نشر ریاضی، سال ۱۴، شمارهٔ ۲، صص ۵ـ۱۶

برخی مسائل حل‌نشدهٔ کلاسیک در نظریهٔ اعداد*

میشل والدشمیت*

ترجمهٔ مریم رفیع، کامبیز محمودیان

چکیده

مسائل حل‌نشدهٔ بسیاری در نظریهٔ اعداد وجود دارد. برخی از آنها بسیار مشهورند (به‌ویژه، پس از تعیین جایزه از طرف بنیاد کلی[1] ([J 2000])، مانند فرض ریمان یا حدس برچ[2] و سوینرتن‌ـدایر[3]. ما مسائل کلاسیک دیگری را که بیان صورت آنها معلومات زیادی نمی‌طلبد، بررسی می‌کنیم. این مسائل شامل بعضی معادلات دیوفانتی، حدسهای کاتالان[4] و پیلایی[5]، حدس abc، طیف مارکوف و مسألهٔ وارینگ[6] است.

۱. معادلات دیوفانتی

۱.۱ نقاط روی خمها

در بین ۲۳ مسألهٔ هیلبرت ([Hi 1900]، [Gu 2000]) دهمین مسأله کوتاهترین صورت را دارد:

> اگر معادله‌ای دیوفانتی با هر تعداد مجهول و با ضرایب عددی صحیح داده شده باشد، فرایندی طراحی کنید که به‌وسیلهٔ آن بتوان با تعدادی متناهی عملیات، تعیین کرد که معادله جواب صحیح گویا دارد یا نه.

معادلهٔ دیوفانتی معادله‌ای به شکل $f(\underline{x}) = 0$ است که در آن $f \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ یک چندجمله‌ای مفروض است و مجهولات $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ اعداد صحیح گویا هستند. حل این معادله، معادل است با تعیین نقاط صحیح روی ابررویهٔ متناظر در فضای آفین. مسألهٔ دهم هیلبرت این است که الگوریتمی ارائه دهیم که به ما بگوید معادلهٔ دیوفانتی مفروض جواب دارد یا نه.

انواع دیگری از معادلات دیوفانتی نیز وجود دارد. اولاً می‌توان جوابهای گویا را به‌جای جوابهای صحیح در نظر گرفت: در این حالت نقاط گویای روی یک ابررویه بررسی می‌شود. در مرحلهٔ بعد می‌توان نقاط صحیح یا گویا

1. Clay 2. Birch 3. Swinnerton-Dyer 4. Catalan

5. Pillai 6. Waring

روی یک میدان عددی را بررسی کرد. وضعیتی میانی بین نقاط صحیح و گویا نیز وجود دارد، که در آن مجهولات، نقاط Sـصحیح هستند. بدین معنی که S یک مجموعهٔ متناهی ثابت از اعداد اول (اولهای گویا، یا ایده‌آلهای اول در میدان عددی) است و [شمارنده‌های اولِ] مخرج جوابها مقیدند که به S تعلق داشته باشند. دو مثال از اینها عبارت‌اند از معادلهٔ تو‌ـمالر[1]:

$$F(x, y) = p_1^{z_1} \ldots p_k^{z_k}$$

که در آن F یک چندجمله‌ای همگن با ضرایب صحیح است و p_1، ...، p_k اولهای ثابتی هستند (و مجهولات x، y، z_1، ...، z_k اعداد صحیح گویا با ضابطهٔ $z_i \geq 0$اند) و معادلهٔ رامانوجان‌ـناگل[2] تعمیم‌یافته $x^2 + D = p^n$ که در آن D یک عدد صحیح ثابت، p یک اول ثابت، و مجهولات x و n اعداد صحیح گویا با ضابطهٔ $n \geq 0$ هستند (برای این معادلات و معادلات مشابه دیگر مثلاً به [ShT 1986]، [Ti 1998]، [Sh 1999] و [BuSh 2001] نگاه کنید).

کارکردن با دستگاهی از معادلات دیوفانتی نیز جالب است، یعنی بررسی نقاط گویا یا صحیح روی واریته‌های جبری.

در پیِ کارهای دیویس[3]، پاتنم[4] و رابینسن[5]، پاسخ نهایی به‌صورت اصلی مسألهٔ دهم هیلبرت را ماتیاسویچ[6] در سال ۱۹۷۰ به‌دست داد. این جواب نقطهٔ اوج نظریه‌ای غنی و زیبا بود (به [DaMR 1976] و [Mat 1999] نگاه کنید). پاسخ منفی است: امروزه دیگر امیدی نیست که بتوان به نظریه‌ای کامل دربارهٔ این موضوع دست یافت. اما هنوز می‌توان امیدوار بود که اگر مسألهٔ اولیهٔ هیلبرت را به معادلات با متغیرهای کم‌محدود کنیم پاسخ مثبتی وجود داشته باشد، مثلاً حالت $n = 2$ که معادل است با بررسی نقاط صحیح روی یک خم مسطح. در این حالت نتایج عمیقی در طول قرن

1. Thue-Mahler 2. Nagell 3. M. Davis 4. H. Putnam

5. J. Robinson 6. Yu. Matiyasevich

بیستم به‌دست آمده است و مطالب بسیاری معلوم شده است، اما بسیار بیشتر از آن هنوز پوشیده مانده است.

اساسیترین نتایج، نتایجِ زیگل (۱۹۲۹) و فالتینگس (۱۹۸۰) است. قضیهٔ زیگل با نقاط صحیح سروکار دارد و الگوریتمی ارائه می‌دهد که مشخص می‌کند مجموعهٔ جوابها مجموعه‌ای متناهی است یا نامتناهی. نتیجهٔ فالتینگس که حدس موردل را حل و فصل می‌کند همین کار را برای جوابهای گویا، یعنی نقاط گویا روی خمها، انجام می‌دهد. به این دو دستاورد برجستهٔ قرن بیستم، سهم وایلز را نیز می‌توان افزود. کار او نه تنها آخرین قضیهٔ فرما را فیصله داد، بلکه شماری از نتایج مشابه را برای سایر خمها نیز به‌دست داد [Kr 1999].

در اینجا چند مسألهٔ طبیعی پیش می‌آید:

الف) جواب‌دادن به مسألهٔ دهم هیلبرت برای حالت خاص خمهای مسطح، یعنی ارائهٔ الگوریتمی برای تشخیص اینکه یک معادلهٔ دیوفانتی مفروض $f(x,y)=0$ جواب (در $\mathbb{Z}$ یا در $\mathbb{Q}$) دارد یا نه.

ب) ارائهٔ یک کران بالا برای تعداد نقاط گویا یا صحیح روی یک خم.

ج) ارائهٔ الگوریتمی برای حل صریح یک معادلهٔ دیوفانتی مفروض با دو مجهول.

مسائل دیگری را نیز می‌توان مطرح کرد. مثلاً در مسألهٔ (ب) می‌توان از تعداد دقیق جوابها پرسید. ممکن است مناسبتر باشد که به‌طورکلیتر تعداد نقاط روی هر میدان عددی را بررسی کرد، یا تعداد نقاطِ از درجهٔ کراندار را در نظر گرفت و سری مولد مربوطه را مطالعه کرد ... تعداد مسائل حل‌نشده بی‌پایان است!

هدف ما در اینجا این نیست که آخرین دستاوردها را در مورد این مسأله‌ها به‌دقت تشریح کنیم (مثلاً [La 1991] را ببینید). بلکه بسنده می‌کنیم به گفتن اینکه:

— پاسخ کاملی برای مسألهٔ (الف) هنوز در دسترس نیست: تاکنون هیچ الگوریتمی (بجز تعدادی حدس) برای تشخیص اینکه یک خم نقطهٔ گویا دارد یا نه به‌دست نیامده است؛

— شماری نتایج دربارهٔ مسألهٔ (ب) به‌دست آمده است. جدیدترین کار در این باب را رمون [Re 2000] انجام داده است. او برای تعداد نقاط گویا روی یک خم از گونهٔ بزرگتر یا مساوی با ۲، کران بالای کارآمدی یافته است؛

— و مسألهٔ (ج) حتی برای نقاط صحیح، و حتی برای حالت خاص خمهای از گونهٔ ۲، پاسخی نیافته است.

الگوریتمی عملی موردنظر ما نیست، بلکه (برای شروع) تنها در جستجوی الگوریتمی نظری هستیم. پس اولین مسألهٔ حل‌نشدهٔ ما یافتن صورت کارآمدی از قضیهٔ زیگل است.

مسألهٔ ۱.۱. فرض کنید $f\in\mathbb{Z}[X,Y]$ یک چندجمله‌ای باشد به‌طوری که معادلهٔ $f(x,y)=0$ تنها تعدادی متناهی جواب $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ داشته باشد. کرانی بالا برای $\max\{|x|,|y|\}$ که در آن (x,y) یک جواب است، برحسب درجهٔ f و ماکسیمم قدرمطلق ضرایب f، ارائه دهید.

وجود چنین کرانی بخشی از فرض است، اما مسأله، ارائهٔ آن به‌صورت صریح (و در صورت امکان، بسته) است.

می‌توان مسأله‌های مشابه دیگری با متغیرهای بیشتر مطرح کرد (نقاط گویا روی واریته‌ها)، مثلاً معادلاتِ فُرم نُرمی اشمیت. برای این‌گونه مسائل و ازجمله حدسهای لنگ‌ـوُیتا[1]، خواننده را به [La 1974] و [La 1991] ارجاع می‌دهیم.

حتی حالت فرمهای درجهٔ دوم که ساده‌ترین حالت است به مسأله‌هایی حل‌نشده منجر می‌شود: تعیین همهٔ اعداد صحیح مثبتی که با فرم دوتایی داده‌شده‌ای قابل نمایش هستند، فاصلهٔ زیادی تا حل‌شدن دارد. همچنین، گرچه انتظار می‌رود تعداد نامتناهی میدان درجهٔ دوم حقیقی با عددِ رده‌ای یک وجود داشته باشد، اما حتی نمی‌دانیم که آیا تعداد نامتناهی میدان عددی (بدون محدودیت درجه‌شان) با عدد رده‌ای یک وجود دارد یا نه. به خاطر آورید که اولین حل کامل مسأله‌های عدد رده‌ای ۱ و ۲ی گاوس (برای میدانهای درجهٔ دوم موهومی) با روشهای متعالی به‌دست آمده است (بیکر و استارک)، بنابراین، می‌توان این مسائل را از نوع دیوفانتی محسوب کرد. امروزه روشهای کارآمدتری (گولدفلد[2]، گروس‌ـزاگیر[3]، ... ـــ [La 1991] فصل V، بخش ۵ را ببینید) در دسترس است.

یک مسألهٔ حل‌نشدهٔ مرتبط با این مطلب، تعیین اعداد مناسب اویلر [Ri 2000] است. عدد صحیح مثبت n را ثابت نگه دارید. اگر p یک عدد اول فرد باشد که برای آن اعداد صحیح $x\geq 0$ و $y\geq 0$ وجود داشته باشند که $p=x^2+ny^2$، آنگاه

(i) $gcd(x,ny)=1$

(ii) معادلهٔ $p=X^2+nY^2$ با مجهولات صحیح $X\geq 0$ و $Y\geq 0$ تنها جوابِ $X=x$ و $Y=y$ را دارد.

حال فرض کنید p عددی فرد باشد به‌طوری که اعداد صحیح $x\geq 0$ و $y\geq 0$ با ضابطهٔ $p=x^2+ny^2$ وجود داشته باشند و شرایط (i) و (ii) بالا صادق باشند. اگر از این ویژگیها نتیجه شود که p اول است، آنگاه عدد n یک عدد مناسب نامیده می‌شود. اویلر ۶۵ تا از چنین اعدادی را یافت:

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۵, ۱۶, ۱۸, ۲۱, ۲۲, ۲۴,
۲۵, ۲۸, ۳۰, ۳۳, ۳۷, ۴۰, ۴۲, ۴۵, ۴۸, ۵۷, ۵۸, ۶۰, ۷۰, ۷۲, ۷۸,
۸۵, ۸۸, ۹۳, ۱۰۲, ۱۰۵, ۱۱۲, ۱۲۰, ۱۳۰, ۱۳۳, ۱۶۵, ۱۶۸, ۱۷۷,
۱۹۰, ۲۱۰, ۲۳۲, ۲۴۰, ۲۵۳, ۲۷۳, ۲۸۰, ۳۱۲, ۳۳۰, ۳۴۵, ۳۵۷,
۳۸۵, ۴۰۸, ۴۶۲, ۵۲۰, ۷۶۰, ۸۴۰, ۱۳۲۰, ۱۳۶۵, ۱۸۴۸.

معلوم شده است که حداکثر یک عدد دیگر در این فهرست وجود دارد، ولی انتظار می‌رود عدد دیگری موجود نباشد.

یک مثال ([Sie 1964] مسألهٔ ۵۸ صفحهٔ ۱۱۲؛ [Guy 1994]، D۱۸) از مسأله‌ای حل‌نشده که با حل دستگاهی از معادلات درجهٔ دوم دیوفانتی سروکار دارد می‌آوریم: آیا یک مکعب مستطیل صحیح کامل وجود دارد؟ مسألهٔ وجود مکعب مستطیلی که طول یالهای آن اعداد صحیح x_1، x_2، x_3، طول اقطار وجوه آن اعداد صحیح y_1، y_2، y_3 و طول قطر بزرگ آن عدد صحیح z باشد، معادل با حل دستگاه زیر مرکب از چهار معادلهٔ دیوفانتی

1. Lang-Vojta 2. Goldfeld 3. Gross-Zagier

با هفت مجهول در $\mathbb{Z}$ است:

$$x_1^2 + x_2^2 = y_3^2$$
$$x_2^2 + x_3^2 = y_1^2$$
$$x_3^2 + x_1^2 = y_2^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = z^2.$$

نمی‌دانیم که آیا این دستگاه جوابی دارد یا نه، ولی مشخص شده است که مکعب‌مستطیل صحیح کاملی که طول کوچکترین یالش کوچکتر یا مساوی با 2^{31} باشد وجود ندارد.

۲.۱ معادلات دیوفانتی نمایی

در معادلهٔ دیوفانتیْ مجهولات به شکل متغیرهای چندجمله‌ای ظاهر می‌شوند، درحالی که در معادلهٔ دیوفانتی نمایی (به [Sh T 1986] نگاه کنید)، برخی از نماها نیز متغیر هستند. مثلاً معادلهٔ رامانوجان-نگل $x^2 + D = p^n$ مذکور در بالا را می‌توان یک معادلهٔ دیوفانتی نمایی در نظر گرفت.

یک مسألهٔ مشهور که تا سال ۲۰۰۲ حل‌نشده بود، مسألهٔ کاتالان است که پیشینهٔ آن به ۱۸۴۴ [Cat 1844] برمی‌گردد، همان سالی که لیوویل اولین نمونه‌های اعداد متعالی را ساخت (همچنین به [Sie 1964] مسألهٔ ۷۷، صفحهٔ ۱۱۶؛ [Sie 1970] شمارهٔ ۶۰، صفحهٔ ۴۲؛ [Sh T 1986] فصل ۱۲؛ [N 1986] فصل ۱۱؛ [Ri 1994]؛ [Guy 1994]، D9؛ [Ri 2000] فصل ۷ نگاه کنید). در «یادداشت مستخرج از نامه‌ای از آقای کاتالان مربی مدرسهٔ پلی‌تکنیک پاریس خطاب به سردبیر»، چاپ شده در مجلهٔ کرله [Cat 1844]، چنین آمده است:

> «آقا، از شما خواهش می‌کنم قضیهٔ زیر را در مجله‌تان به چاپ برسانید. من به‌درستی آن اعتقاد دارم، گرچه هنوز موفق به اثبات کامل آن نشده‌ام. شاید دیگران به اثبات آن موفق شوند:
>
> دو عدد صحیح متوالی، بجز ۸ و ۹، نمی‌توانند توان کامل باشند؛ به عبارت دیگر معادلهٔ $x^m - y^n = 1$، که در آن مجهولات اعداد صحیح مثبت هستند، بیش از یک جواب ندارد.»

این ادعا نهایتاً در سال ۲۰۰۲ توسط پرداْ میهایلسکو[1] به اثبات رسید (گزارش یوری بیلو[2] را در وب‌گاهش

`http://www.math.u-bordeaux.fr/~yuri`

ببینید).

قضیهٔ ۲.۱ (حدس کاتالان). معادلهٔ

$$x^p - y^q = 1$$

که در آن x، y، p، q همگی اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی با ۲ هستند، تنها یک جواب دارد: $(x, y, p, q) = (3, 2, 2, 3)$.

به عبارت دیگر تنها مورد از دو عدد متوالی که هر دو توان کامل (یعنی به شکل x^p با $p \geq 2$) باشند عبارت است از $(8, 9)$. اطلاعات بیشتر درین باب در کتاب ریبن‌بویم [Ri 1994] آمده است. نتیجهٔ تایدمن [Ti 1976b] در سال ۱۹۷۶ نشان می‌دهد که تعداد جوابها متناهی است. به بیان دقیقتر، به‌ازای هر جواب x، y، p، q، برای عدد $\max\{p, q\}$ می‌توان ثابت مطلقی به‌عنوان کران ارائه کرد که به‌طور کارآمدی قابل محاسبه باشد. وقتی $\max\{p, q\}$ کراندار شد، تنها تعدادی متناهی معادلهٔ دیوفانتی نمایی برای بررسی باقی می‌ماند و الگوریتمهایی برای تکمیل جواب (مبتنی بر روش بیکر) وجود دارد. چنین کران بالایی محاسبه شده است، اما نسبتاً بزرگ است: بنا بر تحقیق مینیوت[1] هر جواب x، y، p، q برای معادلهٔ کاتالان در نابرابری

$$\max\{p, q\} < 10^{18}$$

صدق می‌کند. جواب نهایی که توسط میهایلسکو داده شده است، نه تنها با میزان دقیق استقلال خطی لگاریتم اعداد جبری (در اینجا تخمینی خاص برای دو لگاریتم منسوب به لوران، مینیوت و نسترنکو[2] مورد نیاز است)، بلکه با ابزارهایی از نظریهٔ میدانهای دایره‌بُر سروکار دارد.

در حالی که در حدس کاتالان همچون قضیهٔ زیگل، جوابهای صحیح موردنظرند، قضیهٔ فالتینگس با نقاط گویا سروکار دارد. دیپندرا پراساد[3] حدس زد که مجموعهٔ چندتایی‌های (x, y, p, q) در $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{N}^2$ که در شرایط زیر

$x^p - y^q = 1$، و خم $X^p - Y^q = 1$ گونهٔ بزرگتر یا مساوی با ۱ دارد

صدق می‌کنند، باید متناهی باشد — شواهدی برای این مطلب از حدس abc حاصل می‌شود (بخش ۱.۲ را ببینید).

اینکه سمت راست معادلهٔ کاتالان ۱ است، بسیار مهم است: اگر آن را با هر عدد صحیح مثبت دیگر عوض کنیم [در مورد معادلهٔ جدید] چیزی نمی‌دانیم. حدس بعدی توسط پیلایی [Pi 1945] در یک همایش انجمن ریاضی هند در علیگره مطرح شد (همچنین [Sie 1964] مسألهٔ ۷۸ صفحهٔ ۱۱۷؛ [ShT 1986]؛ [Ti 1998]؛ [Sh 1999] را ببینید).

حدس ۳.۱ (پیلایی). فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت باشد. معادلهٔ

$$x^p - y^q = k$$

که در آن مجهولات x، y، p و q همگی اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی با ۲ هستند، دارای [حداکثر] تعداد متناهی جواب (x, y, p, q) است.

این حدس بدان معنی است که در دنبالهٔ صعودی توانهای کامل x^p با ضوابط $x \geq 2$ و $p \geq 2$:

$$4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100,$$
$$121, 125, 128, 144, 169, \ldots$$

تفاضل دو جملهٔ متوالی به سمت بینهایت میل می‌کند. حتی نمی‌دانیم که آیا مثلاً برای $k = 2$ معادلهٔ پیلایی تنها تعدادی متناهی جواب دارد یا نه. یک سؤالِ پاسخ نیافتهٔ دیگر در این زمینه این است که آیا ۶ تفاضل دو توان کامل است یا نه، یعنی آیا معادلهٔ دیوفانتی $x^p - y^q = 6$ جواب دارد ([Sie 1970] مسألهٔ 238a صفحهٔ ۱۱۶ را ببینید).

1. Preda Mihailescu 2. Yuri Bilu

1. M. Mignotte 2. Nesterenko 3. Dipendra Prasad

یک حدس که حدس پیلایی از آن نتیجه می‌شود توسط شوری در [Sh 2000] مطرح شده است (این همان مسأله‌ای است که به زیگل در [Si 1929] انگیزه بخشید): فرض کنید $f \in \mathbb{Z}[X]$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n با حداقل دو ریشهٔ متمایز باشد و $f(0) \neq 0$. تعداد ضرایب ناصفر f را L بگیرید و بنویسید:

$$f(X) = b_1 X^{n_1} + \cdots + b_{L-1} X^{n_{L-1}} + b_L$$

که در آن $n = n_1 > n_2 > \ldots > n_{L-1} > 0$ و $b_i \neq 0$ به‌ازای $1 \leq i \leq L$. قرار دهید $H = H(f) = \max_{1\leq i \leq L} |b_i|$.

حدس ۴.۱ (شوری). عددی مثبت مانند C (فقط وابسته به L و H) با خاصیت زیر وجود دارد. فرض کنید m، x و y اعداد صحیح گویایی با ضوابط $m \geq 2$ و $|y| > 1$ باشند به‌طوری که

$$y^m = f(x).$$

آنگاه یا $m \leq C$ و یا یک زیرمجموعِ سره از

$$y^m - b_1 x^{n_1} - \ldots - b_{L-1} x^{n_{L-1}} - b_L$$

وجود دارد که صفر است.

حال اعداد صحیح مثبتی را در نظر بگیرید که توان کامل y^q با $q \geq 2$ باشند و تمام ارقامشان در پایهٔ x (که $x \geq 2$) برابر ۱ باشد، مثلاً ۱۲۱ در پایهٔ ۳، ۴۰۰ در پایهٔ ۷، ۳۴۳ در پایهٔ ۱۸. یافتن همهٔ چنین اعدادی معادل است با حل معادلهٔ دیوفانتی نمایی

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$$

که در آن مجهولات x، y، n، q اعداد صحیح گویای مثبتی هستند که $x \geq 2$، $y \geq 1$، $n \geq 3$ و $q \geq 2$. فقط ۳ جواب شناخته شده است:

$$(x, y, n, q) = (3, 11, 5, 2), (7, 20, 4, 2), (18, 7, 3, 3)$$

متناظر با

$$\frac{3^5 - 1}{2} = 11^2, \quad \frac{7^4 - 1}{6} = 20^2, \quad \frac{18^3 - 1}{17} = 7^3.$$

نمی‌دانیم که آیا اینها همهٔ جوابها هستند یا نه (به [Sh T 1986]؛ [Guy 1994] D10؛ [Ti 1998]؛ [Sh 1999]؛ [BuM 1999] و [Sh 2000] نگاه کنید). اما انتظار می‌رود جواب دیگری وجود نداشته باشد.

مسألهٔ بعدی تعیین همه توانهای کاملی است که در یک پایه ارقام مساوی دارند، که معادل است با حل معادلهٔ

$$z\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$$

که در آن مجهولات x، y، n، q و z اعداد صحیح گویای مثبتی هستند با ضوابط $x \geq 2$، $y \geq 1$، $n \geq 3$، $1 \leq z < x$ و $q \geq 2$.

مسائل حل‌نشدهٔ زیر ([La 1996] را ببینید) را گرچه نمی‌توان معادلهٔ دیوفانتی به‌حساب آورد، اما به این مبحث مربوط‌اند: حدس اعداد اول دوقلو، مسألهٔ گلدباخ (آیا هر عدد صحیح زوج بزرگتر یا مساوی با ۴ مجموع دو عدد اول است؟)، حدس بونیاکوفسکی[1]؛ فرض شینتسل[2] (H)([Sie 1964] بخش ۲۹ را نیز ببینید) و حدس بِیتمن‌ـهُورن[3].

معادلهٔ دیوفانتی

$$x^p + y^q = z^r$$

نیز تاریخی طولانی در ارتباط با آخرین قضیهٔ فرما دارد ([Kr 1999]، [Ri 2000] بخش D. ۹.۲). اگر فقط جوابهای صحیح مثبت (x, y, z, p, q, r) را که در شرط

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

صدق می‌کنند و x و y و z نیز نسبت به هم اول‌اند، در نظر بگیریم، تنها ۱۰ جواب (با تقریب تقارنهای بدیهی؛ مثلاً $3^2 = 2^3 + 1$ فقط یک جواب حساب می‌شود) شناخته شده است:

$$1 + 2^3 = 3^2,\ 2^5 + 7^2 = 3^4,\ 7^3 + 13^2 = 2^9,\ 2^7 + 17^3 = 71^2,$$
$$3^5 + 11^4 = 122^2,\ 17^7 + 76271^3 = 21063928^2,$$
$$1414^3 + 2213459^2 = 65^7,\ 9262^3 + 15312283^2 = 113^7,$$
$$43^8 + 96222^3 = 30042907^2,\ 33^8 + 1549034^2 = 15613^3.$$

به هر حال حدس abc (به بخش ۱.۲ نگاه کنید) پیش‌بینی می‌کند که مجموعهٔ همهٔ چنین جوابهایی متناهی است (این حدسِ فرماـکاتالان است که توسط دارمون[4] و گرانْویل[5] فرمولبندی شده است ــ [Mau 1997] را ببینید). در همهٔ جوابهای شناخته‌شده یکی از p و q و r، ۲ است؛ و این موضوع، تایدمن و زاگیر را به این حدس (که به حدس بیل[6] نیز مشهور است ــ [Mau 1997] را ببینید) رهنمون شد که هیچ جوابی با این قید اضافه که p و q و r هر سه بزرگتر یا مساوی با ۳ باشند، وجود ندارد.

بنابر تعریف [Gy 2001]، یک چندتایی دیوفانتی، چندتایی $(a_1, \ldots, a_n)$ از اعداد صحیح مثبت متمایز است به‌طوری که به‌ازای هر $1 \leq i < j \leq n$، $a_i a_j + 1$ مربع کامل باشد. فرما مثال $(1, 3, 8, 120)$ را ارائه کرد و اویلر نشان داد که دوتایی دیوفانتی (a_1, a_2) را به چهارتایی دیوفانتی (a_1, a_2, a_3, a_4) می‌توان گسترش داد. نمی‌دانیم که آیا هیچ پنج‌تایی دیوفانتی $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ وجود دارد یا نه، ولی دویه‌لا [Du 2001] ثابت کرد که هر پنج‌تایی دیوفانتی در $\max\{a, a_2, a_3, a_4, a_5\} \leq 10^{10^{26}}$ صدق می‌کند. او همچنین ثابت کرد هیچ شش‌تایی دیوفانتی وجود ندارد.

۳.۱ طیف مارکوف

معادلهٔ مارکوف اصلی (۱۸۷۹) عبارت است از $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ (به [Ca 1957] فصل ۲، [CuFl 1989] فصل ۲، [Guy 1994] D12 و [Ri 2000] بخش 10.5.B نگاه کنید). حال الگوریتمی ارائه می‌دهیم که همهٔ جوابهای صحیح مثبت را ایجاد می‌کند. فرض کنید $(x, y, z) = (m, m_1, m_2)$ یک جواب باشد. دو مختصهٔ جواب را ثابت

1. Bouniakovsky 2. Schinzel 3. Bateman-Horn 4. Darmon 5. Granville 6. Beal

نگه می‌داریم و در نتیجه معادله‌ای درجهٔ ۲ برحسب مختصهٔ سوم به‌دست می‌آوریم که یک جواب آن را از قبل می‌شناسیم. با روش معمولی قطع‌دادن با یک خط گویا یک جواب دیگر به‌دست می‌آوریم. بدین ترتیب از یک جواب (m, m_1, m_2) سه جواب دیگر به‌دست می‌آوریم:

$$(m', m_1, m_2), \qquad (m, m_1', m_2), \qquad (m, m_1, m_2')$$

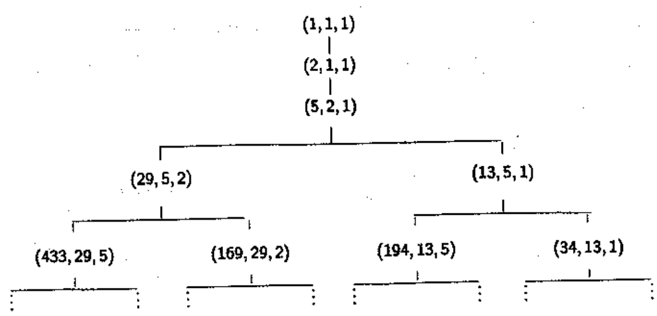
که در آن

$$m' = 3m_1m_2 - m \text{ و } m_1' = 3mm_2 - m_1 \text{ و } m_2' = 3mm_1 - m_2.$$

این سه جواب، همسایه‌های جواب اولیه نامیده می‌شوند. بجز دو جوابِ به‌اصطلاح منفرد $(1,1,1)$ و $(2,1,1)$، سه مؤلفهٔ (m, m_1, m_2) دوبه‌دو متمایز هستند و سه همسایهٔ (m, m_1, m_2) نیز دوبه‌دو متمایزند. با فرض $m > m_1 > m_2$ می‌توان نشان داد که

$$m_1' > m_2' > m > m'.$$

بنابراین یک همسایهٔ (m, m_1, m_2) وجود دارد که بزرگترین مؤلفه‌اش از m کوچکتر است و دو همسایه وجود دارند که بزرگترین مؤلفه‌شان از m بزرگتر است، که عبارت‌اند از (m_1', m, m_2) و (m_2', m, m_1). به‌راحتی نتیجه می‌شود که با شروع از $(1,1,1)$ و اختیار متوالی همسایه‌های هر جواب به‌دست آمده، همهٔ جوابها به‌دست می‌آید. در زیر، درخت مارکوف با نمادگذاری هاروی کُن [Coh 1993]، ارائه می‌شود که در آن (m_1', m, m_2) در سمت راست و (m_2', m, m_1) در سمت چپ نوشته شده است.



مسألهٔ اصلی حل‌نشده درین مبحث ([Ca 1957] صفحهٔ ۳۳، [CuFl 1989] صفحهٔ ۱۱ و [Guy 1994]، D۱۲) اثبات این مطلب است که هر بزرگترین مؤلفه، فقط در یک سه‌تایی از این درخت ظاهر می‌شود:

حدس ۵.۱. اگر به‌ازای عدد صحیح مثبت و ثابت mای معادلهٔ

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$$

دارای جوابی صحیح چون (m_1, m_2) با ضابطهٔ $0 < m_1 \le m_2 \le m$ باشد آنگاه چنین زوج (m_1, m_2) ای یکتاست.

درستی این حدس به‌ازای $m \le 10^{105}$ تحقیق شده است.

دنبالهٔ

۱, ۲, ۵, ۱۳, ۲۹, ۳۴, ۸۹, ۱۶۹, ۱۹۴, ۲۳۳, ۴۳۳,
۶۱۰, ۹۸۵, ۱۳۲۵, ۱۵۹۷, ...

از اعداد صحیح m صادق در فرضیات حدس ۵.۱، با مسألهٔ بهترین تقریب گویا برای اعداد گنگ درجهٔ دوم ارتباط نزدیکی دارد: برای هر m درین دنباله یک فرم درجهٔ دوم صریح $f_m(x,y)$ وجود دارد به‌طوری که معادلهٔ $f_m(x,1) = 0$ یک ریشهٔ α_m دارد که به‌ازای آن

$$\limsup_{q\to\infty} \left|q(q\alpha_m - p)\right| = \frac{m}{\sqrt{9m^2-4}}. \qquad (6.1)$$

دنبالهٔ $(m, f_m, \alpha_m, \mu_m)$ که در آن $\mu_m = \frac{\sqrt{9m^2-4}}{m}$، چنین آغاز می‌شود:

m	1	2	5	13
$f_m(x,1)$	x^2+x-1	x^2+2x-1	$5x^2+11x-5$	$13x^2+29x-13$
α_m	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2211}$	$\overline{221111}$
μ_m	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{221}/5$	$\sqrt{1517}/13$

سطر سوم، بسط کسر مسلسل α_m را می‌دهد، که در آن مثلاً $\overline{2211}$ نشان‌دهندهٔ $[2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, \dots]$ است. حدس ۵.۱ معادل با این ادعاست که در نماد f_m هیچ شبهه‌ای وجود ندارد: به‌ازای mای داده‌شده، دو عدد درجهٔ دوم α_m که در (۶.۱) صدق می‌کنند باید ریشهٔ فرمهای درجهٔ دوم معادلی باشند.

بنابراین طیف مارکوف ارتباط نزدیکی با تقریب گویای یک عدد حقیقی دارد. تعمیمی از این مطلب به تقریب همزمان در بخش ۲.۲ بررسی می‌شود.

۲. تقریبات دیوفانتی

درین بخش، بحث خود را به مسائلی در تقریبات دیوفانتی محدود می‌کنیم که نیازی به معرفی مفهوم ارتفاعِ اعداد جبری ندارند.

۱.۲ حدس abc

برای هر عدد صحیح مثبت n قرار می‌دهیم

$$R(n) = \prod_{p|n} p.$$

$R(n)$ ریشه یا بخش خالی از مربع n نامیده می‌شود.

حدس abc زاییدهٔ گفت‌وگویی بین مسر و استرله است ([Œ1988] صفحهٔ ۱۶۹؛ همچنین به [Ma 1990]، [La 1990]، [La 1991] فصل ۲، بخش ۱؛ [La 1993] فصل ۴، بخش ۷؛ [Guy 1994]، B۱۹؛ [Br 1999]؛ [Ri 2000] بخش ۹.۴.E؛ [V 2000]؛ [Maz 2000] و [2] نیز نگاه کنید).

حدس ۱.۲ (حدس abc). به‌ازای هر $\epsilon > 0$، عدد مثبت $\kappa(\epsilon)$ با خاصیت زیر وجود دارد: اگر a، b، c سه عدد صحیح گویای مثبت و نسبت به هم اول

باشند که در $a+b=c$ صدق کنند، آنگاه

$$c<\kappa(\epsilon)R(abc)^{۱+\epsilon}.$$

حدس ۱.۲ یک حدس پیشینِ سپیرو[1] در مورد هادی خمهای بیضوی را نتیجه می‌دهد: به‌ازای هر $\epsilon>۰$، ثابتی چون $C>۰$ وجود دارد به‌طوری که برای هر خم بیضوی با مبین مینیمال Δ و هادی N، داریم $|\Delta|<CN^{۶+\epsilon}$.

اگر a و b و c صحیحِ مثبت و نسبت به هم اول باشند و $a+b=c$، تعریف می‌کنیم

$$\lambda(a,b,c)=\frac{\log c}{\log R(abc)}$$

و

$$\varrho(a,b,c)=\frac{\log abc}{\log R(abc)}.$$

در جدول زیر شش مقدار بزرگتر در میان مقادیر شناخته‌شدهٔ $\lambda(a,b,c)$ آورده شده است (در [Br 1999] صفحات ۱۰۲_۱۰۵ و نیز در [۲]، همهٔ ۱۴۰ مقدار شناخته‌شدهٔ $\lambda(a,b,c)$ را که بزرگتر یا مساوی با ۱٫۴ هستند می‌توان یافت).

	$a+b=c$	$\lambda(a,b,c)$	کاشف(ها)
1	$2+3^{10}\cdot 109=23^5$	1.629912...	É. Reyssat
2	$11^2+3^25^67^3=2^{21}\cdot 23$	1.625991...	B. de Weger
3	$19\cdot 1307+7\cdot 29^2\cdot 31^8=2^8\cdot 3^{22}\cdot 5^4$	1.623490...	J. Browkin – J. Brzezinski
4	$283+5^{11}\cdot 13^2=2^8\cdot 3^8\cdot 17^3$	1.580756...	J. Browkin – J. Brzezinski, A. Nitaj
5	$1+2\cdot 3^7=5^4\cdot 7$	1.567887...	B. de Weger
6	$7^3+3^{10}=2^{11}\cdot 29$	1.547075...	B. de Weger

در جدول زیر شش مقدار بزرگتر در میان مقادیر شناخته‌شدهٔ $\rho(a,b,c)$ آورده شده است. منبع ما [۲] است که در آن فهرست کامل ۴۶ سه‌تایی شناخته‌شدهٔ (a,b,c) با $۰<a<b<c$ و $a+b=c$ و $\gcd(a,b)=۱$ با شرط $\rho(a,b,c)>۴$ آمده است.

	$a+b=c$	$\varrho(a,b,c)$	کاشف(ها)
1	$13\cdot 19^6+2^{30}\cdot 5=3^{13}\cdot 11^2\cdot 31$	4.41901...	A. Nitaj
2	$2^5\cdot 11^2\cdot 19^9+5^{15}\cdot 37^2\cdot 47=3^7\cdot 7^{11}\cdot 743$	4.26801...	A. Nitaj
3	$2^{19}\cdot 13\cdot 103+7^{11}=3^{11}\cdot 5^3\cdot 11^2$	4.24789...	B. de Weger
4	$2^{35}\cdot 7^2\cdot 17^2\cdot 19+3^{27}\cdot 107^2=5^{15}\cdot 37^2\cdot 2311$	4.23069...	A. Nitaj
5	$3^{18}\cdot 23\cdot 2269+17^3\cdot 29\cdot 31^8=2^{10}\cdot 5^2\cdot 7^{15}$	4.22979...	A. Nitaj
6	$17^4\cdot 79^3\cdot 211+2^{29}\cdot 23\cdot 29^2=5^{19}$	4.22960...	A. Nitaj

همان‌طور که لانژون [Lan 1992] پی برده است، مسألهٔ حل‌نشدهٔ زیر [E 1980] از نتایج حدس abc ۱.۲ است:

حدس ۲.۲ (اردوش-وودز)[2]. عدد صحیح مثبت kای وجود دارد به‌طوری که

1. L. Szpiro 2. Erdös-Woods

به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n، شرایط

$$R(m+i)=R(n+i)\qquad (i=۰,\cdots,k-۱)$$

نتیجه می‌دهند $m=n$.

حدس ۲.۲ با سؤال زیر از رابینسن معادل است: آیا حساب مرتبهٔ اول، تنها با استفاده از تابع تالی $S:x\mapsto x+۱$ و نسبت به هم اول‌بودن $x\perp y\Longleftrightarrow\gcd(x,y)=۱$ قابل تعریف است؟ برای پاسخ‌دادن به این سؤال کافی است بدانیم که آیا تابع $x\mapsto ۵^x$ را می‌توان در زبان $(S,\perp)$ تعریف کرد ([Wo 1981]، [Guy 1994] B۲۹ و B۳۵، [BaLSW 1996]).

از حدس ۱.۲ نتیجه می‌شود که بجز احیاناً تعدادی متناهی استثناء (m,n)، $k=۳$ یک مقدار قابل‌قبول است. فرض کنید $m>n$. با استفاده از حدس ۱.۲ با $a=m(m+۲)$، $b=۱$، $c=(m+۱)^۲$ به‌دست می‌آوریم

$$m^۲\le\kappa(\epsilon)R(m(m+۱)(m+۲))^{۱+\epsilon}.$$

حال اگر $R(m+i)=R(n+i)$ به‌ازای $i=۰,۱,۲$، آنگاه $R(m+i)$، $m-n$ را می‌شمارد. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عدد از سه عدد $R(m)$، $R(m+۱)$ و $R(m+۲)$، ۱ یا ۲ است. بنابراین $\frac{۱}{۲}R(m(m+۱)(m+۲))$، $m-n$ را می‌شمارد و در نتیجه $m^۲\le\kappa(\epsilon)(۲m)^{۱+\epsilon}$. این نشان می‌دهد m کرانی (مثلاً $۸\kappa(\frac{۱}{۲})^۲$) دارد.

گمان می‌رود که هیچ استثنایی با $k=۳$ وجود نداشته باشد. یعنی اگر m و n شمارنده‌های اول یکسانی داشته باشند و همین‌طور $m+۱$ و $n+۱$ شمارنده‌های اول یکسان و نیز $m+۲$ و $n+۲$ شمارنده‌های اول یکسان داشته باشند، آنگاه $m=n$.

به‌سادگی دیده می‌شود $k=۲$ مقدار قابل‌قبولی نیست: ۷۵ و ۱۲۱۵ شمارنده‌های اول یکسان دارند و همین‌طور ۷۶ و ۱۲۱۶.

$$R(۷۵)=۱۵=R(۱۲۱۵)\quad\text{و}\quad R(۷۶)=۲\times ۱۹=R(۱۲۱۶).$$

گذشته از این مثال منفرد، دنباله‌ای از مثالها نیز وجود دارد: به‌ازای $m=۲^h-۲$ و $n=۲^hm$ داریم

$$R(m+۱)=R(n+۱)\qquad\text{و}\qquad R(m)=R(n)$$

زیرا $n+۱=(m+۱)^۲$.

شوری تعمیمی از حدس اردوش-وودز به تصاعدهای حسابی را مطرح کرده است:

آیا عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر m، n، d و d' عدد صحیح مثبت با ضابطهٔ $\gcd(m,d)=\gcd(n,d')=۱$، از شرایط

$$R(m+id)=R(n+id')\qquad(i=۰,\cdots,k-۱)$$

نتیجه شود $m=n$ و $d=d'$؟

اگر جواب مثبت باشد عدد صحیح k بزرگتر از ۳ است. این مطلب از مثالهایی از چهارتایی‌های (m,n,d,d') مانند $(2,2,1,7)$، $(2,8,79,1)$ یا $(4,8,23,1)$ نتیجه می‌شود:

$$R(2)=R(2), R(3)=R(2+7), R(4)=R(2+2\times 7),$$
$$R(2)=R(4)=R(8), R(2+79)=R(4+23)=R(9),$$
$$R(2+2\times 79)=R(4+2\times 23)=R(10).$$

مسأله‌ای دیگر مرتبط با این موضوع از موتسکین[1] و اشتراوس[2] ([Guy 1994] B۱۹)، تعیین همهٔ زوجهای m و n از اعداد صحیح است به‌طوری که m و $n+1$ شمارنده‌های اول یکسان و نیز n و $m+1$ شمارنده‌های اول یکسان داشته باشند. مثالهای شناخته‌شده عبارت‌اند از

$$m=2^k+1,\quad n=m^2-1\quad (k\ge 0)$$

و مثال منفرد $m=35=5\times 7$، $n=4374=2\times 3^7$، که به‌دست می‌دهد: $m+1=2^2\times 3^2$ و $n+1=5^4\times 7$.

همچنین حدسی دیگر منسوب به پال اردوش در [Lan 1992] و درسلر[3] در [۲] را نقل می‌کنیم.

حدس ۳.۲ (اردوش-درسلر). اگر a و b دو عدد صحیح مثبت با ضوابط $a<b$ و $R(a)=R(b)$ باشند، آنگاه عددی اول چون p با ضابطهٔ $a<p<b$ وجود دارد.

اولین تخمینها در جهت حدس abc (۱.۲) توسط استوارت و تایدمن به‌دست آمده‌اند و سپس توسط استوارت و یو کون‌روی بهتر شده‌اند (به [StY 1991] نگاه کنید). روش آنها استفاده از کرانهای پایین (p-آدیک) برای فرمهای خطی از لگاریتمهاست: اگر a و b و c اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اول با $a+b=c$ باشند، آنگاه

$$\log c\le \kappa R^{\frac{1}{3}}(\log R)^3$$

که $R=R(abc)$.

یک صورت عددی توسط وُنگ چی هو[4] در سال ۱۹۹۹ به‌دست آمده است: به‌ازای $c>2$ تخمین

$$\log c\le R^{\frac{1}{3}+\frac{15}{\log\log R}}$$

صادق است.

بیکر [B 1998] و فیلیپون [P 1999a] به ارتباطهای دیگری بین حدس abc و میزان استقلال خطی لگاریتم اعداد جبری اشاره کرده‌اند (همچنین به [W 2000b] تمرین ۱۱.۱ نگاه کنید). ما در اینجا حدس اصلی از ضمیمهٔ [P 1999a] را ذکر می‌کنیم. به‌ازای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ که a و b اعداد صحیح نسبت به هم اول باشند، مقدار $\log\max\{|a|,|b|\}$ را با $h(\frac{a}{b})$ نشان می‌دهیم.

حدس ۴.۲ (فیلیپون). اعداد حقیقی ϵ، α و β با شرایط $0<\epsilon<\frac{1}{2}$، $\alpha\ge 1$ و $\beta\ge 0$ و عدد صحیح مثبت B وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر دو عدد گویای ناصفر x، y با شرط $xy^B\neq 1$، اگر S مجموعهٔ اعداد اولی باشد که به‌ازای آنها $|xy^B+1|_p<1$، آنگاه

$$-\sum_{p\in S}\log|xy^B+1|_p \le B\Big(\alpha h(x)+\epsilon h(y)+(\alpha B+\epsilon)(B+\sum_{p\in S}\log p)\Big).$$

نتیجهٔ این حدس یک کران پایین برای فاصلهٔ p-آدیک بین $-xy^B$ و ۱ است؛ نکتهٔ اصلی این است که چندین p دخیل هستند.

حدسهای لنگ-والْدشمیت در [La 1978b] (مقدمهٔ فصلهای ۱۰ و ۱۱، صفحات ۲۱۲-۲۱۷) مثالهایی از تخمینهای ارشمیدسی خوش‌بینانه مربوط به میزان استقلال خطی لگاریتم اعداد جبری هستند. یک مثال ساده این است:

حدس ۵.۲ (لنگ-والْدشمیت) به‌ازای هر $\epsilon>0$، ثابت $C(\epsilon)>0$ وجود دارد به‌طوری که اگر a_1، ...، a_m، b_1، ...، b_m اعداد صحیح گویای ناصفری با شرط $a_1^{b_1}\cdots a_m^{b_m}\neq 1$ باشند، آنگاه

$$|a_1^{b_1}\dots a_m^{b_m}-1|\ge \frac{C(\epsilon)^m B}{(|b_1|\cdots|b_m|\cdot|a_1|\cdots|a_m|)^{1+\epsilon}}$$

که در آن $B=\max_{1\le i\le m}|b_i|$.

مسائل مشابهی مربوط به تقریبهای دیوفانتی روی چنبره‌ها در [La 1991] فصل ۹، بخش ۷ مورد بحث قرار گرفته است.

سانداو در [So 2002] نشان داده است که یک کران پایینِ دقیقِ حدسی برای تعدادی نامتناهی عدد به شکل

$$|e^{b_0}a_1^{b_1}\cdots a_m^{b_m}-1|$$

که در آن b_0 دلخواه و همهٔ نماهای b_i دارای علامت یکسانی هستند، گنگ‌بودن ثابت اویلر را نتیجه می‌دهد.

از هر یک از حدسهای ۱.۲ و ۵.۲ یک نتیجهٔ کمّی در جهت بهسازی حدس پیلایی (حدس ۳.۱) حاصل می‌شود:

حدس ۶.۲. به‌ازای هر $\epsilon>0$، ثابت $C(\epsilon)>0$ وجود دارد به‌طوری که اگر x، y، p، q اعداد صحیح مثبتی با شرط $x^p\neq y^q$ باشند، آنگاه داریم

$$|x^p-y^q|\ge C(\epsilon)\max\{x^p,y^q\}^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\epsilon}.$$

دو حالت خاص از حدس ۶.۲ را بررسی می‌کنیم: اول حالتِ $(p,q)=(2,3)$، که منجر به حدس هال [H 1971] (و نیز [La 1991] فصل ۲، بخش ۱) می‌شود:

حدس ۷.۲ (هال). اگر x و y اعداد صحیح مثبتی با شرط $y^2\neq x^3$ باشند، آنگاه

$$|y^2-x^3|\ge C\max\{y^2,x^3\}^{1/6}.$$

در این حکم ϵای وجود ندارد ـــ ممکن است حدس ۷.۲ به نوعی، تصادفاً درست باشد، اما انتظار هم می‌توان داشت که این تخمین قویتر از آن

1. T. S. Motzkin 2. E. G. Straus 3. R. E. Dressler
4. Wong Chi Ho

باشد که بتواند درست باشد. نمای ۱/۶ بهینه است؛ این مطلب را دانیلوف[1] و شینتسل با استفاده از اتحاد کلاین برای بیست‌وجهی

$$(X^۲-۶X+۴)^۳-(X^۲+۱)(X^۲-۹X+۱۹)^۲=۲۷(۲X-۱۱)$$

نشان داده‌اند ([Lan 2001] قضیهٔ ۶).

کوچکترین مقدار شناخته‌شده برای $|y^۲-x^۳|/\sqrt{x}$ (الکیز[2]، ۱۹۹۸) عبارت است از ۰٫۰۲۱۴۰۰۰ با

$$x = ۳ \times ۷۲۱۱ \times ۳۸۷۹۱ \times ۶۹۷۵۸۴۱,$$

$$y = ۲ \times ۳^۲ \times ۱۵۲۲۸۷۴۸۸۱۹ \times ۱۶۳۳۹۱۵۹۷۸۲۲۹,$$

$$x^۳-y^۲ = ۳^۳ \times ۷^۲ \times ۱۷ \times ۷۳.$$

دومین حالت خاص $(x,y)=(۳,۲)$ است. این مسأله که $۳^n-۲^m$ در مقایسه با ۲^m چقدر کوچک می‌تواند باشد، توسط لیتلوود ([Guy 1994]، F۲۳) مطرح شده است. مثالِ

$$\frac{۳^{۱۲}}{۲^{۱۹}} = ۱+\frac{۷۱۵۳}{۵۲۴۲۸۸} = ۱٫۰۱۳\ldots$$

با گامهای موسیقی ارتباط دارد.

برای مسائل دیگری مربوط به معادلات دیوفانتی نمایی، خواننده را ارجاع می‌دهیم به فصل ۱۲ کتاب شوری و تایدمن [ShT 1986] و نیز به مقالات توصیفی جدیدتر [Ti 1998] و [Sh 1999].

۲.۲ تو-زیگل-روث-اشمیت

یکی از مسائل حل‌نشدهٔ اصلی در تقریبهای دیوفانتی یافتن صورت کارآمدی از قضیهٔ تو-زیگل-روث[3] است: به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ و هر عدد جبری گنگ α، ثابت مثبت $C(\alpha,\epsilon)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر عدد گویای p/q،

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| > C(\epsilon)q^{-۲-\epsilon}. \qquad (۸.۲)$$

از آنجا که به مسألهٔ دهم هیلبرت توسط ماتیاسویچ پاسخ منفی داده شده است، مینیوت اظهار کرده است که شاید ارائهٔ صورت کارآمدی از قضیهٔ زیرفضای اشمیت[4] (که قضیهٔ تو-زیگل-روث را به تقریبهای دیوفانتی همزمان تعمیم می‌دهد) ناممکن باشد. اگر معلوم شود که برای حالت خاص قضیهٔ تو-زیگل-روث نیز چنین است، آنگاه بنابر قول بومبیری[5] ([2] را ببینید)، صورت کارآمد حدس abc نیز غیرقابل حصول خواهد بود. میشل لانژون متوجه شد که حدس abc یک نابرابریِ قویتر از نابرابری روث را نتیجه می‌دهد:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| > \frac{C(\epsilon)}{R(pq)q^{\epsilon}}.$$

فعلاً، بهبودهای کارآمد تنها برای کران پایین لیوویل شناخته شده‌اند و بهترکردن آنها هم خودْچالش بزرگی است.

یک هدف دیگر می‌تواند بهسازی تخمین در قضیهٔ روث باشد: در کران پایین (۸.۲) مطلوب است که $q^{-۲-\epsilon}$ با مثلاً $q^{-۲}(\log q)^{-۱-\epsilon}$ جایگزین شود. انتظار می‌رود به‌ازای هر عدد حقیقی گنگ α از درجهٔ بزرگتر یا مساوی با ۳، در نابرابری (۸.۲) عبارت $q^{-۲-\epsilon}$ را نتوان با $q^{-۲}$ جایگزین کرد، اما مجموعهٔ αهایی که به‌ازای آنها جواب را می‌دانیم تهی است! اغلب این مسأله برای حالت خاص عدد $\sqrt[۳]{۲}$ مطرح می‌شود، اما مثالی دیگر (منسوب به اُلَم[1] ــ مثلاً [Guy 1994]، F۲۲ را ببینید) عدد جبری حقیقی ξ است که با

$$\xi = \frac{۱}{\xi+y}, \qquad y=\frac{۱}{۱+y}$$

تعریف می‌شود.

اساساً چیزی دربارهٔ بسط کسر مسلسل عددی جبری با درجهٔ بزرگتر یا مساوی با ۳ نمی‌دانیم؛ جواب هیچ‌یک از دو سؤال زیر معلوم نیست:

(۹.۲) آیا بسطی با خارج‌قسمتهای جزئی کراندار وجود دارد؟

(۱۰.۲) آیا بسطی با خارج‌قسمتهای جزئی بیکران وجود دارد؟

معمولاً انتظار می‌رود بسط کسر مسلسل یک عدد جبری حقیقی از درجهٔ حداقل ۳ همیشه خارج‌قسمتهای جزئی بیکران داشته باشد. به بیان دقیقتر انتظار می‌رود اعداد جبری حقیقی از درجهٔ بزرگتر یا مساوی با ۳ مانند «تقریباً همهٔ» اعداد حقیقی رفتار کنند.

فرض کنید $\psi(q)$ تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی مثبت باشد. همچنین فرض کنید تابع $q\psi(q)$ غیرصعودی باشد. نابرابری

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right| < \frac{\psi(q)}{q} \qquad (۱۱.۲)$$

را در نظر بگیرید:

حدس ۱۲.۲. فرض کنید θ یک عدد جبری حقیقی از درجهٔ حداقل ۳ باشد. آنگاه نابرابری (۱۱.۲) بینهایت جواب صحیح p و q با ضابطهٔ $q > ۰$ دارد اگر و تنها اگر انتگرال

$$\int_۱^{\infty} \psi(x)dx$$

واگرا باشد.

قضیهٔ زیرفضای اشمیت تعمیمی گسترده از قضیهٔ روث به تقریبهای همزمان است. دو حالت خاص عبارت‌اند از

- اگر اعداد جبری حقیقی $\alpha_۱$، ...، α_n طوری باشند که ۱، $\alpha_۱$، ...، α_n روی $\mathbb{Q}$ به‌طور خطی مستقل باشند، آنگاه به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ نابرابری

$$\max_{۱\le i\le n}\left|\alpha_i-\frac{p_i}{q}\right| < \frac{۱}{q^{۱+\frac{۱}{n}+\epsilon}}$$

تنها تعدادی متناهی جواب $(p_۱,\ldots,p_n,q)$ در $\mathbb{Z}^{n+۱}$ با $q>۰$ دارد.

1. L. V. Danilov 2. N. Elkies 3. Roth 4. W. M. Schmidt 5. E. Bombieri

1. Ulam

• اگر اعداد جبری حقیقی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ طوری باشند که $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ روی $\mathbb{Q}$ به‌طور خطی مستقل باشند، آنگاه به‌ازای هر $\epsilon > 0$ نابرابری

$$|q_1\alpha_1+\cdots+q_n\alpha_n-p| < \frac{1}{q^{n+\epsilon}}$$

تنها تعدادی متناهی جواب $(q_1,\dots,q_n,p)$ در $\mathbb{Z}^{n+1}$ با $0 < q = \max\{|q_1|,\dots,|q_n|\}$ دارد.

این دو نوع حکم دیوفانتی موازی با دو نوع از تقریبهای پاده[1] هستند. جالب خواهد بود مشابه قضیهٔ زیرفضای اشمیت در حالت تقریبهای پاده در نظر گرفته شود و همین‌طور تحقیق در مورد مشابه متناظر برای اصل انتقال خین‌چین[2] جالب است [Ca 1957].

یکی از مهمترین نتایج قضیهٔ زیرفضای اشمیت، متناهی‌بودن جوابهای ناتبهگون معادلهٔ

$$x_1+\cdots+x_n=1$$

است که در آن مجهولات عناصر صحیح (یا Sـصحیح) در یک میدان عددی هستند. در اینجا ناتبهگون به این معنی است که هیچ زیرمجموع سره صفر نمی‌شود. یک مسألهٔ حل‌نشدهٔ اصلی، اثبات یک صورت کارآمد این نتیجه است. قضیهٔ اشمیت، که تعمیمی از قضیهٔ روث است، کارآمد نیست. تنها به‌ازای $n=2$، کرانهایی برای جوابهای Sـیکهٔ معادلهٔ $x_1+x_2=1$، به یمن روش بیکر وجود دارد ([B 1975] فصل ۵؛ [La 1978b] فصل ۶؛ [ShT 1986] فصل ۱؛ [Se 1989] و [La 1991] را ببینید). مطلوب خواهد بود که روش بیکر (یا هر روش کارآمد دیگری) به حالت ابعاد بالاتر گسترش یابد.

تعمیمی از طیف مارکوف به تقریبهای همزمان هنوز در دسترس نیست: حتی اولین گام نیز ناشناخته است. اگر عدد صحیح مثبت n و اعداد حقیقی $\xi_1, \dots, \xi_n$ که لااقل یکی از آنها گنگ است داده شده باشند، $c_n = c_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ را اینفیمم همهٔ cهایی در دامنهٔ $0 < c \leq 1$ که به‌ازای آنها نابرابری

$$q|q\xi_i-p_i|^n < c$$

تعدادی نامتناهی جواب دارد تعریف می‌کنیم. سپس ثابت تقریب دیوفانتی همزمان nبعدی γ_n را سوپریمم c_nها روی nتایی‌های $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ مانند بالا تعریف می‌کنیم. به پیروی از [۱] در زیرخلاصه‌ای از آنچه در مورد اولین مقادیر ثابتهای تقریب شناخته شده است می‌آوریم:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472135955\ldots \quad \text{(Hurwitz)}$$

$$0.2857142857 = \frac{2}{7} \leq \gamma_2 \leq \frac{64}{169} = 0.3786982249\ldots \quad \text{(Cassels و Nowak)}$$

$$0.1206045378 = \frac{2}{5\sqrt{11}} \leq \gamma_3 \leq \frac{1}{2(\pi-2)} = 0.4379845985\ldots \quad \text{(Cusick و Spohn)}$$

حال با مطرح‌کردن مسألهٔ وارینگ اهمیت اثبات نابرابریهای روث‌ـگونهٔ کارآمد برای اعداد جبری گنگ را نشان می‌دهیم.

1. Padé 2. Khinchine transference principle

در سال ۱۷۷۰، چند ماهی قبل از آنکه لاگرانژ اثبات کند هر عدد صحیح مثبت، مجموع حداکثر چهار مربع‌کامل است، وارینگ ([Wa 1770] فصل ۵، قضیهٔ (۹)۴۷) نوشت:

«هر عدد صحیح، مکعب یا مجموع دو، سه، ... یا نُه مکعب است؛ هر عدد صحیح همچنین مربع یک مربع یا مجموع حداکثر نوزده مربع یک مربع است و غیره. قوانین مشابهی را می‌توان برای تعداد متناظراً تعریف‌شده‌ای از کمیتهای از توان مشابه تأیید کرد.»

همچنین یادداشت ۱۵ مترجم در [Wa 1770] را ببینید.

به‌ازای $k \geq 2$، $g(k)$ را کوچکترین عدد صحیح مثبتی تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که هر عدد صحیح مثبت، مجموع g عنصر به شکل x^k با $x \geq 0$ باشد. به عبارت دیگر به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، معادلهٔ

$$n = x_1^k+\cdots+x_m^k$$

در صورتی که $m = g(k)$ جواب داشته باشد، در حالی‌که nای موجود باشد که مجموع $g(k)-1$ توان kام نباشد. قضیهٔ لاگرانژ که یک حدس باشه و فرما را حل و فصل کرد آن است که $g(2)=4$. به پیروی از فصل ۴ در [N 1986]، در زیر مقادیر $g(k)$ را برای اولین kهای صحیح همراه با اسم کاشفان و تاریخ کشف می‌آوریم:

$k =$ 2	3	4	5	6	7
$g(k) =$ 4	9	19	37	73	143
J.L. Lagrange	A. Wieferich	R. Balasubramanian J-M. Deshouillers F. Dress	J. Chen	S.S. Pillai	L.E. Dickson
1770	1909	1986	1964	1940	1936

به‌ازای هر عدد صحیح $k \geq 2$، تعریف می‌کنیم

$$I(k) = 2^k + [(\tfrac{3}{2})^k] - 2.$$

به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که $g(k) \geq I(k)$: می‌نویسیم

$$3^k = 2^k q + r, \quad 0 < r < 2^k, \quad q = [(\tfrac{3}{2})^k]$$

و عدد صحیح

$$N = 2^k q - 1 = (q-1)2^k + (2^k-1)1^k$$

را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $N < 3^k$، در نوشتن N به شکل مجموع توانهای kام هیچ جملهٔ 3^k ظاهر نمی‌شود و از آنجا که $N < 2^k q$، حداکثر $(q-1)$ جملهٔ 2^k داریم و بقیهٔ جملات 1^k هستند؛ بنابراین حداقل $I(k) = (2^k-1)+(q-1)$ تا جمله لازم است.

به‌ازای $2 \leq k \leq 471600000$ تحقیق شده است که $g(k) = I(k)$، و مالر ثابت کرد که به‌ازای kهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ، $g(k) = I(k)$. مشکل آنجاست که اثبات مالر بر صورتی pـآدیک از قضیهٔ تو‌ـزیگل‌ـروث مبتنی است

و در نتیجه کارآمد نیست. بنابراین شکافی که حتی اندازه‌اش را نمی‌دانیم وجود دارد. حدس آن است که به‌ازای هر $k \geq ۲$، $g(k) = I(k)$. این حدس که پیشینه‌اش به ۱۸۵۳ برمی‌گردد از تخمین ([N 1986] صفحهٔ ۲۲۶ را ببینید):

$$\left\|\left(\frac{۳}{۲}\right)^k\right\| \geq ۲ \times \left(\frac{۳}{۴}\right)^k,$$

نتیجه می‌شود، که در آن $\|\cdot\|$ فاصله تا نزدیکترین عدد صحیح را نشان می‌دهد. همان‌طور که سینو دیوید[1] اشاره کرده است، چنین تخمینی (برای kهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ) از حدس abc نیز نتیجه می‌شود!

مالر در [M 1968]، Zـعدد را یک عدد حقیقی ناصفر α تعریف کرد به‌طوری که برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $۰ \leq r_n < \frac{۱}{۲}$ که در آن r_n جزء کسری $\alpha(\frac{۳}{۲})^n$ است. معلوم نیست که آیا Zـعددی وجود دارد یا نه ([FlLP 1995] را ببینید). نکتهٔ دیگری را لیتلوود ([Guy 1994] E۱۸) در ارتباط با این موضوع مطرح کرده است و آن اینکه ما هنوز نمی‌توانیم ثابت کنیم که وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند، جزء کسری e^n به سمت ۰ میل نمی‌کند.

بنا به حدس مشهوری از لیتلوود ([B 1975] فصل ۱۰، بخش ۱ و [PoV 2000])، به‌ازای هر زوج (x,y) از اعداد حقیقی و هر $\epsilon > ۰$، عدد صحیح مثبت q وجود دارد به‌طوری که

$$q\|qx\| \cdot \|qy\| < \epsilon.$$

بنابر قول مارگولیس[2] (نقل از لاشو[3])، اثباتهای موجود در مقاله‌ای به سال ۱۹۸۸ از اسکوبنکو[4] (M. R. 94d:11047 را ببینید)، درست نیستند و قابل اصلاح نمی‌باشند.

چندین مسألهٔ حل‌نشده مشهور به «مسألهٔ سدّ دید» وجود دارد. یکی از آنها بدین قرار است: اگر $k_1, \ldots, k_n$، n عدد صحیح مثبت باشند، عدد حقیقی x وجود دارد به‌طوری که

$$\|k_i x\| \geq \frac{۱}{n+۱} \qquad (۱ \leq i \leq n).$$

معلوم شده است که به‌جای $\frac{۱}{n+۱}$ نمی‌توان عدد بزرگتری قرار داد [CuP 1984].

مراجع

[B 1975] Baker, A. – *Transcendental number theory.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press. Cambridge, 1975, Second edition, 1990.

[B 1998] Baker, A. – Logarithmic forms and the *abc*-conjecture. Györy, Kalman (ed.) et al., *Number theory. Diophantine, computational and algebraic aspects.* Proceedings of the international conference, Eger. Hungary, July 29-August 2, 1996 Berlin: de Gruyter (1998), 37-44.

1. Sinnou David 2. G. Margulis 3. G. Lachud
4. B. F. Skubenko

[BaLSW 1996] Balasubramanian, R.; Langevin, M.; Shorey, T. N.; Waldschmidt, M. – On the maximal length of two sequences of integers in arithmetic progressions with the same prime divisors. Monatsh. Math. **121** N° (1996), 295-307.

[Br 1999] Browkin, J. – The *abc*-conjecture. *Number theory,* R.P. Bambah, V.C. Dumir and R.J. Hans Gill (éds), Hindustan Book Agency, New-Delhi, Indian National Science Academy and Birkhäuser-Verlag, (1999), 75-105.

[BuM 1999] Bugeaud, Y.; Mignotte, M. – Sur l'quation diophantienne $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$. II. C. R. Acad. Sci., Paris, Sr. I, Math. **328**, N° 9 (1999), 741-744.

[BuSh 2001] Bugeaud, Y.; Shorey, T. N. – On the number of solutions of the generalized Ramanujan-Nagell equation. J. Reine Angew. Math. **539** (2001), 55-74.

[Ca 1957] Cassels, J. W. S. – *An introduction to Diophantine approximation.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, N° **45**. Cambridge University Press, New York, 1957.

[Cat 1844] Catalan, E. – Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur. J. reine Angew. Math., **27** (1844), 192.

[Coh 1993] Cohn, H. – Markoff geodesics in matrix theory. *Number theory with an emphasis on the Markoff spectrum (Provo, UT, 1991),* Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **147**, Dekker, New York, (1993) 69-82.

[CuFl 1989] Cusick, T.W.; Flahive, M.E. – *The Markoff and Lagrange Spectra.* Mathematical Surveys and Monographs N° **30** American Mathematical Society, Providence, RI. 1989.

[CuP 1984] Cusick. T.W.; Pomerance. C. – View-obstruction problems. III. J. Number Theory **19** N° 2 (1984), 131-139.

[DaMR 1976] Davis, M.; Matiyasevich, Y.; Robinson, J. – Diophantine equations: a positive aspect of a negative solution. *Mathematical developments arising from Hilbert problems.* (Proc. Sympos. Pure Math., **28**, Part 2, Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974). Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1979), 323-378.

[Du 2001] Dujella, A. – There are only finitely many Diophantine quintuples. J. Reine Angew. Math., to appear. (28pp).

[E 1980] Erdös, P. – How many pairs of products of consecutive integers have the same prime factors? Amer. Math. Monthly **87** (1980), 391-392.

[FlLP 1995] Flatto. L.; Lagarias, J. C.; Pollington, A. D. – On the range of fractional parts $\{\xi(p/q)^n\}$. Acta Arith., **70** N° 2 (1995), 125-147.

[Gu 2000] Guiness, I. G. – A sideways look at Hilbert's twenty-three problems. Notices Amer. Math. Soc. **47** N° 7 (2000), 752-757.

[Ma 1990] Masser, D. W. – Note on a conjecture of Szpiro. *Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques ("à la recherche de Mordell effectif.")*; Paris, 1988. Soc. Math. France, Astérisque, **183** (1990), 19-23.

[Mat 1999] Matiyasevich, Yu. – Le dixième problème de Hilbert: que peut-on faire avec les équations diophantiennes? *La Recherche de la Vérité*, coll. L'écriture des Mathématiques. ACL-Les Éditions du Kangourou (1999), 281-305.

`http://logic.pdml.ras.ru/Hilbert10`

[Mau 1997] Mauldin, R.D. – Ageneralization of Fermat's last theorem: the Beal conjecture and prize problem. Notices Amer, Math. Soc. **44** N° 11(1997). 1436-1437.

[Maz 1992] Mazur, B. – The topology of rational points. Experiment. Math. **1** N° 1 (1992), 35-45.

[Maz 2000] Mazur, B. – Questions about powers of numbers. Notices Amer. Math. Soc. **47** N° 2 (2000), 195-202.

[N 1986] Narkiewicz, W. – *Classical problems in number theory.* Polish Scientific Publ. **62** (1986).

[Œ1988] Œsterlé, J. – Nouvelles approches du "théorème" de Fermat. *Sém. Bourbki*, 1987/88, N° 694; Soc. Math. France, Astérisque, **161-162** (1988), 165-186.

[P 1999a] Philippon, P. – Quelques remarques sur des questions d'approximation diophantienne. Bull. Austral. Math. Soc., **59** (1999), 323-334. Addendum, Ibid., **61** (2000), 167-169.

[Pi 1945] Pillai, S. S. – On the equation $2^x - 3^y = 2^X + 3^Y$. Bull Calcutta Math. Soc. **37** (1945), 15-20.

[PoV 2000] Pollington, A. D.; Velani, S. L. – On a problem in simultaneous Diophantine approximation: Littlewood's conjecture. Acta Math. **185** N° 2 (2000), 287-306.

[Re 2000] Rémond, G. – Inégalité de Vojta en dimension supérieure. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI. Sci. (4) **29** (2000), 101-151.

[Ri 1994] Ribenboim, P. – *Catalan's conjecture. Are* 8 *and* 9 *the only consecutive powers?* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[Ri 2000] Ribenbiom, P. – *My numbers, my friends.* Popular Lectures on Number Theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

[Se 1989] Serre, J-P. – *Lectures on the Mordell-Weil theorem.* Aspects of Mathematics, **E15**. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[Sh 1999] Shorey, T. N. – Exponential Diophantine equations involving products of consecutive integers. *Number Theory*, R.P. Bambah. V.C. Dumir and R.J. Hans Gill (éds), Hindustan Book

[Guy 1994] Guy, R. – *Unsolved problems in number theory.* Springer 1981. Second edition. Problem Books in Mathematics. Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, **1**. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Gy 2001] Gyarmati, K. – On a problem of Diophantus. Acta Arith., **97** N° 1 (2001), 53-65.

[H 1971] Hall, M. Jr. – The Diophantine equation $x^3 - y^2 = k$. *Computers in number theroy*, Proc. Sci. Res. Council Atlas Sympos. N° 2, Oxford, 1969. Academic Press, London, (1971), 173-198.

[Hi 1900] Hilbert, D. – Mathematical Promblems. Bull. Amer. Math. Soc. **37** N° 4 (2000), 407-436. Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1902), 437-479.

[J 2000] Jackson, A. – Million-dollar Mathematics Prizes Announced. Notices Amer. Math. Soc. **47** N° 8 (2000), 877-879.

`http://www.claymath.org/`

[Kr 1999] Kraus, A. – On the equation $x^p + y^q = z^r$. The Ramanujan Journal, **3** *N*° 3 (1999), 315-333.

[La 1974] Lang, S. – Higher dimensional Diophantine problems. Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 779-787. Collected Papers, vol. II, Springer (2000), 102-110.

[La 1978b] Lang, S. – *Elliptic curves: Diophantine analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **231**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[La 1990] Lang, S. – Old and new conjectured Diophantine inequalities. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **23** (1990), N° 1, 37-75. Collected Papers, vol. III, Springer (2000), 355-393

[La 1991] Lang, S. – *Number theory. III. Diophantine geometry.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 60. Springer-Verlag. Berlin, 1991. Corrected second printing: *Survey of Diophantine geometry*: 1997.

[La 1993] Lang, S. – *Algebra.* Third edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1993.

[La 1996] Lang, S. – La Conjecture de Bateman-Horn. Gazette des Mathématiciens. **67** (1996), 214-216. Collected Papers, vol. IV, Springer (2000), 213-216.

[Lan 1992] Langevin, M. – Partie sans facteur carré d'un produit d'entiers voisins. *Approximations diophantiennes et nombres transcendants* (Luminy, 1990), de Gruyter. Berlin (1992), 203-214.

[Lan 2001] Langevin, M. – Équations diophantiennes polynomiales à hautes multiplicités. J. Thor. Nombres Bordeaux **13** (2001). N° 1, 211-226.

[M 1968] Mahler, K. – An unsolved problem on the powers of 3/2. J. Austral. Math. Soc. **8** (1968), 313-321.

Agency, New-Delhi and Indian National Science Academy (1999), 463-495.

[Sh 2000] Shorey, T. N. – Some conjectures in the theory of exponential Diophantine equations. Publ. Math. Debrecen **56** (2000), N° 3-4, 631-641.

[ShT 1986] Shorey, T. N.; Tijdeman, R. – *Exponential Diophantine equations.* Cambridge Tracts in Mathematics, **87**. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1986.

[Si 1929] Siegel, C. L. – Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math., **1** (1929), 1-70. *Gesammelte Abhandlungen.* Springer-Verlag, Berlin-New York 1966 Band **I**, 209-266.

[Sie 1964] Sierpiński, W. – *A selection of problems in the theory of numbers.* Translated from the Polish by A. Sharma. Popular lectures in mathematics. **11**. A Pergamon Press Book The Macmillan Co., New York 1964.

[Sie 1970] Sierpiński, W. – *250 problems in elementary number theory.* Elsevier, 1970. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, N° **26** American Elsevier Publishing Co., Inc., New York; PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw 1970. *250 problémes de théorie élémentaire des nombres.* Translated from the English. Reprint of the 1972 French translation. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992.

[So 2002] Sondow, J. – Criteria for Irrationality of Euler's Constant. Submitted

`http://arXiv.org/abs/math/0008051`

[StY 1991] Stewart, C. L.; Yu, Kun Rui – On the *abc* conjecture. Math. Ann. **291** N° 2 (1991), 225-230. II, Duke Math. J., **108** (2001), 169-181.

[Ti 1976b] Tijdeman, R. – On the equation of Catalan. Acta Arith. **29** N° 2 (1976), 197-209.

[Ti 1998] Tijdeman, R. – Exponential Diophantine equations 1986-1996. *Number theory,* Eger, 1996, de Gruyter, Berlin, (1998), 523-539.

[V 2000] Vojta, P. – On the *ABC* conjecture and Diophantine approximation by rational points. Amer. J. Math. **122** N° 4 (2000), 843-872.

[W 2000b] Waldschmidt, M. – *Diophantine Approximation on linear algebraic groups. Transcendence Properties of the Exponential Function in Several Variables.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **326**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

[Wa 1770] Waring, E. – *Meditationes algebraicæ.* Cambridge, 1770. English Translation, Amer. Math. Soc. 1991.

[Wo 1981] Woods. A. – *Some problems in logic and number theory. Thesis,* Manchester, 1981.

مراجعی دیگر در اینترنت

[1] `http://pauillac.inria.fr/algo/bsolve/constant/dioph/dioph.html`

[2] `http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/bac.html`

صورت مشروح این مقاله در وب‌گاه مؤلف موجود است:

`http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/ps/odp.ps`

* * * * * *

• این مقاله را نویسنده برای چاپ در نشر ریاضی نوشته است.

* میشل والدشمیت، دانشگاه پاریس ۶، فرانسه

miw@math.Jussieu.fr

ممکن است معماگونه به نظر برسد که ایدهٔ تقریب بر همهٔ علوم دقیق غالب است.

برتراند راسل

او بسیار هوشمند است ولی از ریاضیات بهره‌ای ندارد. همان‌طور که می‌دانید، این نقص بزرگی است.

از نامهٔ پاسکال به فرما