012

Journée annuelle de la SMF

“Transcendance et irrationalité”

Questions de transcendance : grandes conjectures, petits progrès

Michel Waldschmidt

Institut de Mathématiques de Jussieu & CIMPA

http://www.math.jussieu.fr/∼miw/

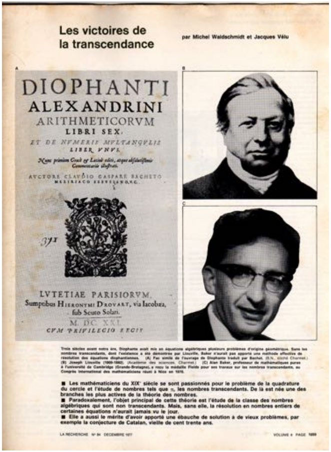
Résumé

Même si la théorie a fait des progrès remarquables ces dernières années et même si elle continue d'en faire, les nombres transcendants recèlent plus de grands problèmes qu'ils ne disposent de résultats. Nous présentons quelques uns des principaux défis sur lesquels on ne sait pas grand chose.

Nous parlerons notamment de conjectures de É. Borel, S. Schanuel, A. Grothendieck, Y. André, M. Kontsevich et D. Zagier

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

La Recherche, N°84, Décembre 1977, **8** 1059–1065



Les victoires de la transcendance

par Michel Waldschmidt et Jacques Vélu

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX.

ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

LVTETIAE PARISIORVM, Sumptibus Hieronymi Drovart, via Iacobæa, sub Scuto Solari.

M. DC. XXI.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

Trois siècles avant notre ère, Diophante avait mis en équations algébriques plusieurs problèmes d'origine géométrique. Sans les nombres transcendants, dont l'existence a été démontrée par Liouville, Baker n'aurait pas apporté une méthode effective de résolution des équations diophantiennes. (A) Fac similé de l'ouvrage de Diophante traduit par Bachet. (B.N., cliché Charmet.) (B) Joseph Liouville (1809-1882). (Académie des sciences, Charmet.) (C) Alan Baker, professeur de mathématiques pures à l'université de Cambridge (Grande-Bretagne), a reçu la médaille Fields pour ses travaux sur les nombres transcendants, au Congrès international des mathématiciens réuni à Nice en 1970.

■ Les mathématiciens du XIX[e] siècle se sont passionnés pour le problème de la quadrature du cercle et l'étude de nombres tels que π, les nombres transcendants. De là est née une des branches les plus actives de la théorie des nombres.
■ Paradoxalement, l'objet principal de cette théorie est l'étude de la classe des nombres algébriques qui sont non transcendants. Mais, sans elle, la résolution en nombres entiers de certaines équations n'aurait jamais vu le jour.
■ Elle a aussi le mérite d'avoir apporté une ébauche de solution à de vieux problèmes, par exemple la conjecture de Catalan, vieille de cent trente ans.

LA RECHERCHE N° 84 DÉCEMBRE 1977 — VOLUME 8 PAGE 1059

Les victoires de la transcendance

Séminaire Loi à l'ENS

Séminaire de Philosophie et Mathématiques
de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm
sous l'égide de Maurice Loi.

Triomphe de la transcendance

Séminaire de Philosophie et Mathématiques
de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm
sous l'égide de Maurice Loi.

Triomphe de la transcendance

Nombres rationnels, algébriques, transcendants

But : déterminer la nature arithmétique de constantes mathématiques :

rationnelles, algébriques irrationnelles, transcendantes.

Entiers rationnels : $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Nombres rationnels :

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q > 0, \operatorname{pgcd}(p, q) = 1\}.$$

Nombre algébrique : racine d'un polynôme à coefficients rationnels.

Nombre transcendant : nombre complexe qui n'est pas algébrique.

Nombres rationnels, algébriques, transcendants

But : déterminer la nature arithmétique de constantes mathématiques :

rationnelles, algébriques irrationnelles, transcendantes.

Entiers rationnels : $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Nombres rationnels :

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q > 0, \ \mathrm{pgcd}(p, q) = 1\}.$$

Nombre algébrique : racine d'un polynôme à coefficients rationnels.

Nombre transcendant : nombre complexe qui n'est pas algébrique.

Nombres rationnels, algébriques, transcendants

But : déterminer la nature arithmétique de constantes mathématiques :

rationnelles, algébriques irrationnelles, transcendantes.

Entiers rationnels : $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Nombres rationnels :

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q > 0, \ \mathrm{pgcd}(p,q) = 1\}.$$

Nombre algébrique : racine d'un polynôme à coefficients rationnels.

Nombre transcendant : nombre complexe qui n'est pas algébrique.

Nombres rationnels, algébriques, transcendants

But : déterminer la nature arithmétique de constantes mathématiques :

rationnelles, algébriques irrationnelles, transcendantes.

Entiers rationnels : $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Nombres rationnels :

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q > 0, \ \mathrm{pgcd}(p, q) = 1\}.$$

Nombre algébrique : racine d'un polynôme à coefficients rationnels.

Nombre transcendant : nombre complexe qui n'est pas algébrique.

Nombres rationnels, algébriques, transcendants

But : déterminer la nature arithmétique de constantes mathématiques :

rationnelles, algébriques irrationnelles, transcendantes.

Entiers rationnels : $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Nombres rationnels :

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q > 0, \ \mathrm{pgcd}(p, q) = 1\}.$$

Nombre algébrique : racine d'un polynôme à coefficients rationnels.

Nombre transcendant : nombre complexe qui n'est pas algébrique.

Partition des nombres complexes

Rationnels,

Algébriques irrationnels,

Transcendants

Première étape : irrationalité

• Critère d'irrationalité : développement dans une base (par exemple développement décimal, binaire)

Soit $b \geq 2$ un entier. *Un nombre réel* x *est rationnel si et seulement si son développement en base* b *est ultimement périodique.*

$b = 2$: développement binaire.

$b = 10$: développement décimal.

Par exemple le nombre décimal

$$0,1234567890123456789012345678 90\dots$$

est rationnel :

$$= \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Première étape : irrationalité

- Critère d'irrationalité : développement dans une base (par exemple développement décimal, binaire)

Soit $b \geq 2$ un entier. *Un nombre réel x est rationnel si et seulement si son développement en base b est ultimement périodique.*

$b = 2$: développement binaire.

$b = 10$: développement décimal.

Par exemple le nombre décimal

$$0,123456789012345678901234567890\dots$$

est rationnel :

$$= \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Première étape : irrationalité

- Critère d'irrationalité : développement dans une base (par exemple développement décimal, binaire)

Soit $b \geq 2$ un entier. *Un nombre réel x est rationnel si et seulement si son développement en base b est ultimement périodique.*

$b = 2$: développement binaire.

$b = 10$: développement décimal.

Par exemple le nombre décimal

$$0,123456789012345678901234567890\ldots$$

est rationnel :

$$= \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Première étape : irrationalité

• Critère d'irrationalité : développement dans une base (par exemple développement décimal, binaire)

Soit $b \geq 2$ un entier. *Un nombre réel x est rationnel si et seulement si son développement en base b est ultimement périodique.*

$b = 2$: développement binaire.

$b = 10$: développement décimal.

Par exemple le nombre décimal

$$0,123456789012345678901234567890\ldots$$

est rationnel :

$$= \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Première étape : irrationalité

• Critère d'irrationalité : développement dans une base (par exemple développement décimal, binaire)

Soit $b \geq 2$ un entier. *Un nombre réel x est rationnel si et seulement si son développement en base b est ultimement périodique.*

$b = 2$: développement binaire.

$b = 10$: développement décimal.

Par exemple le nombre décimal

$$0,123456789012345678901234567890\dots$$

est rationnel :

$$= \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Première étape : irrationalité

• Critère d'irrationalité : développement dans une base (par exemple développement décimal, binaire)

Soit $b \geq 2$ un entier. *Un nombre réel* x *est rationnel si et seulement si son développement en base* b *est ultimement périodique.*

$b = 2$: développement binaire.

$b = 10$: développement décimal.

Par exemple le nombre décimal

$$0,123456789012345678901234567890\ldots$$

est rationnel :

$$= \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Premiers chiffres décimaux de $\sqrt{2}$

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973
799073247846210703885038753432764157273501384623091229702492483
605585073721264412149709993583141322266592750559275579995050115
278206057147010955997160597027453459686201472851741864088919860
955232923048430871432145083976260362799525140798968725339654633
180882964062061525835239505474575028775996172983557522033753185
701135437460340849884716038689997069900481503054402779031645424
782306849293691862158057846311159666871301301561856898723723528
850926486124949771542183342042856860601468247207714358548741556
570696776537202264854470158588016207584749226572260020855844665
214583988939443709265918003113882464681570826301005948587040031
864803421948972782906410450726368813137398552561173220402450912
277002269411275736272804957381089675040183698683684507257993647
290607629969413804756548237289971803268024744206292691248590521
810044598421505911202494413417285314781058036033710773091828693
1471017111168391658172688941975871658215212822951848847 . . .

Premiers chiffres binaires de $\sqrt{2}$

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

1,011010100000100111100110011001111111001110111100110010010000
10001011001011111011000100110110011011101010100101010111110100
11111000111010110111101100000101110101000100100111011101010000
100110011101101000101111010110010000010110000011001100111001100
10001010101001010111111001000001100000100001110101011100010100
01011000011101010001011000111111110011011111101110010000011110
11011001110010000111101110100101010000101111001000011100111000
11110110100101001111000000001001000011100110110001111011111101
000100111011010001101001000100000000101110100001110100001010101
111000111110100111001010011000001011001110001100000000010001101
11100001100110111101111001010101100011011110010010001000101101
00010000100010110001010010001100000101010111100011100100010111
10111110001001110001100111100011011010101101010001010001110001
01110110111111010011101110011001011001010100110001101000011001
10001111100111100100001001101111101010010111100010010000011111
000001101101110010110000010111011101010101001001010000001000100
11001000000100000011001010010010101000000010011100101001010 . . .

Calcul des décimales de $\sqrt{2}$

1 542 décimales calculées à la main par Horace Uhler en 1951

14 000 décimales calculées en 1967

1 000 000 décimales in 1971

$137 \cdot 10^9$ décimales calculées par Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi en 1997 par Hitachi SR2201 en 7 heures 31 minutes.

- Motivation : calcul de π.

Calcul des décimales de $\sqrt{2}$

1 542 décimales calculées à la main par Horace Uhler en 1951

14 000 décimales calculées en 1967

1 000 000 décimales in 1971

$137 \cdot 10^9$ décimales calculées par Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi en 1997 par Hitachi SR2201 en 7 heures 31 minutes.

- Motivation : calcul de π.

Calcul des décimales de $\sqrt{2}$

$1\,542$ décimales calculées à la main par Horace Uhler en 1951

$14\,000$ décimales calculées en 1967

$1\,000\,000$ décimales in 1971

$137 \cdot 10^9$ décimales calculées par Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi en 1997 par Hitachi SR2201 en 7 heures 31 minutes.

- Motivation : calcul de π.

Calcul des décimales de $\sqrt{2}$

1 542 décimales calculées à la main par Horace Uhler en 1951

14 000 décimales calculées en 1967

1 000 000 décimales in 1971

$137 \cdot 10^9$ décimales calculées par Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi en 1997 par Hitachi SR2201 en 7 heures 31 minutes.

- Motivation : calcul de π.

Calcul des décimales de $\sqrt{2}$

$1\,542$ décimales calculées à la main par Horace Uhler en 1951

$14\,000$ décimales calculées en 1967

$1\,000\,000$ décimales in 1971

$137 \cdot 10^9$ décimales calculées par Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi en 1997 par Hitachi SR2201 en 7 heures 31 minutes.

- Motivation : calcul de π.

Racine de 2 sur la toile

Premiers chiffres décimaux de $\sqrt{2}$:

$1,\ 4,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 2,\ 3,\ 7,\ 3,\ 0,\ 9,\ 5,\ 0,\ 4,\ 8,\ 8,\ 0,\ 1,$

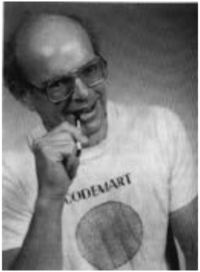
$6,\ 8,\ 8,\ 7,\ 2,\ 4,\ 2,\ 0,\ 9,\ 6,\ 9,\ 8,\ 0,\ 7,\ 8,\ 5,\ 6,\ 9,\ 6,\ 7,\ 1,\ 8,\ \ldots$

`http://oeis.org/A002193`

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

`http://oeis.org/`

Neil J. A. Sloane



Deuxième critère : fraction continue

Un nombre réel est irrationnel si et seulement si son développement en fraction continue régulière est infini.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Deuxième critère : fraction continue

Un nombre réel est irrationnel si et seulement si son développement en fraction continue régulière est infini.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Deuxième critère : fraction continue

Un nombre réel est irrationnel si et seulement si son développement en fraction continue régulière est infini.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Irrationnels quadratiques

Un nombre réel est *quadratique* (algébrique de degré 2) si et seulement si son développement en fraction continue régulière est ultimement périodique.

• Constantes de l'analyse, limites, séries, intégrales, produits infinis, tout procédé infini convergent (analyse infinitésimale).

Irrationnels quadratiques

Un nombre réel est *quadratique* (algébrique de degré 2) si et seulement si son développement en fraction continue régulière est ultimement périodique.

• Constantes de l'analyse, limites, séries, intégrales, produits infinis, tout procédé infini convergent (analyse infinitésimale).

Irrationnels quadratiques

Un nombre réel est *quadratique* (algébrique de degré 2) si et seulement si son développement en fraction continue régulière est ultimement périodique.

• Constantes de l'analyse, limites, séries, intégrales, produits infinis, tout procédé infini convergent (analyse infinitésimale).

Irrationalité de e

Leonhard Euler

(1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

(1737) Fraction continue de e :

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

e est irrationnel :

$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1 \dots]$

Irrationalité de e

skip

Leonhard Euler

(1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

(1737) Fraction continue de e :

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

e est irrationnel :

$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1 \ldots]$

Irrationalité de e

skip

Leonhard Euler

(1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

(1737) Fraction continue de e :

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

e est irrationnel :
$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1 \dots]$

Joseph Fourier (1768 - 1830)

J. Fourier (1815) : démonstration de l'irrationalité de e par le développement en série :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{N!} + r_N$$

avec $r_N > 0$ et $N! r_N \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Cours d'Analyse à l'École Polytechnique, Paris, 1815.

Variante de la démonstration de Fourier

C.L. Siegel (1929) : séries alternées :
$e^{-1} = 0,367\,879\ldots$ est irrationnel

Pour N impair,

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{N!} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{(N+1)!}$$

$$\frac{a_N}{N!} < e^{-1} < \frac{a_N}{N!} + \frac{1}{(N+1)!}, \quad a_N \in \mathbf{Z}$$

$$a_N < N!e^{-1} < a_N + 1.$$

Donc $N!e^{-1}$ n'est pas un entier.

Variante de la démonstration de Fourier

C.L. Siegel (1929) : séries alternées :
$e^{-1} = 0,367\,879\,\ldots$ est irrationnel

Pour N impair,

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{N!} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{(N+1)!}$$

$$\frac{a_N}{N!} < e^{-1} < \frac{a_N}{N!} + \frac{1}{(N+1)!}, \quad a_N \in \mathbf{Z}$$

$$a_N < N!e^{-1} < a_N + 1.$$

Donc $N!e^{-1}$ n'est pas un entier.

Variante de la démonstration de Fourier

C.L. Siegel (1929) : séries alternées :
$e^{-1} = 0,367\,879\ldots$ est irrationnel

Pour N impair,

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{N!} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{(N+1)!}$$

$$\frac{a_N}{N!} < e^{-1} < \frac{a_N}{N!} + \frac{1}{(N+1)!}, \quad a_N \in \mathbf{Z}$$

$$a_N < N!e^{-1} < a_N + 1.$$

Donc $N!e^{-1}$ n'est pas un entier.

Variante de la démonstration de Fourier

C.L. Siegel (1929) : séries alternées :
$e^{-1} = 0,367\,879\ \ldots$ est irrationnel

Pour N impair,

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{N!} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{(N+1)!}$$

$$\frac{a_N}{N!} < e^{-1} < \frac{a_N}{N!} + \frac{1}{(N+1)!}, \quad a_N \in \mathbf{Z}$$

$$a_N < N!e^{-1} < a_N + 1.$$

Donc $N!e^{-1}$ n'est pas un entier.

Variante de la démonstration de Fourier

C.L. Siegel (1929) : séries alternées :
$e^{-1} = 0,367\,879\ldots$ est irrationnel

Pour N impair,

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{N!} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{(N+1)!}$$

$$\frac{a_N}{N!} < e^{-1} < \frac{a_N}{N!} + \frac{1}{(N+1)!}, \quad a_N \in \mathbf{Z}$$

$$a_N < N!e^{-1} < a_N + 1.$$

Donc $N!e^{-1}$ n'est pas un entier.

Développement en fraction continue de π

$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 \dots]$

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

http://oeis.org/A001203

On sait que le développement est infini, qu'il n'est pas ultimement périodique, mais on ne sait essentiellement rien d'autre.

En particulier on ne sait pas si les quotients partiels sont bornés. On prévoit qu'ils ne le sont pas :

Est-il vrai que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p/q \in \mathbf{Q}$ tel que $|q\pi - p| < \varepsilon/q$?

Développement en fraction continue de π

$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 \dots]$

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

http://oeis.org/A001203

On sait que le développement est infini, qu'il n'est pas ultimement périodique, mais on ne sait essentiellement rien d'autre.

En particulier on ne sait pas si les quotients partiels sont bornés. On prévoit qu'ils ne le sont pas :

Est-il vrai que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p/q \in \mathbf{Q}$ tel que $|q\pi - p| < \varepsilon/q$?

Développement en fraction continue de π

$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 \ldots]$

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

http://oeis.org/A001203

On sait que le développement est infini, qu'il n'est pas ultimement périodique, mais on ne sait essentiellement rien d'autre.

En particulier on ne sait pas si les quotients partiels sont bornés. On prévoit qu'ils ne le sont pas :

Est-il vrai que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p/q \in \mathbf{Q}$ tel que $|q\pi - p| < \varepsilon/q$?

Développement en fraction continue de π

$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84,$
$2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2,$
$3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2,$
$4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 \dots]$

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

http://oeis.org/A001203

On sait que le développement est infini, qu'il n'est pas ultimement périodique, mais on ne sait essentiellement rien d'autre.

En particulier on ne sait pas si les quotients partiels sont bornés. On prévoit qu'ils ne le sont pas :

Est-il vrai que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p/q \in \mathbf{Q}$ tel que $|q\pi - p| < \varepsilon/q$?

Développement en fraction continue de π

$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84,$
$2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2,$
$3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2,$
$4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 \dots]$

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi

http://oeis.org/A001203

On sait que le développement est infini, qu'il n'est pas ultimement périodique, mais on ne sait essentiellement rien d'autre.

En particulier on ne sait pas si les quotients partiels sont bornés. On prévoit qu'ils ne le sont pas :

Est-il vrai que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p/q \in \mathbf{Q}$ tel que $|q\pi - p| < \varepsilon/q$?

Irrationalité de π

Āryabhaṭa, né en 476 AD : $\pi \sim 3,1416$.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né en 1444 AD : *Pourquoi une valeur approchée a-t-elle été donnée, et non la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

En Europe : controverse Huygens –Leibniz vs Gregory au XVIIème siècle.

Irrationalité de π

Āryabhaṭa, né en 476 AD : $\pi \sim 3,1416$.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né en 1444 AD : *Pourquoi une valeur approchée a-t-elle été donnée, et non la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

En Europe : controverse Huygens –Leibniz vs Gregory au XVIIème siècle.

Irrationalité de π

Āryabhaṭa, né en 476 AD : $\pi \sim 3,1416$.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né en 1444 AD : *Pourquoi une valeur approchée a-t-elle été donnée, et non la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

En Europe : controverse Huygens –Leibniz vs Gregory au XVIIème siècle.

Irrationalité de π

Āryabhaṭa, né en 476 AD : $\pi \sim 3,1416$.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né en 1444 AD : *Pourquoi une valeur approchée a-t-elle été donnée, et non la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

En Europe : controverse Huygens –Leibniz vs Gregory au XVIIème siècle.

Irrationalité de π

Āryabhaṭa, né en 476 AD : $\pi \sim 3,1416$.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né en 1444 AD : *Pourquoi une valeur approchée a-t-elle été donnée, et non la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

En Europe : controverse Huygens –Leibniz vs Gregory au XVIIème siècle.

Irrationalité de π

Āryabhaṭa, né en 476 AD : $\pi \sim 3,1416$.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né en 1444 AD : *Pourquoi une valeur approchée a-t-elle été donnée, et non la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

En Europe : controverse Huygens –Leibniz vs Gregory au XVIIème siècle.

Irrationalité de π

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777)
Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques,
Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **17** (1761), p. 265-322 ;
lu en 1767 ; Math. Werke, t. II.

$\tan(v)$ est irrationnel quand $v \neq 0$ est rationnel.
Par conséquent, π est irrationnel, puisque $\tan(\pi/4) = 1$.

Lambert et Frédérick II, Roi de Prusse

— Que savez vous, Lambert ?
— Tout, Sire.
— Et de qui le tenez–vous ?
— De moi-même !

Quadrature du cercle

Marie Jacob
La quadrature du cercle
Un problème
à la mesure des Lumières
Fayard (2006).

Approximation diophantienne

Un nombre rationnel est mal approché par les autres nombres rationnels, alors qu'un nombre irrationnel admet de bonnes approximations.

Si $x = a/b \in \mathbf{Q}$, alors pour $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $p/q \neq x$ on a

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{b}.$$

Par conséquent, pour un nombre réel x, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p/q tel que $0 < |qx - p| < \varepsilon$, alors x est irrationnel.

Approximation diophantienne

Un nombre rationnel est mal approché par les autres nombres rationnels, alors qu'un nombre irrationnel admet de bonnes approximations.

Si $x = a/b \in \mathbf{Q}$, alors pour $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $p/q \neq x$ on a

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{b}.$$

Par conséquent, pour un nombre réel x, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p/q tel que $0 < |qx - p| < \varepsilon$, alors x est irrationnel.

Approximation diophantienne

Un nombre rationnel est mal approché par les autres nombres rationnels, alors qu'un nombre irrationnel admet de bonnes approximations.

Si $x = a/b \in \mathbf{Q}$, alors pour $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $p/q \neq x$ on a

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{b} \cdot$$

Par conséquent, pour un nombre réel x, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p/q tel que $0 < |qx - p| < \varepsilon$, alors x est irrationnel.

Approximation de nombres irrationnels

Si $x \in \mathbf{R}$ est irrationnel, alors il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ avec

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Il suffit d'obtenir $0 < |qx - p| < \varepsilon$ pour montrer l'irrationalité de x. Or si x est irrationnel on a bien mieux : $0 < |qx - p| < 1/q$.

Approximation de nombres irrationnels

Si $x \in \mathbf{R}$ est irrationnel, alors il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ avec

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Il suffit d'obtenir $0 < |qx - p| < \varepsilon$ pour montrer l'irrationalité de x. Or si x est irrationnel on a bien mieux : $0 < |qx - p| < 1/q$.

Principe des tiroirs (1842)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
1805 - 1859

Plus de nids que de pigeons

Plus de pigeons que de nids

Adolf Hurwitz (1859 - 1919)

Théorème de Hurwitz (1891) : *Pour tout nombre réel irrationnel x, il existe une infinité de p/q tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Nombre d'Or
$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618\,033 \ldots$

Le résultat de Hurwitz est optimal.

Les fractions continues sont de retour

La démonstration de Hurwitz repose sur la théorie des fractions continues.

On peut démontrer le théorème de Hurwitz en utilisant les suites de Farey.

John Farey (1766 – 1826)

Les fractions continues sont de retour

La démonstration de Hurwitz repose sur la théorie des fractions continues.

On peut démontrer le théorème de Hurwitz en utilisant les suites de Farey.

John Farey (1766 – 1826)

Indépendance linéaire, transcendance, indépendance algébrique

Critères d'indépendance linéaire généralisant le critère d'irrationalité : Ch. Hermite, C.L. Siegel, Yu.V. Nesterenko.

x est transcendant si et seulement si les nombres $1, x, x^2, \dots, x^n \dots$ sont linéairement indépendants

$x_1, \dots, x_m$ sont algébriquement indépendants si et seulement si les nombres $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ sont linéairement indépendants

Indépendance linéaire, transcendance, indépendance algébrique

Critères d'indépendance linéaire généralisant le critère d'irrationalité : Ch. Hermite, C.L. Siegel, Yu.V. Nesterenko.

x est transcendant si et seulement si les nombres $1, x, x^2, \ldots, x^n \ldots$ sont linéairement indépendants

$x_1, \ldots, x_m$ sont algébriquement indépendants si et seulement si les nombres $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ sont linéairement indépendants

Indépendance linéaire, transcendance, indépendance algébrique

Critères d'indépendance linéaire généralisant le critère d'irrationalité : Ch. Hermite, C.L. Siegel, Yu.V. Nesterenko.

x est transcendant si et seulement si les nombres $1, x, x^2, \dots, x^n \dots$ sont linéairement indépendants

$x_1, \dots, x_m$ sont algébriquement indépendants si et seulement si les nombres $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ sont linéairement indépendants

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Émergence du concept de transcendance en mathématiques (objets, courbes, expressions, puis nombres) à partir de 1673 par Gottfried Wilhelm Leibniz.

1684 : *“Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, qua nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, ...”*

Breger, Herbert. *Leibniz’ Einführung des Transzendenten*, 300 Jahre “Nova Methodus” von G. W. Leibniz (1684-1984), p. 119-32. Franz Steiner Verlag (1986).

Serfati, Michel. *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*, Editions APMEP, Paris (1992).

Existence de nombres transcendants (1844)

J. Liouville (1809 - 1882)

Premiers exemples de
nombres transcendants :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110\,001\,000\,000\,0\ldots$$

est un nombre transcendant.

Georg Cantor (1845 - 1918)

L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, celui des nombres réels (ou complexes) ne l'est pas.

G. Cantor (1874 et 1891).

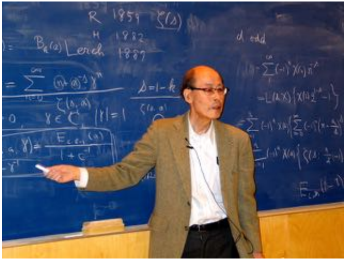
Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941)

Presque tous les nombres pour la mesure de Lebesgue sont transcendants.

Presque tous les nombres sont transcendants

Meta énoncé : *tout nombre donné par une limite, qui n'est pas de façon évidente rationnelle (resp. algébrique), est irrationnel (resp. transcendant).*

Goro Shimura



Valeurs de séries hypergéométriques

Jürgen Wolfart

Frits Beukers

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}; \frac{1323}{1331}\right) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{11} = 1,365\,870\ \ldots,$$

où $F(a, b, c; x)$ désigne la fonction hypergéométrique de Euler–Gauss

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n$$

$$|x| < 1, \ (\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1).$$

Résultats de transcendance connus et inconnus

Connu :

$$e,\ \pi,\ \log 2,\ e^{\sqrt{2}},\ e^{\pi},\ 2^{\sqrt{2}},\ \Gamma(1/4).$$

Pas connu :

$$e+\pi,\ e\pi,\ \log\pi,\ \pi^e,\ e^{\pi^2},\ e^e,\ (\log 2)(\log 3),\ 2^{\log 2},\ 2^{\log 3/\log 5},$$

$$\zeta(5),\ \Gamma(1/5),\ \text{Constante d'Euler}$$

Comment se fait–il que l'on sache démontrer la transcendance du nombre e^{π} et qu'on ne sache même pas démontrer l'irrationalité du nombre π^e ?
Réponse : $e^{\pi}=(-1)^{-i}$.

Résultats de transcendance connus et inconnus

Connu :

$$e, \ \pi, \ \log 2, \ e^{\sqrt{2}}, \ e^{\pi}, \ 2^{\sqrt{2}}, \ \Gamma(1/4).$$

Pas connu :

$$e+\pi, \ e\pi, \ \log \pi, \ \pi^{e}, \ e^{\pi^2}, \ e^{e}, \ (\log 2)(\log 3), \ 2^{\log 2}, \ 2^{\log 3/\log 5},$$

$$\zeta(5), \ \Gamma(1/5), \text{Constante d'Euler}$$

Comment se fait–il que l'on sache démontrer la transcendance du nombre e^{π} et qu'on ne sache même pas démontrer l'irrationalité du nombre π^{e} ?
Réponse : $e^{\pi} = (-1)^{-i}$.

Résultats de transcendance connus et inconnus

Connu :

$$e,\ \pi,\ \log 2,\ e^{\sqrt{2}},\ e^{\pi},\ 2^{\sqrt{2}},\ \Gamma(1/4).$$

Pas connu :

$$e+\pi,\ e\pi,\ \log\pi,\ \pi^e,\ e^{\pi^2},\ e^e,\ (\log 2)(\log 3),\ 2^{\log 2},\ 2^{\log 3/\log 5},$$

$$\zeta(5),\ \Gamma(1/5), \text{Constante d'Euler}$$

Comment se fait–il que l'on sache démontrer la transcendance du nombre e^{π} et qu'on ne sache même pas démontrer l'irrationalité du nombre π^e ?
Réponse : $e^{\pi} = (-1)^{-i}$.

Résultats de transcendance connus et inconnus

Connu :

$$e,\ \pi,\ \log 2,\ e^{\sqrt{2}},\ e^{\pi},\ 2^{\sqrt{2}},\ \Gamma(1/4).$$

Pas connu :

$$e+\pi,\ e\pi,\ \log\pi,\ \pi^{e},\ e^{\pi^2},\ e^{e},\ (\log 2)(\log 3),\ 2^{\log 2},\ 2^{\log 3/\log 5},$$

$$\zeta(5),\ \Gamma(1/5), \text{Constante d'Euler}$$

Comment se fait–il que l'on sache démontrer la transcendance du nombre e^{π} et qu'on ne sache même pas démontrer l'irrationalité du nombre π^{e} ?
Réponse : $e^{\pi}=(-1)^{-i}$.

Valeurs numériques

On ne sait pas montrer que les nombres suivants sont irrationnels, on prédit qu'ils sont transcendants :

$$e + \pi = 5,859\,874\ldots, \qquad e\pi = 8,539\,734\ldots,$$

$$\pi^e = 22,459\,157\ldots, \qquad \log \pi = 1,144\,729\ldots,$$

$$e^{\pi^2} = 19\,333,689\,074\ldots, \qquad e^e = 15,154\,262\ldots,$$

$$(\log 2)(\log 3) = 0,761\,500\ldots, \qquad 2^{\log 2} = 1,616\,806\ldots,$$

$$2^{\log 3/\log 5} = 1,605\,036\ldots, \qquad \zeta(5) = 1,036\,927\ldots,$$

$$\Gamma(1/5) = 4,590\,843\ldots, \qquad \gamma = 0,577\,215\ldots$$

La fonction zêta de Riemann

La fonction
$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$
a été étudiée par Euler (1707– 1783)
pour les valeurs de s dans $\mathbf{Z}$
et par Riemann (1859) pour les valeurs complexes de s.

Euler :pour tout entier pair $s \geq 2$, le nombre $\zeta(s)$ est un multiple rationnel de π^s.

Exemples : $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, $\zeta(8) = \pi^8/9450 \cdots$

La fonction zêta de Riemann

La fonction

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

a été étudiée par Euler (1707– 1783)
pour les valeurs de s dans $\mathbf{Z}$
et par Riemann (1859) pour les valeurs complexes de s.

Euler :pour tout entier pair $s \geq 2$, le nombre $\zeta(s)$ est un multiple rationnel de π^s.

Exemples : $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, $\zeta(8) = \pi^8/9450 \cdots$

La fonction zêta de Riemann

La fonction

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

a été étudiée par Euler (1707– 1783)
pour les valeurs de s dans $\mathbf{Z}$
et par Riemann (1859) pour les valeurs complexes de s.

Euler :pour tout entier pair $s \geq 2$, le nombre $\zeta(s)$ est un multiple rationnel de π^s.

Exemples : $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, $\zeta(8) = \pi^8/9450 \cdots$

Fonction zêta de Riemann

Les nombres $\zeta(2k)$, $k \geq 1$ sont transcendants (F. Lindemann, 1882, transcendance de π), le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel (R. Apéry, 1976).

Le nombre

$$\zeta(5) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^5} = 1,036\,927\ldots$$

est–il irrationnel ?

T. Rivoal (2000) : parmi les nombres $\zeta(2n+1)$, il y en a une infinité qui sont irrationnels.

Fonction zêta de Riemann

Les nombres $\zeta(2k)$, $k \geq 1$ sont transcendants (F. Lindemann, 1882, transcendance de π), le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel (R. Apéry, 1976).

Le nombre

$$\zeta(5) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^5} = 1,036\,927\ldots$$

est–il irrationnel ?

T. Rivoal (2000) : parmi les nombres $\zeta(2n+1)$, il y en a une infinité qui sont irrationnels.

Fonction zêta de Riemann

Les nombres $\zeta(2k)$, $k \geq 1$ sont transcendants (F. Lindemann, 1882, transcendance de π), le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel (R. Apéry, 1976).

Le nombre

$$\zeta(5) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^5} = 1{,}036\,927\ldots$$

est–il irrationnel ?

T. Rivoal (2000) : parmi les nombres $\zeta(2n+1)$, il y en a une infinité qui sont irrationnels.

Irrationalité d'une infinité de valeurs impaires de zêta

Tanguy Rivoal (2000)

Soit $\epsilon > 0$. *Pour tout entier* a *impair suffisamment grand, la dimension du* $\mathbf{Q}$*–espace vectoriel engendré par les nombres* $1,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \cdots, \zeta(a)$ *est au moins*

$$\frac{1-\epsilon}{1+\log 2}\log a.$$

Adolf Hurwitz (1859 - 1919)

Fonction zêta de Hurwitz :
Pour $z \in \mathbf{C}$ $z \neq 0$ et $\Re e(s) > 1$,

$$\zeta(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^s}$$

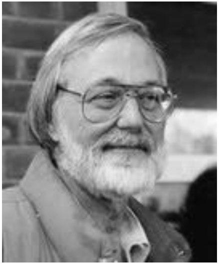
$$\zeta(s, 1) = \zeta(s)$$

(Fonction zêta de Riemann)

Conjecture de Chowla et Milnor

Sarvadaman Chowla (1907 - 1995)

John Willard Milnor



Pour k et q entiers > 1, les $\varphi(q)$ nombres

$$\zeta(k, a/q), \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Sanoli Gun, Ram Murty et Purusottam Rath

La Conjecture de Chowla-Milnor pour $q = 4$ implique l'irrationalité des nombres $\zeta(2n+1)/\pi^{2n+1}$ pour $n \geq 1$.
Conjecture de Chowla-Milnor forte (2009) : *Pour k et q entiers > 1, les $1 + \varphi(q)$ nombres*

$$1 \quad \textit{et} \quad \zeta(k, a/q), \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.
Pour $k > 1$ impair, le nombre $\zeta(k)$ est irrationnel si et seulement si la conjecture de Chowla-Milnor forte est vraie pour cette valeur de k et pour au moins une des deux valeurs $q = 3$ et $q = 4$.
Donc la conjecture de Chowla-Milnor forte est vraie pour $k = 3$ (Apéry) et aussi pour une infinité de k (Rivoal).

Sanoli Gun, Ram Murty et Purusottam Rath

La Conjecture de Chowla-Milnor pour $q = 4$ implique l'irrationalité des nombres $\zeta(2n+1)/\pi^{2n+1}$ pour $n \geq 1$.

Conjecture de Chowla-Milnor forte (2009) : *Pour k et q entiers > 1, les $1 + \varphi(q)$ nombres*

$$1 \quad et \quad \zeta(k, a/q), \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Pour $k > 1$ impair, le nombre $\zeta(k)$ est irrationnel si et seulement si la conjecture de Chowla-Milnor forte est vraie pour cette valeur de k et pour au moins une des deux valeurs $q = 3$ et $q = 4$.

Donc la conjecture de Chowla-Milnor forte est vraie pour $k = 3$ (Apéry) et aussi pour une infinité de k (Rivoal).

Sanoli Gun, Ram Murty et Purusottam Rath

La Conjecture de Chowla-Milnor pour $q = 4$ implique l'irrationalité des nombres $\zeta(2n+1)/\pi^{2n+1}$ pour $n \geq 1$.

Conjecture de Chowla-Milnor forte (2009) : *Pour k et q entiers > 1, les $1 + \varphi(q)$ nombres*

$$1 \quad et \quad \zeta(k, a/q), \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Pour $k > 1$ impair, le nombre $\zeta(k)$ est irrationnel si et seulement si la conjecture de Chowla-Milnor forte est vraie pour cette valeur de k et pour au moins une des deux valeurs $q = 3$ et $q = 4$.

Donc la conjecture de Chowla-Milnor forte est vraie pour $k = 3$ (Apéry) et aussi pour une infinité de k (Rivoal).

Sanoli Gun, Ram Murty et Purusottam Rath

La Conjecture de Chowla-Milnor pour $q = 4$ implique l'irrationalité des nombres $\zeta(2n+1)/\pi^{2n+1}$ pour $n \geq 1$.
Conjecture de Chowla-Milnor forte (2009) : *Pour k et q entiers > 1, les $1 + \varphi(q)$ nombres*

$$1 \quad et \quad \zeta(k, a/q), \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.
Pour $k > 1$ impair, le nombre $\zeta(k)$ est irrationnel si et seulement si la conjecture de Chowla-Milnor forte est vraie pour cette valeur de k et pour au moins une des deux valeurs $q = 3$ et $q = 4$.
Donc la conjecture de Chowla-Milnor forte est vraie pour $k = 3$ (Apéry) et aussi pour une infinité de k (Rivoal).

Euler–Mascheroni

Lorenzo Mascheroni
(1750 – 1800)

La constante d'Euler est

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$= 0,577\,215\,\ldots$$

Est-ce un nombre rationnel ?

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= -\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)dxdy}{(1-xy)\log(xy)}.$$

Euler–Mascheroni

Lorenzo Mascheroni
(1750 – 1800)

La constante d'Euler est

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$= 0,577\,215\ \dots$$

Est-ce un nombre rationnel ?

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= -\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)dxdy}{(1-xy)\log(xy)}.$$

Constante d'Euler

Travaux récents de *J. Sondow* inspirés par la variante par F. Beukers de la démonstration d'Apéry.

Frits Beukers

Jonathan Sondow

`http://home.earthlink.net/~jsondow/`

Jonathan Sondow http://home.earthlink.net/~jsondow/

$$\gamma = \int_0^\infty \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2 \binom{t+k}{k}} dt$$

$$\gamma = \lim_{s \to 1+} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{s^n} \right)$$

$$\gamma = \int_1^\infty \frac{1}{2t(t+1)} F\begin{pmatrix} 1, & 2, & 2 \\ 3, & t+2 \end{pmatrix} dt.$$

La fonction Gamma d'Euler

Le nombre

$$\Gamma(1/5) = 4,590\,843\ \ldots$$

est–il irrationnel ?

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z \cdot \frac{dt}{t}$$

Voici l'ensemble des nombres rationnels $z \in (0, 1)$ pour lesquels la réponse est connue (et pour ces nombres, la valeur de Gamma est transcendante) :

$$r \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right\} \qquad \pmod 1.$$

La fonction Gamma d'Euler

Le nombre

$$\Gamma(1/5) = 4,590\,843\ \ldots$$

est–il irrationnel ?

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z \cdot \frac{dt}{t}$$

Voici l'ensemble des nombres rationnels $z \in (0,1)$ pour lesquels la réponse est connue (et pour ces nombres, la valeur de Gamma est transcendante) :

$$r \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right\} \qquad (\mathrm{mod}\ 1).$$

La fonction Gamma d'Euler

Le nombre

$$\Gamma(1/5) = 4,590\,843\ \ldots$$

est–il irrationnel ?

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z \cdot \frac{dt}{t}$$

Voici l'ensemble des nombres rationnels $z \in (0,1)$ pour lesquels la réponse est connue (et pour ces nombres, la valeur de Gamma est transcendante) :

$$r \in \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6} \right\} \qquad \pmod 1.$$

Valeurs de la fonction Beta : Th. Schneider 1948

Fonctions Gamma et Beta d'Euler

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^z \cdot \frac{dt}{t}$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Relations standard entre les valeurs de Beta

(Translation) :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

(Réflexion) :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

(Multiplication) : pour tout entier positif n,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-na+(1/2)} \Gamma(na).$$

Conjecture de Rohrlich

Conjecture (D. Rohrlich) *Toute relation multiplicative*

$$\pi^{b/2} \prod_{a \in \mathbf{Q}} \Gamma(a)^{m_a} \in \overline{\mathbf{Q}},$$

avec b *et* m_a *dans* $\mathbf{Z}$*, est dans l'idéal engendré par les relations standard.*

Conjecture (S. Lang) *Toute relation de dépendance algébrique entre les nombres* $(2\pi)^{-1/2}\Gamma(a)$ *avec* $a \in \mathbf{Q}$ *est dans l'idéal engendré par les relations standard.* (distribution impaire universelle).

Conjecture de Rohrlich

Conjecture (D. Rohrlich) *Toute relation multiplicative*

$$\pi^{b/2} \prod_{a \in \mathbf{Q}} \Gamma(a)^{m_a} \in \overline{\mathbf{Q}},$$

avec b et m_a dans $\mathbf{Z}$, est dans l'idéal engendré par les relations standard.

Conjecture (S. Lang) *Toute relation de dépendance algébrique entre les nombres $(2\pi)^{-1/2}\Gamma(a)$ avec $a \in \mathbf{Q}$ est dans l'idéal engendré par les relations standard.*
(distribution impaire universelle).

Conjectures

Borel 1909, 1950 (développements binaires ou décimaux)

Schanuel 1964 (fonction exponentielle)

Grothendieck 1960 (périodes de variétés abéliennes)

Rohrlich et Lang 1970 (valeurs de la fonction Gamma)

André 1990 (motifs)

Kontsevich et Zagier 2001 (périodes)

Émile Borel : 1950

(1871–1956)

La suite des chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ *devrait se comporter comme une suite aléatoire, chacun des chiffres apparaissant avec la même fréquence* $1/10$, *chaque suite de* 2 *chiffres apparaissant avec la même fréquence* $1/100$ ...

Émile Borel (1871–1956)

- *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques,*
  Palermo Rend. **27**, 247-271 (1909).
  Jahrbuch Database JFM 40.0283.01
  `http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html`

- *Sur les chiffres décimaux de* $\sqrt{2}$ *et divers problèmes de probabilités en chaînes,*
  C. R. Acad. Sci., Paris **230**, 591-593 (1950).
  Zbl 0035.08302

Complexité du développement b–adique d'un nombre réel algébrique irrationnel

Soit $b \geq 2$ un entier.

• É. Borel (1909 et 1950) : *Le développement b–adique d'un nombre réel algébrique irrationnel devrait satisfaire certaines des lois vérifiées par presque tous les nombres réels (pour la mesure de Lebesgue).*

Conjecture d'Émile Borel

Conjecture (É. Borel). *Soient x un nombre réel algébrique irrationnel, $b \geq 3$ un entier positif et a un entier dans l'intervalle $0 \leq a \leq b-1$. Alors le chiffre a apparaît au moins une fois dans le développement b–adique de x.*

Corollaire. *Chaque suite de chiffres apparaît une infinité de fois dans le développement b–adique de tout nombre réel algébrique irrationnel.*
(Considérer les puissances de b).

• Un nombre réel ayant un développement en base b suffisamment *régulier*, mais non ultimement périodique, devrait être transcendant.

Conjecture d'Émile Borel

Conjecture (É. Borel). *Soient x un nombre réel algébrique irrationnel, $b \geq 3$ un entier positif et a un entier dans l'intervalle $0 \leq a \leq b-1$. Alors le chiffre a apparaît au moins une fois dans le développement b–adique de x.*
Corollaire. *Chaque suite de chiffres apparaît une infinité de fois dans le développement b–adique de tout nombre réel algébrique irrationnel.*
(Considérer les puissances de b).

• Un nombre réel ayant un développement en base b suffisamment *régulier*, mais non ultimement périodique, devrait être transcendant.

Conjecture d'Émile Borel

Conjecture (É. Borel). *Soient x un nombre réel algébrique irrationnel, $b \geq 3$ un entier positif et a un entier dans l'intervalle $0 \leq a \leq b-1$. Alors le chiffre a apparaît au moins une fois dans le développement b–adique de x.*
Corollaire. *Chaque suite de chiffres apparaît une infinité de fois dans le développement b–adique de tout nombre réel algébrique irrationnel.*
(Considérer les puissances de b).

• Un nombre réel ayant un développement en base b suffisamment *régulier*, mais non ultimement périodique, devrait être transcendant.

Conjecture d'Émile Borel

Conjecture (É. Borel). *Soient x un nombre réel algébrique irrationnel, $b \geq 3$ un entier positif et a un entier dans l'intervalle $0 \leq a \leq b-1$. Alors le chiffre a apparaît au moins une fois dans le développement b–adique de x.*
Corollaire. *Chaque suite de chiffres apparaît une infinité de fois dans le développement b–adique de tout nombre réel algébrique irrationnel.*
(Considérer les puissances de b).

• Un nombre réel ayant un développement en base b suffisamment *régulier*, mais non ultimement périodique, devrait être transcendant.

Que sait-on sur le développement décimal de $\sqrt{2}$?

La suite des chiffres de $\sqrt{2}$ (en une base $b \geq 2$ quelconque) n'est pas ultimement périodique.

Parmi les chiffres décimaux

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

au moins deux apparaissent une infinité de fois.

Dans le développement binaire, chacun des chiffres 0 et 1 apparaît une infinité de fois, de même que chacune des deux suites de deux chiffres 01 et 10.

C'est à peu près tout ce qui est connu.

Que sait-on sur le développement décimal de $\sqrt{2}$?

La suite des chiffres de $\sqrt{2}$ (en une base $b \geq 2$ quelconque) n'est pas ultimement périodique.

Parmi les chiffres décimaux

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

au moins deux apparaissent une infinité de fois.

Dans le développement binaire, chacun des chiffres 0 et 1 apparaît une infinité de fois, de même que chacune des deux suites de deux chiffres 01 et 10.

C'est à peu près tout ce qui est connu.

Que sait-on sur le développement décimal de $\sqrt{2}$?

La suite des chiffres de $\sqrt{2}$ (en une base $b \geq 2$ quelconque) n'est pas ultimement périodique.

Parmi les chiffres décimaux

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

au moins deux apparaissent une infinité de fois.

Dans le développement binaire, chacun des chiffres 0 et 1 apparaît une infinité de fois, de même que chacune des deux suites de deux chiffres 01 et 10.

C'est à peu près tout ce qui est connu.

Que sait-on sur le développement décimal de $\sqrt{2}$?

La suite des chiffres de $\sqrt{2}$ (en une base $b \geq 2$ quelconque) n'est pas ultimement périodique.

Parmi les chiffres décimaux

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

au moins deux apparaissent une infinité de fois.

Dans le développement binaire, chacun des chiffres 0 et 1 apparaît une infinité de fois, de même que chacune des deux suites de deux chiffres 01 et 10.

C'est à peu près tout ce qui est connu.

Complexité du développement en base b d'un nombre réel algébrique irrationnel

Théorème (B. Adamczewski, Y. Bugeaud 2005 ; conjecture de A. Cobham 1968).
Si la suite des chiffres dans une base b d'un nombre réel x est produite par un automate fini, alors x est soit rationnel, soit transcendant.

État de la question

On ne connaît pas d'exemple explicite de triplet (b, a, x), avec $b \geq 3$ entier, a un chiffre dans l'intervalle $\{0, \ldots, b-1\}$ et x un nombre réel algébrique irrationnel, pour lequel on puisse affirmer que le chiffre a apparaît une infinité de fois dans le développement de x en base b.

É. Borel est plus ambitieux : il demande que tout nombre réel algébrique irrationnel soit *normal* : tout suite de n chiffres en base b devrait apparaître avec la fréquence $1/b^n$, ceci pour tout b et tout n.

État de la question

On ne connaît pas d'exemple explicite de triplet (b, a, x), avec $b \geq 3$ entier, a un chiffre dans l'intervalle $\{0, \ldots, b-1\}$ et x un nombre réel algébrique irrationnel, pour lequel on puisse affirmer que le chiffre a apparaît une infinité de fois dans le développement de x en base b.

É. Borel est plus ambitieux : il demande que tout nombre réel algébrique irrationnel soit *normal* : tout suite de n chiffres en base b devrait apparaître avec la fréquence $1/b^n$, ceci pour tout b et tout n.

Nombres normaux

Candidats : nombres algébriques irrationnels, “périodes” irrationnelles

Connus : complexité élevée

Aléatoire algorithmique

Constante de Chaitin : incompressible

Nombres normaux

Candidats : nombres algébriques irrationnels, “périodes” irrationnelles

Connus : complexité élevée

Aléatoire algorithmique

Constante de Chaitin : incompressible

Nombres normaux

Candidats : nombres algébriques irrationnels, “périodes” irrationnelles

Connus : complexité élevée

Aléatoire algorithmique

Constante de Chaitin : incompressible

Nombres normaux

Candidats : nombres algébriques irrationnels, “périodes” irrationnelles

Connus : complexité élevée

Aléatoire algorithmique

Constante de Chaitin : incompressible

Développement en base b de e et de π

On soupçonne que les développements en une base $b \geq 2$ de nombres comme e ou π ne peuvent pas être engendrés par des automates finis.

On soupçonne même que ces nombres sont normaux.

Mais on ne sait pas le démontrer.

A.N. Kolmogorov, G. Chaitin

Théorie AIT, *Algorithmic Information Theory*

Andrey Nikolaevich Kolmogorov
(1903 - 1987)

Gregory Chaitin

Ilias Kotsireas

One truly fascinating aspect of this theory is that the true definition of randomness should be given in terms of compressibility, and not in terms of probability. In other words, the more compressible a sequence is, the less random it is.

Or, equivalently, the less compressible a sequence is, the more random it is.

Conjecture de Schanuel

La conjecture de Schanuel a été formulée il y a 50 ans :

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$–linéairement indépendants, alors parmi les $2n$ nombres $x_1, \ldots, x_n$, $e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}$, au moins n sont algébriquement indépendants.

Autrement dit :

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants, alors

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\left(x_1, \ldots, x_n, \ e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right) \geq n.$$

Conjecture de Schanuel

La conjecture de Schanuel a été formulée il y a 50 ans :

> *Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$–linéairement indépendants, alors parmi les $2n$ nombres $x_1, \ldots, x_n$, $e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}$, au moins n sont algébriquement indépendants.*

Autrement dit :
Si $x_1, \ldots, x_n$ sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants, alors

$$\mathrm{deg\ tr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\left(x_1, \ldots, x_n,\ e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right) \geq n.$$

Dale Brownawell et Stephen Schanuel

Mesure de Lebesgue

Remarque : Pour presque tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ (pour la mesure de Lebesgue), le degré de transcendance du corps $\mathbf{Q}\left(x_1, \ldots, x_n,\ e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right)$ sur $\mathbf{Q}$ est $2n$

Origine de la conjecture de Schanuel

Cours de Serge Lang (1927–2005) à Columbia dans les années 60.

S. Lang – *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley 1966.

Conjecture de Nagata

Le cours de S. Lang était aussi suivi par M. Nagata
(1927–2008)
(14*ème* problème de Hilbert).

Conjecture de Nagata résolue par E. Bombieri.

A.O. Gel'fond CRAS 1934

ARITHMÉTIQUE. — *Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des nombres transcendants.* Note de M. A. Gelfond, présentée par M. Hadamard.

J'ai démontré (¹) que le nombre ω^r, où $\omega \neq 0, 1$ est un nombre algébrique et r un nombre algébrique irrationnel, doit être transcendant.

Par une généralisation de la méthode qui sert pour la démonstration du théorème énoncé, j'ai démontré les théorèmes plus généraux suivants :

I. Théorème. — *Soient* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *un polynome à coefficients entiers rationnels et* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *des nombres algébriques,* $\beta_i = 0, 1$.

L'égalité

$$P(e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_n}, \ln\beta_1, \ln\beta_2, \ldots, \ln\beta_m) = 0$$

est impossible; les nombres, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *et aussi les nombres* $\ln\beta_1$, $\ln\beta_2$, $\ln\beta_3, \ldots, \ln\beta_m$ *sont linéairement indépendants dans le corps des nombres rationnels.*

Ce théorème contient, comme cas particuliers, le théorème de Hermite et Lindemann, la résolution complète du problème de Hilbert, la transcendance des nombres $e^{\omega_1 e^{\omega_2}}$ (où ω_1 et ω_2 sont des nombres algébriques), le théorème sur la transcendance relative des nombres e et π.

II. Théorème. — *Les nombres*

$$e^{\omega_1 e^{\omega_2 e^{\cdots \omega_{n-1} e^{\omega_n}}}} \quad \text{et} \quad \alpha_1^{\alpha_2^{\alpha_3^{\cdots \alpha_m}}},$$

où $\omega_1 \neq 0, \omega_2, \ldots, \omega_n$ et $\alpha_1 \neq 0, 1$, $\alpha_2 \neq 0, 1$, $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_4, \ldots, \alpha_m$ *sont des nombres algébriques, sont des nombres transcendants et entre les nombres de cette forme n'existent pas de relations algébriques, à coefficients entiers rationnels* (non triviales).

La démonstration de ces résultats et de quelques autres résultats sur les nombres transcendants sera donnée dans un autre Recueil.

(¹) *Sur le septième problème de D. Hilbert* (*C. R. de l'Acad. des Sciences de l'U. R. S. S.*, 2, I, 1er avril 1934, et *Bull. de l'Acad. des Sciences de l'U. R. S. S.*, 7e série, 4, 1934, p. 623).

Énoncé de Gel'fond (1934)

Soient $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *un polynôme à coefficients entiers rationnels et* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *des nombres algébriques,* $\beta_i \neq 0, 1$.
L'égalité

$$P(e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_n}, \ln \beta_1, \ln \beta_2, \ldots, \ln \beta_m) = 0$$

est impossible ; les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *et aussi les nombres* $\ln \beta_1, \ln \beta_2, \ldots, \ln \beta_m$ *sont linéairement indépendants dans le corps des nombres rationnels.*

Énoncé de Gel'fond (1934)

Ce théorème contient, comme cas particuliers, le théorème de Hermite et Lindemann, la résolution complète du problème de Hilbert, la transcendance des nombres $e^{\omega_1 e^{\omega_2}}$ (où ω_1 et ω_2 sont des nombres algébriques), le théorème sur la transcendance relative des nombres e et π.

Deuxième énoncé de Gel'fond

Les nombres

$$e^{\omega_1 e^{\omega_2 e^{\cdots^{\omega_{n-1} e^{\omega_n}}}}} \quad \textit{et} \quad \alpha_1^{\alpha_2^{\alpha_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\alpha_m}}}}}},$$

où $\omega_1 \neq 0, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *et* $\alpha_1 \neq 0, 1$, $\alpha_2 \neq 0, 1$, $\alpha_3 \neq 0$, $\ldots, \alpha_m$ *sont des nombres algébriques, sont des nombres transcendants et entre les nombres de cette forme n'existent pas de relations algébriques, à coefficients entiers rationnels* (non triviales).

La démonstration de ces résultats et de quelques autres résultats sur les nombres transcendants sera donnée dans un autre Recueil.

Remarque : La condition sur les α_i devrait être qu'ils sont irrationnels.

Deuxième énoncé de Gel'fond

Les nombres

$$e^{\omega_1 e^{\omega_2 e^{\cdots^{\omega_{n-1} e^{\omega_n}}}}} \quad \textit{et} \quad \alpha_1^{\alpha_2^{\alpha_3^{\cdots^{\alpha_m}}}},$$

où $\omega_1 \neq 0, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *et* $\alpha_1 \neq 0, 1$, $\alpha_2 \neq 0, 1$, $\alpha_3 \neq 0$, $\ldots$, α_m *sont des nombres algébriques, sont des nombres transcendants et entre les nombres de cette forme n'existent pas de relations algébriques, à coefficients entiers rationnels* (non triviales).

La démonstration de ces résultats et de quelques autres résultats sur les nombres transcendants sera donnée dans un autre Recueil.

Remarque : La condition sur les α_i devrait être qu'ils sont irrationnels.

Conséquences faciles de la conjecture de Schanuel

Si la conjecture de Schanuel est vraie, les nombres suivants sont algébriquement indépendants :

$$e+\pi,\ e\pi,\ \pi^e,\ e^e, e^{e^2}, \dots,\ e^{e^e}, \dots,\ \pi^\pi, \pi^{\pi^2}, \dots\ \pi^{\pi^\pi} \dots$$

$$\log\pi,\ \log(\log 2),\ \pi\log 2,\ (\log 2)(\log 3),\ 2^{\log 2},\ (\log 2)^{\log 3} \dots$$

Indication : utiliser la conjecture de Schanuel plusieurs fois.

Conséquences faciles de la conjecture de Schanuel

Si la conjecture de Schanuel est vraie, les nombres suivants sont algébriquement indépendants :

$$e+\pi,\ e\pi,\ \pi^e,\ e^e, e^{e^2}, \dots,\ e^{e^e}, \dots,\ \pi^\pi, \pi^{\pi^2}, \dots\ \pi^{\pi^\pi} \dots$$

$$\log \pi,\ \log(\log 2),\ \pi \log 2,\ (\log 2)(\log 3),\ 2^{\log 2},\ (\log 2)^{\log 3} \dots$$

Indication : utiliser la conjecture de Schanuel plusieurs fois.

Autres conséquences de la conjecture de Schanuel

Ram Murty

Kumar Murty

N. Saradha

Valeurs transcendantes de fonctions L, de fonctions Gamma ou de leurs logarithmes.
Travaux en commun de R. Murty, S. Gun et P. Rath (2008, 2009).

P. Rath, R. Murty, S. Gun

Fonction Gamma multiple de Barnes, définie par $\Gamma_0(z) = 1/z$, $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$,

$$\Gamma_{n+1}(z+1) = \frac{\Gamma_{n+1}(z)}{\Gamma_n(z)},$$

avec $\Gamma_n(1) = 1$.

Si on admet la conjecture de Schanuel, alors l'une au moins des deux assertions suivantes est vraie :
(i) *Les deux nombres π et $\zeta(3)$ sont algébriquement indépendants.*
(ii) *Le nombre $\Gamma_2(1/2)/\Gamma_3(1/2)$ est transcendant.*

P. Rath, R. Murty, S. Gun

Fonction Gamma multiple de Barnes, définie par $\Gamma_0(z) = 1/z$, $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$,

$$\Gamma_{n+1}(z+1) = \frac{\Gamma_{n+1}(z)}{\Gamma_n(z)},$$

avec $\Gamma_n(1) = 1$.

Si on admet la conjecture de Schanuel, alors l'une au moins des deux assertions suivantes est vraie :
(i) *Les deux nombres π et $\zeta(3)$ sont algébriquement indépendants.*
(ii) *Le nombre $\Gamma_2(1/2)/\Gamma_3(1/2)$ est transcendant.*

La constante de Catalan

La constante de Catalan
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$
$= 0,915\,965\ \ldots$

est–elle irrationnelle ?

Eugène Catalan
(1814 - 1894)

P. Rath, R. Murty, S. Gun

Si on admet la conjecture de Schanuel, alors l'une au moins des deux assertions suivantes est vraie :
(i) *Les deux nombres* π *et* G *sont algébriquement indépendants.*
(ii) *Le nombre* $\Gamma_2(1/4)/\Gamma_2(13/4)$ *est transcendant.*

Exercice de S. Lang

On pose $E_0 = \mathbf{Q}$. Par récurrence, pour $n \geq 1$, on définit E_n comme la clôture algébrique du corps engendré sur E_{n-1} par les nombres $\exp(x) = e^x$, où x décrit E_{n-1}. Soit E la réunion des E_n, $n \geq 0$.

Alors la conjecture de Schanuel implique que le nombre π n'appartient pas à E.

Plus précisément : la conjecture de Schanuel implique que les nombres $\pi, \log \pi, \log\log \pi, \log\log\log \pi, \ldots$ sont algébriquement indépendants sur E.

Exercice de S. Lang

On pose $E_0 = \mathbf{Q}$. Par récurrence, pour $n \geq 1$, on définit E_n comme la clôture algébrique du corps engendré sur E_{n-1} par les nombres $\exp(x) = e^x$, où x décrit E_{n-1}. Soit E la réunion des E_n, $n \geq 0$.

Alors la conjecture de Schanuel implique que le nombre π n'appartient pas à E.

Plus précisément : la conjecture de Schanuel implique que les nombres $\pi, \log \pi, \log \log \pi, \log \log \log \pi, \ldots$ sont algébriquement indépendants sur E.

Une variante de l'exercice de Lang

Posons $L_0 = \mathbf{Q}$. Par récurrence, pour $n \geq 1$, on définit L_n comme la clôture algébrique du corps engendré sur L_{n-1} par les nombres y, où y décrit les nombres complexes tels que $e^y \in L_{n-1}$. Soit L la réunion des L_n, $n \geq 0$.
Alors la conjecture de Schanuel implique que le nombre e n'appartient pas à L.

Plus précisément : la conjecture de Schanuel implique que les nombres $e, e^e, e^{e^e}, e^{e^{e^e}} \ldots$ sont algébriquement indépendants sur L.

Une variante de l'exercice de Lang

Posons $L_0 = \mathbf{Q}$. Par récurrence, pour $n \geq 1$, on définit L_n comme la clôture algébrique du corps engendré sur L_{n-1} par les nombres y, où y décrit les nombres complexes tels que $e^y \in L_{n-1}$. Soit L la réunion des L_n, $n \geq 0$.
Alors la conjecture de Schanuel implique que le nombre e n'appartient pas à L.

Plus précisément : la conjecture de Schanuel implique que les nombres $e, e^e, e^{e^e}, e^{e^{e^e}} \ldots$ sont algébriquement indépendants sur L.

Arizona Winter School AWS2008, Tucson

Théorème [Jonathan Bober, Chuangxun Cheng, Brian Dietel, Mathilde Herblot, Jingjing Huang, Holly Krieger, Diego Marques, Jonathan Mason, Martin Mereb et Robert Wilson.]
La conjecture de Schanuel implique que les corps E et L sont linéairement disjoints sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

Définition. Étant donnée une extension F/K et deux sous–extensions $F_1, F_2 \subseteq F$, on dit que les corps F_1, F_2 sont linéairement disjoints sur K si la propriété suivante est satisfaite : *tout ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq F_1$ d'éléments linéairement indépendant sur K est linéairement indépendant sur F_2.*

Référence : `arXiv.0804.3550 [math.NT]` 2008.
Contribution de Georges Racinet

Arizona Winter School AWS2008, Tucson

Théorème [Jonathan Bober, Chuangxun Cheng, Brian Dietel, Mathilde Herblot, Jingjing Huang, Holly Krieger, Diego Marques, Jonathan Mason, Martin Mereb et Robert Wilson.]
La conjecture de Schanuel implique que les corps E et L sont linéairement disjoints sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

Définition. Étant donnée une extension F/K et deux sous–extensions $F_1, F_2 \subseteq F$, on dit que les corps F_1, F_2 sont linéairement disjoints sur K si la propriété suivante est satisfaite : *tout ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq F_1$ d'éléments linéairement indépendant sur K est linéairement indépendant sur F_2.*

Référence : `arXiv.0804.3550 [math.NT]` 2008.
Contribution de Georges Racinet

Arizona Winter School AWS2008, Tucson

Théorème [Jonathan Bober, Chuangxun Cheng, Brian Dietel, Mathilde Herblot, Jingjing Huang, Holly Krieger, Diego Marques, Jonathan Mason, Martin Mereb et Robert Wilson.] *La conjecture de Schanuel implique que les corps E et L sont linéairement disjoints sur $\overline{\mathbf{Q}}$.*

Définition. Étant donnée une extension F/K et deux sous–extensions $F_1, F_2 \subseteq F$, on dit que les corps F_1, F_2 sont linéairement disjoints sur K si la propriété suivante est satisfaite : *tout ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq F_1$ d'éléments linéairement indépendant sur K est linéairement indépendant sur F_2.*

Référence : `arXiv.0804.3550 [math.NT]` 2008.
Contribution de Georges Racinet

Analogues formels

W.D. Brownawell
(élève de S. Schanuel)

Théorème de J. Ax (1968) :
Version de la conjecture de Schanuel pour le corps des séries formelles sur $\mathbf{C}$
(et R. Coleman pour les séries formelles sur $\overline{\mathbf{Q}}$)

Travaux de W.D. Brownawell et K. Kubota sur l'analogue elliptique du théorème d'Ax.

Ubiquité de la conjecture de Schanuel

Autres contextes : Nombres p–adiques, conjecture de Leopoldt sur le rang p–adique du groupe des unités d'un corps de nombres.
Montrer que des régulateurs ne s'annulent pas
Non dégénérescence de hauteurs
Conjecture de B. Mazur sur la densité de points rationnels
Approximation diophantienne sur des tores

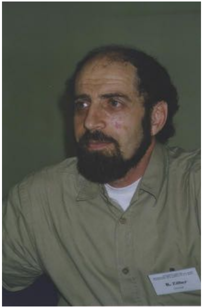
Dipendra Prasad

Gopal Prasad

Méthodes de logique

Ehud Hrushovski

Boris Zilber



Jonathan Kirby

Calcul de fonctions de “prédimension” (E. Hrushovski)

B. Zilber : construction d’une “pseudoexponentiation”

Aussi : A. Macintyre, D.E. Marker, G. Terzo, A.J. Wilkie, D. Bertrand. . .

Méthodes de logique : théorie des modèles

Exponential algebraicity in exponential fields
by
Jonathan Kirby

La dimension de la clôture algébrique exponentielles d'un opérateur dans un corps exponentiel satisfait une propriété de Schanuel faible.

Un corollaire est qu'il y a au plus un ensemble dénombrable de contre–exemples "essentiels" à la conjecture de Schanuel.

`arXiv:0810.4285v2`

Daniel Bertrand

Daniel Bertrand,

Schanuel's conjecture for non-isoconstant elliptic curves over function fields.

Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 1, 41–62, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **349**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

Autour des conjectures de Zilber-Pink

Du 25 juin au 5 juillet 2012, Paris
"Ecole d'été" sur le thème "Autour des conjectures de Zilber-Pink".

http://zilberpink-2012.institut.math.jussieu.fr/

La conjecture de Schanuel pour $n = 1$

Pour $n = 1$, la conjecture de Schanuel n'est autre que le théorème de Hermite–Lindemann

> *Si x est un nombre complexe non nul, alors l'un au moins des deux nombres x, e^x est transcendant*

De façon équivalente, *si x est un nombre algébrique non nul, alors e^x est un nombre transcendant.*

Un autre énoncé équivalent est le suivant : *si α est un nombre algébrique non nul et si $\log \alpha$ est un logarithme non nul de α, alors $\log \alpha$ est un nombre transcendant.*

Conséquence : transcendance de nombres tels que

$$e, \quad \pi, \quad \log 2, \quad e^{\sqrt{2}}.$$

La conjecture de Schanuel pour $n = 1$

Pour $n = 1$, la conjecture de Schanuel n'est autre que le théorème de Hermite–Lindemann

> *Si x est un nombre complexe non nul, alors l'un au moins des deux nombres x, e^x est transcendant*

De façon équivalente, *si x est un nombre algébrique non nul, alors e^x est un nombre transcendant.*

Un autre énoncé équivalent est le suivant : *si α est un nombre algébrique non nul et si $\log\alpha$ est un logarithme non nul de α, alors $\log\alpha$ est un nombre transcendant.*

Conséquence : transcendance de nombres tels que

$$e, \quad \pi, \quad \log 2, \quad e^{\sqrt{2}}.$$

La conjecture de Schanuel pour $n = 1$

Pour $n = 1$, la conjecture de Schanuel n'est autre que le théorème de Hermite–Lindemann

> *Si x est un nombre complexe non nul, alors l'un au moins des deux nombres x, e^x est transcendant*

De façon équivalente, *si x est un nombre algébrique non nul, alors e^x est un nombre transcendant.*

Un autre énoncé équivalent est le suivant : *si α est un nombre algébrique non nul et si $\log \alpha$ est un logarithme non nul de α, alors $\log \alpha$ est un nombre transcendant.*

Conséquence : transcendance de nombres tels que

$$e, \quad \pi, \quad \log 2, \quad e^{\sqrt{2}}.$$

La conjecture de Schanuel pour $n = 1$

Pour $n = 1$, la conjecture de Schanuel n'est autre que le théorème de Hermite–Lindemann

> *Si x est un nombre complexe non nul, alors l'un au moins des deux nombres x, e^x est transcendant*

De façon équivalente, *si x est un nombre algébrique non nul, alors e^x est un nombre transcendant.*

Un autre énoncé équivalent est le suivant : *si α est un nombre algébrique non nul et si $\log \alpha$ est un logarithme non nul de α, alors $\log \alpha$ est un nombre transcendant.*

Conséquence : transcendance de nombres tels que

$$e, \quad \pi, \quad \log 2, \quad e^{\sqrt{2}}.$$

Charles Hermite et Ferdinand Lindemann

(1822 – 1901)

Hermite (1873) :
Transcendance de e
$e = 2,718\,281\,\ldots$

(1852 – 1939)

Lindemann (1882) :
Transcendance de π
$\pi = 3,141\,592\,\ldots$

Théorème de Lindemann–Weierstraß

Le cas particulier de la conjecture de Schanuel où $x_1, \ldots, x_n$ sont algébriques.

Soient $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Alors les nombres $e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_n}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Schanuel avec $n = 2$

Pour $n = 2$ la conjecture de Schanuel est un problème ouvert.

? Si x_1, x_2 sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$–linéairement indépendants, alors parmi les 4 nombres x_1, x_2, e^{x_1}, e^{x_2}, au moins 2 sont algébriquement indépendants.

Quelques conséquences :

Avec $x_1 = 1$, $x_2 = i\pi$: on déduit l'indépendance algébrique de e et π.

Avec $x_1 = 1$, $x_2 = e$: l'indépendance algébrique de e et e^e.

Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = (\log 2)^2$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $2^{\log 2}$.

Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = \log 3$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $\log 3$.

Schanuel avec $n = 2$

Pour $n = 2$ la conjecture de Schanuel est un problème ouvert.

? Si x_1, x_2 sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$–linéairement indépendants, alors parmi les 4 nombres x_1, x_2, e^{x_1}, e^{x_2}, au moins 2 sont algébriquement indépendants.

Quelques conséquences :

Avec $x_1 = 1$, $x_2 = i\pi$: on déduit l'indépendance algébrique de e et π.

Avec $x_1 = 1$, $x_2 = e$: l'indépendance algébrique de e et e^e.

Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = (\log 2)^2$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $2^{\log 2}$.

Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = \log 3$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $\log 3$.

Schanuel avec $n = 2$

Pour $n = 2$ la conjecture de Schanuel est un problème ouvert.

> *? Si x_1, x_2 sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$–linéairement indépendants, alors parmi les 4 nombres x_1, x_2, e^{x_1}, e^{x_2}, au moins 2 sont algébriquement indépendants.*

Quelques conséquences :

Avec $x_1 = 1$, $x_2 = i\pi$: on déduit l'indépendance algébrique de e et π.

Avec $x_1 = 1$, $x_2 = e$: l'indépendance algébrique de e et e^e.

Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = (\log 2)^2$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $2^{\log 2}$.

Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = \log 3$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $\log 3$.

Schanuel avec $n = 2$

Pour $n = 2$ la conjecture de Schanuel est un problème ouvert.

> *? Si x_1, x_2 sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$–linéairement indépendants, alors parmi les 4 nombres x_1, x_2, e^{x_1}, e^{x_2}, au moins 2 sont algébriquement indépendants.*

Quelques conséquences :
Avec $x_1 = 1$, $x_2 = i\pi$: on déduit l'indépendance algébrique de e et π.
Avec $x_1 = 1$, $x_2 = e$: l'indépendance algébrique de e et e^e.
Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = (\log 2)^2$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $2^{\log 2}$.
Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = \log 3$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $\log 3$.

Schanuel avec $n = 2$

Pour $n = 2$ la conjecture de Schanuel est un problème ouvert.

> *? Si x_1, x_2 sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$–linéairement indépendants, alors parmi les 4 nombres x_1, x_2, e^{x_1}, e^{x_2}, au moins 2 sont algébriquement indépendants.*

Quelques conséquences :
Avec $x_1 = 1$, $x_2 = i\pi$: on déduit l'indépendance algébrique de e et π.
Avec $x_1 = 1$, $x_2 = e$: l'indépendance algébrique de e et e^e.
Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = (\log 2)^2$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $2^{\log 2}$.
Avec $x_1 = \log 2$, $x_2 = \log 3$: l'indépendance algébrique de $\log 2$ et $\log 3$.

Indépendance de logarithmes de nombres algébriques

On ne sait pas démontrer qu'*il existe deux logarithmes de nombres algébriques qui soient algébriquement indépendants.*

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\bigl(\log \alpha \ \mid \ \alpha \in \overline{\mathbf{Q}}^{\times}\bigr) \geq 2?$$

On ne sait pas non plus montrer qu'il n'y a pas de relation quadratique entre des logarithmes de nombres algébriques.

La conjecture des *quatre exponentielles* peut s'énoncer : *toute relation quadratique* $(\log \alpha_1)(\log \alpha_4) = (\log \alpha_2)(\log \alpha_3)$ *entre logarithmes de nombres algébriques est triviale : ou bien* $\log \alpha_1 / \log \alpha_2$ *est rationnel, ou bien* $\log \alpha_1 / \log \alpha_3$ *est rationnel.*

Indépendance de logarithmes de nombres algébriques

On ne sait pas démontrer qu'*il existe deux logarithmes de nombres algébriques qui soient algébriquement indépendants.*

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\big(\log \alpha \ \mid \ \alpha \in \overline{\mathbf{Q}}^{\times}\big) \geq 2?$$

On ne sait pas non plus montrer qu'il n'y a pas de relation quadratique entre des logarithmes de nombres algébriques.

La conjecture des *quatre exponentielles* peut s'énoncer : *toute relation quadratique* $(\log \alpha_1)(\log \alpha_4) = (\log \alpha_2)(\log \alpha_3)$ *entre logarithmes de nombres algébriques est triviale : ou bien* $\log \alpha_1 / \log \alpha_2$ *est rationnel, ou bien* $\log \alpha_1 / \log \alpha_3$ *est rationnel.*

Indépendance de logarithmes de nombres algébriques

On ne sait pas démontrer qu'*il existe deux logarithmes de nombres algébriques qui soient algébriquement indépendants.*

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\big(\log \alpha \ \mid \ \alpha \in \overline{\mathbf{Q}}^{\times}\big) \geq 2?$$

On ne sait pas non plus montrer qu'il n'y a pas de relation quadratique entre des logarithmes de nombres algébriques.

La conjecture des *quatre exponentielles* peut s'énoncer : *toute relation quadratique* $(\log \alpha_1)(\log \alpha_4) = (\log \alpha_2)(\log \alpha_3)$ *entre logarithmes de nombres algébriques est triviale : ou bien* $\log \alpha_1 / \log \alpha_2$ *est rationnel, ou bien* $\log \alpha_1 / \log \alpha_3$ *est rationnel.*

Problème de Gel'fond et Schneider

Soulevé par A.O. Gel'fond en 1948 et Th. Schneider en 1952.

Conjecture : *Si α est un nombre algébrique, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ et si β est un nombre algébrique de degré $d \geq 2$, alors les $d-1$ nombres*

$$\alpha^{\beta},\ \alpha^{\beta^2},\ \ldots,\alpha^{\beta^{d-1}}$$

sont algébriquement indépendants.

Cas particulier de la conjecture de Schanuel : Prendre $x_i = \beta^{i-1}\log\alpha$, $n = d$, de telle sorte que

$$\left\{x_1,\ldots,x_n,\ e^{x_1},\ldots,e^{x_n}\right\}$$

est

$$\left\{\log\alpha,\ \beta\log\alpha,\ \ldots,\ \beta^{d-1}\log\alpha,\quad \alpha,\ \alpha^{\beta},\ \ldots,\ \alpha^{\beta^{d-1}}\right\}.$$

La conjecture de Schanuel implique

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\left(\log\alpha,\alpha^{\beta},\ \alpha^{\beta^2},\ \ldots,\alpha^{\beta^{d-1}}\right) = d.$$

Problème de Gel'fond et Schneider

Soulevé par A.O. Gel'fond en 1948 et Th. Schneider en 1952.

Conjecture : *Si α est un nombre algébrique, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ et si β est un nombre algébrique de degré $d \geq 2$, alors les $d-1$ nombres*

$$\alpha^{\beta},\ \alpha^{\beta^2},\ \dots,\alpha^{\beta^{d-1}}$$

sont algébriquement indépendants.

Cas particulier de la conjecture de Schanuel : Prendre $x_i = \beta^{i-1}\log\alpha$, $n = d$, de telle sorte que

$$\left\{x_1,\dots,x_n,\ e^{x_1},\dots,e^{x_n}\right\}$$

est

$$\left\{\log\alpha,\ \beta\log\alpha,\ \dots,\ \beta^{d-1}\log\alpha,\quad \alpha,\ \alpha^{\beta},\ \dots,\ \alpha^{\beta^{d-1}}\right\}.$$

La conjecture de Schanuel implique

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\left(\log\alpha, \alpha^{\beta},\ \alpha^{\beta^2},\ \dots,\alpha^{\beta^{d-1}}\right) = d.$$

Problème de Gel'fond et Schneider

Soulevé par A.O. Gel'fond en 1948 et Th. Schneider en 1952.
Conjecture : *Si* α *est un nombre algébrique,* $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ *et si* β *est un nombre algébrique de degré* $d \geq 2$, *alors les* $d-1$ *nombres*

$$\alpha^{\beta},\ \alpha^{\beta^2},\ \ldots,\alpha^{\beta^{d-1}}$$

sont algébriquement indépendants.
Cas particulier de la conjecture de Schanuel : Prendre $x_i = \beta^{i-1}\log\alpha$, $n = d$, de telle sorte que

$$\left\{x_1,\ldots,x_n,\ e^{x_1},\ldots,e^{x_n}\right\}$$

est

$$\left\{\log\alpha,\ \beta\log\alpha,\ \ldots,\ \beta^{d-1}\log\alpha,\quad \alpha,\ \alpha^{\beta},\ \ldots,\ \alpha^{\beta^{d-1}}\right\}.$$

La conjecture de Schanuel implique

$$\deg\,\mathrm{tr}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\left(\log\alpha,\alpha^{\beta},\ \alpha^{\beta^2},\ \ldots,\alpha^{\beta^{d-1}}\right) = d.$$

Problèmes de Hilbert

8 Août 1900

David Hilbert (1862 - 1943)

Deuxième Congrès International des Mathématiciens à Paris.

Nombres premiers jumeaux,

Conjecture de Goldbach,

Hypothèse de Riemann

Transcendance de e^π

et de $2^{\sqrt{2}}$

A.O. Gel'fond et Th. Schneider

Solution du septième problème de Hilbert (1934) :
Transcendance de α^β *et de* $(\log\alpha_1)/(\log\alpha_2)$ *pour* α, β, α_1 *et* α_2 *algébriques.*

A.O. Gel'fond (1906 - 1968)

Th. Schneider (1911 - 1988)

Transcendance de α^β et $\log\alpha_1/\log\alpha_2$: exemples

Les nombres suivants sont transcendants :

$$2^{\sqrt{2}} = 2,665\,144\,1\ldots$$

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,630\,929\ \ldots$$

$$e^\pi = 23,140\,692\ldots \qquad\qquad (e^\pi = (-1)^{-i})$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 743,999\ 999\ 999\ 999\ 25\ldots$$

Transcendance de α^β et $\log \alpha_1 / \log \alpha_2$: exemples

Les nombres suivants sont transcendants :

$$2^{\sqrt{2}} = 2,665\,144\,1\ldots$$

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,630\,929\ \ldots$$

$$e^\pi = 23,140\,692\ \ldots \qquad (e^\pi = (-1)^{-i})$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 743,999\ 999\ 999\ 999\ 25\ldots$$

Transcendance de α^β et $\log \alpha_1 / \log \alpha_2$: exemples

Les nombres suivants sont transcendants :

$$2^{\sqrt{2}} = 2,665\,144\,1\ldots$$

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,630\,929\ \ldots$$

$$e^\pi = 23,140\,692\ \ldots \qquad\qquad (e^\pi = (-1)^{-i})$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743,999\,999\,999\,999\,25\ldots$$

Transcendance de α^β et $\log\alpha_1/\log\alpha_2$: exemples

Les nombres suivants sont transcendants :

$$2^{\sqrt{2}} = 2,665\,144\,1\ldots$$

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,630\,929\ \ldots$$

$$e^\pi = 23,140\,692\ \ldots \qquad\qquad (e^\pi = (-1)^{-i})$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 743,999\ 999\ 999\ 999\ 25\ldots$$

Alan Baker 1968

Transcendance de nombres comme

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$$

ou

$$e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_1^{\beta_1}$$

pour α_i et β_j algébriques.

Exemple (Siegel) :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0,835\,648\ \ldots$$

est transcendant.

Indépendance algébrique : A.O. Gel'fond 1948

Les deux nombres $2^{\sqrt[3]{2}}$ et $2^{\sqrt[3]{4}}$ sont algébriquement indépendants.

Plus généralement, si α est un nombre algébrique, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ et si β est un nombre algébrique de degré $d \geq 3$, alors deux au moins des nombres

$$\alpha^{\beta},\ \alpha^{\beta^2},\ \ldots,\alpha^{\beta^{d-1}}$$

sont algébriquement indépendants.

Critères de transcendance

A.O. Gel'fond, W.D. Brownawell, P. Philippon,
G.V. Chudnovsky, Yu.V. Nesterenko, M. Laurent, D. Roy

Patrice Philippon

Michel Laurent

Damien Roy

Gregory V. Chudnovsky

G.V. Chudnovsky (1976)
Indépendance algébrique des nombres π et $\Gamma(1/4)$.

Aussi : Indépendance algébrique des nombres π et $\Gamma(1/3)$.

Corollaires : *Transcendance de* $\Gamma(1/4) = 3,625\,609\ \ldots$
et $\Gamma(1/3) = 2,678\,938\ \ldots$

Yuri V. Nesterenko

Yu.V.Nesterenko (1996)
Indépendance algébrique des trois nombres
$\Gamma(1/4)$, π et e^{π}.

Aussi : Indépendance algébrique des trois nombres
$\Gamma(1/3)$, π et $e^{\pi\sqrt{3}}$.

Corollaire : *Les nombres* $\pi = 3,141\,592\ldots$ *et* $e^{\pi} = 23,140\,692\ldots$ *sont algébriquement indépendants.*

Conséquences du théorème de Nesterenko

Transcendance de valeurs de fonctions L de Dirichlet :
Sanoli Gun, Ram Murty et Purusottam Rath (2009).

Faustin Adiceam : en utilisant la formule de Chowla et Selberg.
Indépendance algébrique des trois nombres $\pi,\ e^{\pi\sqrt{5}}$ *et* θ *où*

$$\theta = \Gamma(1/5)\,\Gamma(7/20)\,\Gamma(9/20).$$

Même énoncé avec

$$\theta = \frac{\Gamma(1/20)\,\Gamma(3/20)}{\Gamma(1/5)}.$$

Fonction sigma de Weierstraß

Soit $\Omega = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbf{C}$. Le produit canonique associé à Ω est la *fonction sigma de Weierstraß*

$$\sigma(z) = \sigma_\Omega(z) = z \prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{(z/\omega)+(z^2/2\omega^2)}.$$

Le nombre

$$\sigma_{\mathbf{Z}[i]}(1/2) = 2^{5/4}\pi^{1/2}e^{\pi/8}\Gamma(1/4)^{-2}$$

est transcendant.

Fonction sigma de Weierstraß

Soit $\Omega = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbf{C}$. Le produit canonique associé à Ω est la *fonction sigma de Weierstraß*

$$\sigma(z) = \sigma_\Omega(z) = z \prod_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{(z/\omega) + (z^2/2\omega^2)}.$$

Le nombre

$$\sigma_{\mathbf{Z}[i]}(1/2) = 2^{5/4} \pi^{1/2} e^{\pi/8} \Gamma(1/4)^{-2}$$

est transcendant.

Peter Bundschuh (1979)

.

Une conséquence du théorème de Nesterenko est la transcendance du nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

$$= 2.076\,674\ \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{2\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = 0,272\,029$$

Peter Bundschuh (1979)

Comme

$$\frac{2}{n^4-1} = \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$$

(série télescopante), il en résulte que le nombre

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s-1}$$

est transcendant pour $s = 4$. La transcendance de ce nombre pour toute valeur paire de $s \geq 4$ est un cas particulier de la conjecture de Schanuel.

Séries de fonctions rationnelles

Travaux de S.D. Adhikari, N. Saradha, T.N. Shorey et R. Tijdeman (2001),

Soient P et Q des polynômes non nuls à coefficients rationnels avec $\deg Q \geq 2 + \deg P$. Ils considèrent la série

$$\sum_{\substack{n \geq 0 \\ Q(n) \neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

Robert Tijdeman

Sukumar Das Adhikari

N. Saradha

Leonardo Pisano (Fibonacci)

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,$$

$$34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233\dots$$

est définie par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

http://oeis.org/A000045

Leonardo Pisano (Fibonacci)
(1170–1250)

La fonction zêta de Fibonacci

Pour $\Re e(s) > 0$,

$$\zeta_F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{F_n^s}$$

$\zeta_F(2)$, $\zeta_F(4)$, $\zeta_F(6)$ sont algébriquement indépendants.

Iekata Shiokawa, Carsten Elsner et Shun Shimomura (2006)

Iekata Shiokawa

Vers la conjecture de Schanuel

Ch. Hermite, F. Lindemann, C.L. Siegel, A.O. Gel'fond, Th. Schneider, A. Baker, S. Lang, W.D. Brownawell, D.W. Masser, D. Bertrand, G.V. Chudnovsky, P. Philippon, G. Wüstholz, Yu.V. Nesterenko, D. Roy.

Damien Roy

Stratégie proposée par D. Roy en 1999 aux Journées Arithmétiques de Rome :

il propose une conjecture équivalente à celle de Schanuel.

Conjectures de A. Grothendieck et Y. André

Conjecture généralisée des périodes de Grothendieck : Dimension du groupe de Mumford–Tate d'une variété projective lisse.

Generalisation par Y. André aux motifs.

Cas des 1–motifs : Conjecture Elliptico-Toric de C. Bertolin.

Périodes : Maxime Kontsevich et Don Zagier

Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Periods, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer 2001, 771–808.

Périodes : Maxime Kontsevich et Don Zagier

Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Periods, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer 2001, 771–808.

Prototype d'une période : le nombre π

Fonction *périodique* :

$$e^{z+2i\pi} = e^z$$

$$2i\pi = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$$

$$\begin{aligned} \pi &= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} dxdy &&= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Prototype d'une période : le nombre π

Fonction *périodique* :

$$e^{z+2i\pi} = e^z$$

$$2i\pi = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$$

$$\begin{aligned} \pi &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} dxdy &&= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Prototype d'une période : le nombre π

Fonction *périodique* :

$$e^{z+2i\pi} = e^{z}$$

$$2i\pi = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$$

$$\begin{aligned} \pi &= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} dxdy &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Autres exemples de périodes

Le nombre

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques sont des périodes,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy.$$

Un produit de périodes est une période. Les périodes forment une sous–algèbre de $\mathbf{C}$, mais probablement pas un sous-corps : on s'attend à ce que $1/\pi$ ne soit pas une période.

Autres exemples de périodes

Le nombre

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques sont des périodes,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy.$$

Un produit de périodes est une période. Les périodes forment une sous–algèbre de $\mathbf{C}$, mais probablement pas un sous-corps : on s'attend à ce que $1/\pi$ ne soit pas une période.

Autres exemples de périodes

Le nombre

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques sont des périodes,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy.$$

Un produit de périodes est une période. Les périodes forment une sous–algèbre de $\mathbf{C}$, mais probablement pas un sous-corps : on s'attend à ce que $1/\pi$ ne soit pas une période.

Autres exemples de périodes

Le nombre

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques sont des périodes,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy.$$

Un produit de périodes est une période. Les périodes forment une sous–algèbre de $\mathbf{C}$, mais probablement pas un sous-corps : on s'attend à ce que $1/\pi$ ne soit pas une période.

Autres exemples de périodes

Le nombre

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques sont des périodes,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy.$$

Un produit de périodes est une période. Les périodes forment une sous–algèbre de $\mathbf{C}$, mais probablement pas un sous-corps : on s'attend à ce que $1/\pi$ ne soit pas une période.

Autres exemples de périodes

Le nombre

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques sont des périodes,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy.$$

Un produit de périodes est une période. Les périodes forment une sous–algèbre de $\mathbf{C}$, mais probablement pas un sous-corps : on s'attend à ce que $1/\pi$ ne soit pas une période.

Relations entre périodes

$\boxed{1}$

Additivité

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\boxed{2}$

Changement de variables

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du.$$

Relations entre périodes

$\boxed{1}$

Additivité

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\boxed{2}$

Changement de variables

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du.$$

Relations entre périodes

$\boxed{3}$
Newton–Leibniz–Stokes

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Conjecture de Kontsevich et Zagier

Periods,
Mathematics unlimited—
2001 and beyond,
Springer 2001, 771–808.

Conjecture (Kontsevich–Zagier). *Si une période a deux représentations, on peut passer de l'une à l'autre en utilisant uniquement les règles* $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ *dans lesquelles toutes les fonctions et les domaines d'intégration sont algébriques avec des coefficients algébriques.*

Conjecture de Kontsevich et Zagier (suite)

In other words, we do not expect any miraculous coïncidence of two integrals of algebraic functions which will not be possible to prove using three simple rules.

This conjecture, which is similar in spirit to the Hodge conjecture, is one of the central conjectures about algebraic independence and transcendental numbers, and is related to many of the results and ideas of modern arithmetic algebraic geometry and the theory of motives.

Advice : *if you wish to prove a number is transcendental, first prove it is a period.*

Conjecture de Kontsevich et Zagier (suite)

In other words, we do not expect any miraculous coïncidence of two integrals of algebraic functions which will not be possible to prove using three simple rules.
This conjecture, which is similar in spirit to the Hodge conjecture, is one of the central conjectures about algebraic independence and transcendental numbers, and is related to many of the results and ideas of modern arithmetic algebraic geometry and the theory of motives.

Advice : *if you wish to prove a number is transcendental, first prove it is a period.*

Conjecture de Kontsevich et Zagier (suite)

In other words, we do not expect any miraculous coïncidence of two integrals of algebraic functions which will not be possible to prove using three simple rules.
This conjecture, which is similar in spirit to the Hodge conjecture, is one of the central conjectures about algebraic independence and transcendental numbers, and is related to many of the results and ideas of modern arithmetic algebraic geometry and the theory of motives.

Advice : *if you wish to prove a number is transcendental, first prove it is a period.*

Périodes motiviques, multizêta motiviques

Lundi 11 juin 2012, IHÉS
Conférence “Dialogues autour de l’algèbre, la géométrie et les fonctions multizêtas” à l’occasion des 80 ans de Pierre Cartier.

Pierre DELIGNE *Périodes motiviques*

Hidekazu FURUSHO *On GT-actions*

Francis BROWN *Multizêtas gradués pour la profondeur*

Nombres multizêtas

Pour $s_1, \ldots, s_k$ entiers positifs avec $s_1 \geq 2$,

$$\zeta(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}$$

P. Cartier. –
Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents.
Sém. Bourbaki no. 885
Astérisque **282** (2002), 137-173.

Conjecture de M. Hoffman, travaux de F. Brown

Indépendance linéaire de multizêtas :

Conjecture. *Les nombres* $\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ *avec* $k \geq 1$ *et* $s_j \in \{2, 3\}$ *forment une base du* $\overline{\mathbf{Q}}$*–espace vectoriel des multizêtas.*

Site web de M. Hoffman

http://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html

Transcendance p–adique – problèmes ouverts

Indépendance algébrique de $2^{\sqrt[3]{2}}$ et $2^{\sqrt[3]{4}}$.

Analogue p–adique du théorème de Lindemann–Weierstrass sur l'indépendance linéaire des e^{α_i} pour des α_i algébriques deux–à–deux distincts, c'est–à–dire sur l'indépendance algébrique des e^{α_i} pour des α_i algébriques linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Analogue p–adique du théorème des unités de Dirichlet : rang p–adique du groupe des unités, conjecture de Leopoldt, régulateur p–adique

Transcendance p–adique – problèmes ouverts

Indépendance algébrique de $2^{\sqrt[3]{2}}$ et $2^{\sqrt[3]{4}}$.

Analogue p–adique du théorème de Lindemann–Weierstrass sur l'indépendance linéaire des e^{α_i} pour des α_i algébriques deux–à–deux distincts, c'est–à–dire sur l'indépendance algébrique des e^{α_i} pour des α_i algébriques linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Analogue p–adique du théorème des unités de Dirichlet : rang p–adique du groupe des unités, conjecture de Leopoldt, régulateur p–adique

Transcendance p–adique – problèmes ouverts

Indépendance algébrique de $2^{\sqrt[3]{2}}$ et $2^{\sqrt[3]{4}}$.

Analogue p–adique du théorème de Lindemann–Weierstrass sur l'indépendance linéaire des e^{α_i} pour des α_i algébriques deux–à–deux distincts, c'est–à–dire sur l'indépendance algébrique des e^{α_i} pour des α_i algébriques linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Analogue p–adique du théorème des unités de Dirichlet : rang p–adique du groupe des unités, conjecture de Leopoldt, régulateur p–adique

Conjecture de Leopoldt

Conjecture de Leopoldt (1962)

$$\mathrm{rang}\left(\log_p \sigma_i(\epsilon_j)\right) = r$$

$$r = r_1 + r_2 - 1$$

Heinrich-Wolfgang Leopoldt (22 août 1927 – 28 juillet 2011)

Preda Mihăilescu

arXiv:0905.1274

Date : Fri, 8 May 2009
14 :52 :57 GMT (16kb)

Title : *On Leopoldt's conjecture and some consequences*

Author : *Preda Mihăilescu*

http ://arxiv.org/abs/0905.1274

The conjecture of Leopoldt states that the p - adic regulator of a number field does not vanish. It was proved for the abelian case in 1967 by Brumer, using Baker theory. If the Leopoldt conjecture is false for a galois field $\mathbf{K}$, there is a *phantom* $\mathbf{Z}_p$ - extension of $\mathbf{K}_\infty$ arising. We show that this is strictly correlated to some infinite Hilbert class fields over $\mathbf{K}_\infty$, which are generated at intermediate levels by roots from units from the base fields. It turns out that the extensions of this type have bounded degree. This implies the Leopoldt conjecture for arbitrary finite number fields.

Preda Mihăilescu

http ://arxiv.org/abs/0905.1274v2

Replaced with revised version

Date : *Sat, 27 Jun 2009 17 :57 :24 GMT (33kb)*

Title : *The T and T^* components of Λ - modules and Leopoldt's conjecture*

Author : *Preda Mihăilescu*

Comments : *Modified second version. Added many details of proofs. The final argument is modified and the proof now extends also to the conjecture of Gross.*

http ://arxiv.org/abs/0905.1274v3

Replaced with revised version

Date : *Tue, 15 Sep 2009 08 :01 :02 GMT (69kb)*

Title : *The T and T^* components of Λ - modules and Leopoldt's conjecture*

Author : *Preda Mihăilescu*

Comments : *Modified third version. Largely extended the build up and proofs and added an Appendix for the technical details. Contains now the Kummer theory of class field radicals needed for the proofs of the Leopoldt and Gross-Kuz'min Conjectures.*

http ://arxiv.org/abs/0905.1274v4

Cite as : arXiv :0905.1274v4

Date : *Sat, 27 Jun 2009 17 :57 :24 GMT (33kb)*
(Submitted on 8 May 2009 (v1), last revised 20 Sep 2010 (this version, v4))

Title : *The T and T^* components of Λ - modules and Leopoldt's conjecture*

Author : *Preda Mihăilescu*

Comments : *In the fourth version there is a modification of Proposition 5 which supports the final argument of proof of Leopoldt's conjecture. Please note also the new series "Seminar Notes on Open Questions in Iwasawa Theory" (snoqit).*

http ://arxiv.org/abs/0909.2738

Date : *Tue, 15 Sep 2009 08 :09 :10 GMT (11kb)*
Title : *Applications of Baker Theory to the Conjecture of Leopoldt*
Authors : *Preda Mihăilescu*
Comments : *A proof variant for the Leopoldt conjecture, using Diophantine approximation. The final step of the proof uses class field theory and for this we draw back on some results from the third version of arXiv :0905.1274*
In this paper we use Baker theory for giving an alternative proof of Leopoldt's Conjecture for totally real extensions $\mathbf{K}$*. This approach uses a formulation of the Conjecture for relative extensions which can be proved by Diophantine approximation and reduces the problem to the fact that the module of classes containing products of* p *- units, is finite. The proof of this fact is elementary, but requires class field theory. The methods used here are a sharpening of the ones presented at the SANT meeting in Göttingen, 2008 and exposed in [M1] and [M2]*

http ://arxiv.org/abs/1105.5989

Date : *Submitted on 30 May 2011*

Title : *SNOQIT I : Growth of Λ–modules and Kummer theory*

Authors : *Preda Mihăilescu*

Comments : *The paper contains at the end a proof of the conjecture of Gross - Kuz'min, for CM extensions of* $\mathbf{Q}$*. The main topic of the paper is the investigation of the growth of order and ranks at finite levels of some Lambda modules (*p*-parts of ideal class groups).*

SNOQIT : *Seminar Notes on Open Questions in Iwasawa Theory*

Référence

Une journée annuelle de la SMF sur les nombres transcendants a déjà été organisée en 1984, elle a donné lieu à un ouvrage collectif

D. Bertrand, M. Emsalem, F. Gramain, M. Huttner, M. Langevin, M. Laurent, M. Mignotte, J-C. Moreau, P. Philippon, E. Reyssat, M. Waldschmidt – *Les Nombres Transcendants.* Mémoire Soc. Math. France, N.S. **13** (1984), 60 pp.
http ://smf4.emath.fr/Publications/Memoires/1984/

Vendredi 15 juin 2012

Société Mathématique de France SMF

Journée annuelle de la SMF

“Transcendance et irrationalité”

Questions de transcendance : grandes conjectures, petits progrès

Michel Waldschmidt

Institut de Mathématiques de Jussieu & CIMPA
http://www.math.jussieu.fr/∼miw/