Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1971-1972 - exposé n° 4

16 novembre 1971

FONCTIONS ELLIPTIQUES ET NOMBRES TRANSCENDANTS

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

Après avoir défini les fonctions elliptiques et indiqué succinctement leurs propriétés essentielles, nous exposerons les principaux résultats de transcendance les concernant, depuis les travaux de Siegel et de Schneider jusqu'au théorème de Ramachandra sur les fonctions algébriquement additives. Nous énoncerons ensuite un théorème général dont nous étudierons les conséquences, retrouvant en particulier tous les résultats précédents. Nous terminerons par un aperçu sur les travaux récents, de Baker et Coates, sur les formes linéaires de périodes de fonctions exponentielles et elliptiques.

Notations - On désignera par $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques (clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$).

On utilise d'autre part la notation suivante, inspirée par [12] : soient $f_1, \ldots, f_d$ des fonctions méromorphes, et Δ un entier rationnel positif ou nul. On notera

$$\delta(f_1, \ldots, f_d) \leq \Delta$$

si les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, et si la condition

$x_1, \ldots, x_{\Delta+1}$ sont des nombres complexes, distincts des pôles des f_i, tels que $f_i(x_j) \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq \Delta+1$

entraîne

$x_1, \ldots, x_{\Delta+1}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants.

Résumé des principaux résultats

On note α , β des nombres algébriques, b un nombre complexe non nul, $\wp$, $\wp^*$ des fonctions elliptiques de Weierstrass dont les invariants g_2, g_3 et g_2^* , g_3^* sont algébriques, ω et ω^* une période non nulle de $\wp$ et $\wp^*$, ζ la fonction zêta associée à $\wp$; si ω_1, ω_2 est un couple de périodes fondamentales de $\wp$, et si $\omega = a\omega_1 + b\omega_2$, $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on note

$$\eta = 2a\,\zeta(\frac{\omega_1}{2}) + 2b\,\zeta(\frac{\omega_2}{2}) .$$

On a les résultats suivants :

Hermite-Lindemann	:	$\delta(z, e^z) = 0$
Gel'fond	:	$\delta(e^z, e^{\beta z}) = 0$
Schneider	:	$\delta(z, e^{bz}) \leq 1$
		$\delta(e^{\beta z}, \wp(z)) = 0$
		$\delta(\wp(z), \alpha z + \beta\zeta(z)) = 0$
		$\delta(\wp(z), \wp^*(\beta z)) = 0$
Schneider, Siegel, Lang et Ramachandra	:	$\delta(e^z, e^{bz}) \leq 2$
Ramachandra	:	$\delta(z, \wp(bz)) \leq 2$
		$\delta(e^z, \wp(bz)) \leq 3$
		$\delta(\wp(z), \wp^*(bz)) \leq 4$.

Nous aurons de plus la majoration suivante :

$$\delta(\wp(z), bz + \zeta(z)) \leq 4 .$$

§. 1. - DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Les fonctions elliptiques, dont nous allons donner la définition, jouissent de propriétés analogues à celles de la fonction exponentielle : elles sont périodiques, possèdent un théorème d'addition algébrique et vérifient une équation différentielle à coefficients algébriques. Toutes les propriétés que nous allons énoncer se trouvent dans [24] ou [25].

DEFINITION. - Une fonction elliptique est une fonction méromorphe possédant deux périodes linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

L'ensemble Λ des périodes d'une fonction elliptique non constante forme un sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{C}$ qui admet un système générateur $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ (certains auteurs notent $(2\omega_1, 2\omega_2)$ un tel système générateur) ; on dira que (ω_1, ω_2) est un couple de périodes fondamentales, et on appelle parallélogramme des périodes (associé à un tel couple) le parallélogramme P de sommets $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$, fermé sur les côtés $[0, \omega_1[$ et $[0, \omega_2[$ (ainsi $P \cap \Lambda = \{0\}$). La fonction elliptique considérée est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend dans P .

Enfin on dit que deux points z et z' de $\mathbb{C}$ sont congrus modulo Λ si $z - z' \in \Lambda$.

On peut montrer que deux fonctions elliptiques ayant les mêmes périodes sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}$. Nous n'étudierons donc, pour chaque $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, qu'un seul exemple de fonction elliptique de périodes fondamentales (ω_1, ω_2) ; nous choisissons lesfonctions $\wp$ de Weierstrass, caractérisées par la propriété de n'avoir qu'un seul pôle (double) dans le parallélogramme des périodes. Nous aurions pu également choisir les fonctions elliptiques s_n, c_n, d_n de Jacobi, qui ont deux pôles simples dans P (d'après Liouville, il n'y a pas de fonction elliptique entière non constante). C'est un exercice très simple de traduire les résultats suivants, qui concernent les fonctions de Weierstrass, pour obtenir des propriétés des fonctions de Jacobi.

Soit $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, avec $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$. On définit la fonction zêta de Weierstrass (associée à (ω_1, ω_2)) par

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \Sigma' \left(\frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2}\right) ,$$

où Σ' est la somme étendue à l'ensemble

$$\{\Omega = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 \mid (m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}\} .$$

On démontre que l'on définit ainsi une fonction méromorphe, de pôles $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. La fonction ζ est quasi-périodique :

$$\zeta(z+\omega_i) = \zeta(z) + \eta_i \quad , \quad i = 1 \text{ ou } 2 \text{ , } \quad \text{où } \eta_i = 2\zeta(\omega_i/2)$$

Les quatre nombres $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ sont liés par la relation de Legendre :

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = 2i\pi .$$

On définit la fonction $\wp$ (associée à (ω_1, ω_2)) par

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \Sigma' \left(\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right) .$$

on obtient ainsi une fonction elliptique, un couple de périodes fondamentales étant (ω_1, ω_2).

Les propriétés de la fonction $\wp$ sont, nous l'avons dit, analogues à celles de la fonction exponentielle. En effet, elle vérifie une équation différentielle

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

dont on déduit

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{g_2}{2} ,$$

où g_2 et g_3, appelés invariants de la fonction $\wp$, sont déterminés (en fonction de (ω_1, ω_2)) par

$$g_2 = 60\, \Sigma' \frac{1}{\Omega^4} \quad ; \quad g_3 = 140\, \Sigma' \frac{1}{\Omega^6} .$$

Ces deux nombres vérifient $g_2^3 \neq 27 g_3^2$; en effet, les trois racines complexes e_1, e_2, e_3 du polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$, qui sont les valeurs de la fonction $\wp$ aux points $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, sont distinctes.

Réciproquement, étant donnés deux nombres complexes g_2, g_3 vérifiant $g_2^3 \neq 27 g_3^2$, il existe une fonction elliptique $\wp$ vérifiant

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 .$$

Etudions maintenant les formules d'addition vérifiées par les fonctions ζ et $\wp$. La fonction zêta vérifie :

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \quad \text{pour } u \neq v \text{ ;}$$

on en déduit le <u>théorème d'addition algébrique</u> de la fonction $\wp$:

$$\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2 \quad \text{pour } u \neq v \text{ ,}$$

ainsi que les <u>formules de duplication</u>

$$\zeta(2u) = 2\zeta(u) + \frac{1}{2} \frac{\wp''(u)}{\wp'(u)} ,$$

et $$\wp(2u) = -2\wp(u) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\right)^2 .$$

D'après un théorème de Weierstrass, les seules fonctions possédant un théorème d'addition algébrique sont les fonctions rationnelles de z , de $\exp z$, ou encore de $(\wp(z), \wp'(z))$. Si on se restreint aux formules d'addition algébrique à coefficients algébriques (sur $\mathbb{Q}$), on a le résultat suivant (cité par Ramachandra [12]). Pour une fonction complexe méromorphe f , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un polynôme non nul $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y, Z]$ tel que

$$P(f(z_1+z_2), f(z_1), f(z_2)) = 0$$

pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ tels que z_1, z_2 et z_1+z_2 ne soient pas pôles de f .

(ii) Il existe $R \in \overline{\mathbb{Q}}(X,Y)$ et $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, tels que

$$f(bz) = R(\psi(z), \psi'(z)) ,$$

où $\psi(z)$ est égale à z , à $\exp z$, ou à $\wp(z)$, la fonction $\wp$ ayant ses invariants g_2 et g_3 algébriques. On dit alors que f est <u>algébriquement additive.</u>

Il nous reste à introduire la fonction modulaire $\mathfrak{J}$: à tout couple $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vérifiant $\mathfrak{Im}(\frac{\omega_2}{\omega_1}) > 0$, nous avons associé deux nombres g_2 et g_3 , vérifiant $g_2^3 \neq 27\, g_3^2$. On remarque alors que le nombre

$$\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}$$

ne dépend que du rapport $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. On définit l'invariant modulaire $\mathfrak{J}(\tau)$ par

$$\mathfrak{J}(\tau) = \frac{1728\, g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2} .$$

Si τ est imaginaire quadratique, la fonction $\wp$ possède une multiplication complexe, et $\mathfrak{J}(\tau)$ est algébrique. Mais nous verrons que, pour τ algébrique de degré supérieur à 2 , $\mathfrak{J}(\tau)$ est transcendant. La démonstration de ce résultat, due à Schneider, utilise les propriétés d'une fonction $\wp$ associée à $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Or on peut introduire la fonction modulaire de la manière équivalente suivante :

1. - $\mathfrak{J}$ est définie pour $\mathfrak{Im}\, \tau > 0$;

2. - Cette fonction satisfait la relation

$$\mathfrak{J}\left(\frac{\alpha \tau + \beta}{\gamma \tau + \delta}\right) = \mathfrak{J}(\tau) \qquad \text{pour } \mathfrak{Im}\, \tau > 0 \text{ , } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^4 \text{ ,} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 .$$

3. - Elle possède le développement de Fourier

$$\mathfrak{J}(\tau) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k\, q^k \ , \qquad q = e^{2i\pi\tau} \ , \quad a_k \in \mathbb{Z} .$$

(Il faut ajouter la condition $a_{-1} = 1$ si on veut retrouver exactement le coefficient 1728).

Aussi Schneider ([5] problème 2) a-t-il posé le problème suivant :

Démontrer le théorème sur la transcendance des valeurs de la fonction modulaire $\mathfrak{J}(\tau)$ par une étude directe de cette fonction, et non par l'étude des $\wp$ -fonctions.

Ce problème est toujours ouvert.

§. 2. - <u>TRANSCENDANCE DES VALEURS DE FONCTIONS ELLIPTIQUES : TRAVAUX DE SIEGEL ET SCHNEIDER</u>

Le premier énoncé de transcendance concernant les fonctions elliptiques est dû à Siegel [8] qui a montré, en 1931, que si $\wp$ est une fonction elliptique de Weierstrass, dont les invariants sont g_2 et g_3 et les périodes ω_1, ω_2, l'un des quatre nombres

$$g_2\,,\ g_3\,,\ \omega_1\,,\ \omega_2$$

est transcendant. En particulier, si g_2 et g_3 sont algébriques et si $\wp$ admet une multiplication complexe, alors ω_1 et ω_2 sont transcendants.

Trois ans plus tard, Schneider [9] démontrait la transcendance de l'un des quatres nombres

$$g_2\,,\ g_3\,,\ \omega_1\,,\ \eta_1\ ;$$

plus généralement, si $\beta \in \mathbb{C}$ et $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, l'un des cinq nombres

$$g_2\,,\ g_3\,,\ \tau\,,\ \beta,\ \wp(\omega_1\beta)$$

est transcendant. Notons que Schneider annonçait déjà un théorème sur les fonctions entières à valeurs entières, qu'il ne devait publier qu'une 1949 [11].

Après quelques travaux de Polya, puis de Popken et Mahler, en 1935 (suivant lesquels l'un des nombres

$$\frac{\omega_1\eta_1}{\pi^2}\,,\ \frac{\omega_1^4 g_2}{\pi^4}\,,\ \frac{\omega_1^6 g_3}{\pi^6}$$

est transcendant), est paru le travail le plus important sur ce sujet ; les nombreux résultats que Schneider y démontre sont depuis devenus classiques ; ce sont les propositions 1, 2 et 3 suivantes.

PROPOSITION 1. [10] - <u>Soit</u> $\wp$ <u>une fonction elliptique de Weierstrass, et</u> ζ <u>la fonction zêta associée</u> ; <u>si</u> a, b, t <u>sont des nombres complexes, avec</u> $(a,b) \neq (0,0)$ <u>et</u> t <u>non pôle de</u> $\wp$, <u>alors un au moins des six nombres</u>

$$a\,,\ b\,,\ g_2\,,\ g_3\,,\ \wp(t)\,,\ at + b\,\zeta(t)$$

<u>est transcendant.</u>

En particulier, pour toute période $\omega \neq 0$ d'une fonction $\wp$ ayant des invariants g_2 et g_3 algébriques, si $\frac{\omega}{2}$ n'est pas période de $\wp$, les trois nombres

$$\omega , \ \eta = 2\zeta(\tfrac{\omega}{2}) , \ 1$$

sont linéairement indépendants sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques ; donc ω et η sont transcendants, ainsi que $\frac{\eta}{\omega}$.

Le théorème de Lindemann sur la transcendance de π, c'est-à-dire la transcendance du périmètre d'un cercle dont le rayon est algébrique, se généralise de la manière suivante [3] :

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points réels distincts de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \qquad (0 < b < a) .$$

Si a, b, x_1, x_2 sont algébriques, la longueur de l'arc de l'ellipse

$$s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx \ , \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

est un nombre transcendant. En particulier, le périmètre d'une ellipse ayant des axes de longueur algébrique est un nombre transcendant. Ceci se généralise aux intégrales elliptiques de première ou deuxième espèce, alors qu'on connaît très peu de résultats sur les intégrales elliptiques de troisième espèce (problème 3 de Schneider [5]) ; la raison en est que les démonstrations utilisent des propriétés de fonctions méromorphes. Cependant on peut déduire du théorème de Baker sur l'indépendance linéaire de logarithmes (nous en reparlerons au §. 5.) la transcendance du nombre (voir [3] p. 97) :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \left(\mathrm{Log}\, 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) .$$

Citons enfin à ce sujet le quatrième problème de Schneider [5] :

Généraliser sous la forme la plus large possible les théorèmes de transcendance sur les intégrales elliptiques de première et deuxième espèces, pour obtenir des résultats analogues sur les intégrales abéliennes.

Le résultat annoncé au §. 1. concernant la fonction modulaire $\mathfrak{J}$ (précisément la transcendance de $\mathfrak{J}(\tau)$ quand τ est algébrique de degré supérieur à 2) se déduit de la

PROPOSITION 2. [10] - Soient $\wp$ et $\wp^*$ deux fonctions elliptiques de Weierstrass, d'invariants g_2, g_3 et g_2^*, g_3^* respectivement. Soit $\beta \neq 0$ un nombre complexe tel que les fonctions $\wp(z)$ et $\wp^*(\beta z)$ soient algébriquement indépendantes (sur $\mathbb{C}$). Alors les sept nombres

$$g_2 \, , \; g_3 \, , \; g_2^* \, , \; g_3^* \, , \; \beta \, , \; \wp(t) \, , \; \wp^*(\beta t)$$

ne sont pas tous algébriques.

Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux fonctions $\wp(z)$ et $\wp^*(\beta z)$ soient algébriquement indépendantes est qu'il existe quatre rationnels $r_{i,j}$ $(i = 1, 2 \; ; \; j = 1, 2)$ tels que

$$\omega_1^* = (r_{1,1}\omega_1 + r_{1,2}\omega_2)\beta$$
$$\omega_2^* = (r_{2,1}\omega_1 + r_{2,2}\omega_2)\beta \, ,$$

où (ω_1, ω_2) (resp. (ω_1^*, ω_2^*)) est un couple de périodes fondamentales de $\wp(z)$ (resp. $\wp^*(z)$).

Dans le cas $\wp = \wp^*$, pour que $\wp(z)$ et $\wp(\beta z)$ soient algébriquement indépendantes, il suffit que β soit irrationnel, et que ω_2/ω_1 ne soit pas imaginaire quadratique. L'analogue pour la fonction $\wp$ du théorème de Gel'fond-Schneider sur la transcendance de a^b est alors le suivant :

soient β un nombre algébrique irrationnel, et $\wp$ une fonction elliptique dont les invariants g_2 et g_3 sont algébriques, n'admettant pas de multiplication complexe. Pour $t \in \mathbb{C}$, l'un des deux nombres

$$\wp(t) \, , \quad \wp(\beta t)$$

est transcendant. (Si l'un d'eux est infini, l'autre est transcendant).

Enfin la proposition suivante contient la transcendance de π/ω pour g_2 et g_3 algébriques.

PROPOSITION 3. [10] - Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, d'invariants g_2 et g_3 ; soient β et t deux nombres complexes, $\beta \neq 0$. Les cinq nombres

$$g_2 \, , \; g_3 \, , \; \beta \, , \; \wp(t) \, , \; e^{\beta t}$$

ne sont pas tous algébriques.

Les propositions 1, 2, 3 admettent de nombreuses autres conséquences qui sont exposées dans [1, 3, 4, 6, 7, 10, 11], et surtout dans [5].

Une généralisation aux variétés de groupes a été commencée par Lang dans [7, 2]. Plusieurs variantes des résultats de Lang ont été établies dans [17], mais les énoncés ainsi obtenus ne sont pas encore entièrement satisfaisants.

Les propositions précédentes nécessitaient, initialement, chacune une démonstration propre. Mais en 1949, Schneider [11] a obtenu un théorème très général sur les valeurs algébriques de fonctions méromorphes, qui contient tous les résultats précédents comme corollaires. Cet énoncé a été notablement simplifié depuis (cf. [2, 5, 6, 7] et l'appendice du livre de Lang : Algebra). La formulation que nous allons donner n'est pas la plus fine, mais est suffisante pour les corollaires que nous désirons. Notons d'ailleurs que les simplifications que nous venons de mentionner ont beaucoup affaibli le théorème initial de Schneider [11].

Nous dirons qu'une fonction entière est d'ordre inférieur ou égal à ρ s'il existe deux constantes positives c et R_o telles que

$$\operatorname{Log} \sup_{|z|=R} |F(z)| \leq c \, . \, R^{\rho} \quad \text{pour } R \geq R_o \, ,$$

ce que nous noterons ([2]; notations de Vinogradov) :

$$\operatorname{Log} |F|_R \ll R^{\rho} \quad \text{pour } R \to \infty \, .$$

Une fonction méromorphe est d'ordre inférieur ou égal à ρ si elle est quotient de deux fonctions entières d'ordre inférieur ou étal à ρ. On dira qu'une fonction rationnelle est d'ordre 0.

THEOREME 1. [2, 5, 6, 7] - Soient K un corps de nombres, $f_1, \dots, f_d$ des fonctions méromorphes d'ordre inférieur ou égal à ρ. On suppose que deux des fonctions $f_1, \dots, f_d$ sont algébriquement indépendantes sur K, et que la dérivation opère sur le corps $K(f_1, \dots, f_d)$.

L'ensemble des nombres $\omega \in \mathbb{C}$, non pôles des f_i, tels que

$$f_i(\omega_\nu) \in \mathbb{C} \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, d \quad \text{et} \quad \nu = 1, \dots, m$$

est fini.

On peut donner une majoration explicite du nombre de ω ([2] par exemple $2.\rho.[K:\mathbb{Q}]+2$) , mais cela n'a pas de conséquences ici.

Le théorème 1 contient le théorème de Hermite Lindemann sur la transcendance de e^{α} ($\alpha \neq 0$ algébrique), le théorème de Gel'fond Schneider sur la transcendance de a^{b} ($a \neq 0, 1$ algébrique et b algébrique irrationnel), ainsi que les propositions 1, 2 et 3 précédentes de Schneider.

Par exemple la proposition 1 se déduit du théorème 1 quand on choisit

$$f_1(z) = az + b\,\zeta(z) \;;\; f_2(z) = \wp(z) \;;\; f_3(z) = \wp'(z) \;;$$

$\{\omega\} = \{$multiples entiers de t non pôles de $\wp\}$, grâce au

LEMME 1. [5] - <u>Soit</u> $(a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $(a,b) \neq (0,0)$. <u>Les deux fonctions</u>

$$f_1(z) = az + b\,\zeta(z) \quad \underline{\text{et}} \quad f_2(z) = \wp(z)$$

<u>sont algébriquement indépendantes.</u>

En effet, si $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ est un polynôme non nul tel que

$$P(f_1(z), f_2(z)) = 0 \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} ,$$

alors

$$P(f_1(z+k\omega_i), \wp(z)) = 0 \quad \text{pour tout } (z,k) \in \mathbb{C}\times\mathbb{Z} ,$$

d'où

$$a\omega_i + b\,\zeta(\omega_i) = 0 \ , \quad i = 1 \text{ ou } 2 .$$

La relation de Legendre

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2i\pi$$

montre que le système

$$\begin{cases} a\,\omega_1 + b\,\eta_1 = 0 \\ a\,\omega_2 + b\,\eta_2 = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution triviale $(a,b) = (0,0)$.

§. 3. - TRANSCENDANCE DES VALEURS DE FONCTIONS ELLIPTIQUES : LE THEOREME DE RAMACHANDRA

Dans l'énoncé du théorème 1 (et par conséquent des propositions 1, 2 et 3), l'existence d'une équation différentielle à coefficients algébriques est indispensable pour obtenir la conclusion Par exemple les deux fonctions z et $a^z = \exp(z \operatorname{Log} a)$, où $a \neq 0, 1$ est algébrique, prennent des valeurs algébriques pour tout $z \in \mathbb{Q}$; cependant, le théorème de Gel'fond Schneider nous dit qu'elles ne prennent pas toutes deux de valeurs algébriques pour z irrationnel, et ce sont précisément ces deux fonctions que Schneider utilisait pour démontrer la transcendance de a^b (tandis que Gel'fond utilisait les deux fonctions e^z et e^{bz}, qui vérifient une équation différentielle à coefficients algébriques si $b \in \overline{\mathbb{Q}}$). Aussi Ramachandra, généralisant cette démonstration de Schneider, a étudié la répartition des points où plusieurs fonctions méromorphes algébriquement indépendantes prennent simultanément des valeurs algébriques. Ceci lui permet d'étudier des majorations du nombre maximum (noté $\delta(f_1, f_2)$) de nombres complexes, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, où deux fonctions f_1, f_2 algébriquement indépendantes prennent toutes deux des valeurs algébriques.

Avec cette notation, le théorème 1 admet comme corollaires :

- le théorème de Hermite Lindemann : $\delta(z, e^z) = 0$;
- le théorème de Gel'fond Schneider : $\delta(e^z, e^{bz}) = 0$ si b est algébrique irrationnel ;
- la proposition 1 : $\delta(az + b\,\zeta(z), \wp(z)) = 0$ si a, b, g_2, g_3 sont algébriques, $(a, b) \neq (0, 0)$;
- la proposition 2 : $\delta(\wp(z), \wp^*(\beta z)) = 0$ si $g_2, g_3, g_2^*, g_3^*, \beta$ sont algébriques (la notation $\delta(f_1, f_2)$ suppose que f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes) ;
- la proposition 3 : $\delta(\wp(z), e^{\beta z}) = 0$, si g_2, g_3, β sont algébriques.

La méthode de Ramachandra va permettre d'étudier

$$\delta(z, \wp(tz)) \ , \ \delta(e^z, \wp(tz)) \ , \ \delta(\wp(z), \wp^*(tz)) \ ,$$

quand g_2, g_3, g_2^*, g_3^* sont algébriques, mais le nombre complexe t est <u>transcendant</u>.

Ramachandra s'est limité aux fonctions algébriquement additives (nous étendrons plus tard, §. 4., sa méthode à l'étude de $\delta(a z+b\,\zeta(tz), \wp(tz))$, où a, b, g_2, g_3 sont algébriques et t transcendant). Il est alors utile d'introduire la

DEFINITION [12]. - Soit f une fonction méromorphe. Un point $z \in \mathbb{C}$ est dit "pseudo-algébrique" (pour f) si z est un pôle de f , ou si $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}$, c'est-à-dire si

$$f(z) \in \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}.$$

Remarquons que deux fonctions algébriquement dépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ possèdent les mêmes points pseudo-algébriques. D'autre part l'ensemble des points pseudo-algébriques d'une fonction algébriquement additive forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$.

Ramachandra démontre alors le :

THEOREME 2. [12] - Soient $f_1, \dots, f_d$ $(d \geq 2)$ d fonctions méromorphes algébriquement additives, algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1, \dots, \rho_d$ respectivement. On pose :

$\theta = 1$ si $f_1, \dots, f_d$ ont une période commune ;
$\theta = 0$ sinon.

Alors l'ensemble des points pseudo-algébriques communs à $f_1, \dots, f_d$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$, de dimension

$$\ell \leq \frac{\rho_1 + \dots + \rho_d - \theta}{d-1} .$$

Remarque - Soit f une fonction méromorphe algébriquement additive ; il existe donc (§. 1) un nombre complexe $b \neq 0$ et une fraction rationnelle $R \in \overline{\mathbb{Q}}(X, Y)$, tels que

$$f(bz) = R(\psi(z), \psi'(z)) ,$$

avec $\psi(z) = z$, ou $\psi(z) = \exp z$, ou $\psi(z) = \wp(z)$. Les deux fonctions $f(bz)$ et $\psi(z)$ sont algébriquement dépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (grâce à l'équation différentielle de la fonction ψ), donc ont les mêmes points pseudo-algébriques (cf. [12] lemme 8). On peut donc remplacer, dans l'énoncé du théorème 2, chaque fonction f_i par la fonction $\psi_i(\frac{z}{b_i})$ qui lui est associée. On constate ainsi que $\ell = \delta(f_1, \ldots, f_d)$.

D'autre part, f est d'ordre inférieur ou égal à ε ($\varepsilon > 0$ quelconque), 1 ou 2 , si $\psi(z)$ est égal à z , exp z ou $\wp(z)$ respectivement.

Pour utiliser la proposition 1, il reste à déterminer quelles fonctions algébriquement additives sont algébriquement indépendantes. Il n'existe pas encore d'énoncé général, mais les cas particuliers connus permettent d'espérer que le résultat suivant soit vrai :

Les fonctions z , $e^{a_1 z}, \ldots, e^{a_\ell z}$, $\wp_1(b_1 z), \ldots, \wp_\lambda(b_\lambda z)$ sont algébriquement indépendantes, si et seulement si les nombres complexes $a_1, \ldots, a_\ell$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et les fonctions $\wp_1(b_1 z), \ldots, \wp_\lambda(b_\lambda z)$ sont algébriquement indépendantes.

Il reste alors à étudier l'indépendance algébrique des fonctions $\wp_i(b_i z)$; ici encore, seuls des résultats partiels sont connus (voir la proposition 2, ainsi que [12] lemme 7).

Une formulation équivalente au théorème 2 est donnée pour les relations suivantes, où $\wp_i$ sont des fonctions elliptiques de Weierstrass, ω_i une période de non nulle de $\wp_i$, dont les invariants $g_{2,i}$ et $g_{3,i}$ sont algébriques, b_i des nombres complexes non nuls, et a un nombre algébrique.

(3. 1) $\delta(z, a^z) = 1$

(3. 2) $\delta(e^{b_1 z}, e^{b_2 z}) \leq 2$

(3. 3) $\delta(z, \wp_1(b_1 z) \leq 2$

(3. 4) $\delta(e^z, \wp_1(b_1 z)) \leq 3$

(3. 5) $\delta(e^{2i\pi}, \wp_1(\omega_1 z) \leq 2$

(3. 6) $\delta(e^z, \wp_1(b_1 z), \wp_2(b_2 z)) \leq 2$

(3. 7) $\delta(\wp_1(b_1 z), \wp_2(z)) \leq 4$

(3. 8) $\delta(\wp_1(\omega_1 z), \wp_2(\omega_2 z)) \leq 3$

(3. 9) $\delta(\wp_1(b_1 z), \wp_2(b_2 z), \wp_3(z)) \leq 3$

(3. 10) $\delta(\wp_1(\omega_1 z), \wp_2(\omega_2 z), \wp_3(\omega_3 z) \leq 2$

(3. 11) $\delta(\wp_1(b_1 z), \wp_2(b_2 z), \wp_3(b_3 z), \wp_4(b_4 z) \leq 2$.

La relation (3. 1) est le théorème de Gel'fond Schneider, et sous cette forme, on peut effectuer assez simplement la démonstration de la transcendance de a^b ; la relation (3. 2), équivalente à

$$\delta(e^{b_1 z}, e^{b_2 z}, e^{b_3 z}) \leq 1 ,$$

a également été obtenue par Schneider, Siegel et Lang. On conjecture ([7] chap. II et [5] problème 1) que l'on a

$$\delta(e^{b_1 z}, e^{b_2 z}) \leq 1 . \tag{3.12}$$

Il suffirait, pour obtenir ce résultat, que l'on puisse remplacer, dans la conclusion du théorème 2, l'inégalité large

$$\ell = \delta(f_1, \ldots, f_d) \leq \frac{\rho_1 + \ldots + \rho_d - \theta}{d-1}$$

par l'inégalité stricte

$$\ell < \frac{\rho_1 + \ldots + \rho_d - \theta}{d-1} .$$

Ramachandra [12] conjecture même que l'on a, dans tous les cas,

$$\ell \leq 1 . \tag{3.13}$$

Cette conjecture se réduit donc à

$$\delta(e^{b_1 z}, e^{b_2 z}) \leq 1 \tag{3.12}$$

$$\delta(z, \wp(b z)) \leq 1 \tag{3.14}$$

$$\delta(e^z, \wp(b z)) \leq 1 \tag{3.15}$$

$$\delta(\wp_1(b_1 z), \wp_2(b_2 z)) \leq 1 . \tag{3.16}$$

§. 4. - ENONCE DU THEOREME GENERAL, ET APPLICATIONS A LA FONCTION ZETA DE WEIERSTRASS

Le théorème général est le suivant :

THEOREME 3. [17] - Soient d_1, d_2, d_3, d_4, d des nombres entiers vérifiant

$$d_1 = 0 \text{ ou } 1 \ ; \ d_2 \geq 0 \ ; \ d_3 \geq d_4 \geq 0 \ ; \ d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geq 2 .$$

Soient $b_1,\dots,b_{d-d_4}$ des nombres complexes non nuls, c_j $(d-d_4<j\le d)$ des nombres complexes, $\wp_1,\dots,\wp_{d_3}$ des fonctions elliptiques de Weierstrass, d'invariants $g_{2,k}$ et $g_{3,k}$ algébriques, $(1\le k\le d_3)$, et soit ζ_ℓ $(1\le \ell\le d_4)$ la fonction zêta de Weierstrass associée à $\wp_\ell$.

Soient $f_1,\dots,f_d$ les fonctions méromorphes, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1,\dots,\rho_d$ respectivement, définies de la manière suivante :

$$f_i(z) = b_i z \quad , \quad \rho_i = 0 \ , \quad 1\le i\le d_1 \ ;$$

$$f_i(z) = \exp b_i z \ , \quad \rho_i = 1 \ , \quad d_1< i\le d_1+d_2 \ ;$$

$$f_i(z) = \wp_{i-d_1-d_2}(b_i z) \ , \quad \rho_i = 2 \ , \quad d_1+d_2< i\le d_1+d_2+d_3 \ ;$$

$$f_i(z) = c_i z + \zeta_{i-d_1-d_2-d_3}(b_{i-d_3} z) \ , \quad \rho_i = 2 \ , \quad d_1+d_2+d_3< i\le d \ .$$

On définit θ par $\theta = 1$ si les fonctions $f_1,\dots,f_d$ ont une période commune, $\theta = 0$ sinon. Alors

$$\delta(f_1,\dots,f_d) \le \frac{\rho_1+\dots+\rho_d-\theta}{d-1} \ . \tag{4.1}$$

De plus, si les nombres $b_1,\dots,b_{d-d_4}$, $c_{d-d_4+1},\dots,c_d$ sont tous algébriques, alors

$$\delta(f_1,\dots,f_d) = 0 \ . \tag{4.2}$$

En fait, la proposition 3 de [17] est plus générale et ne concerne pas seulement les valeurs algébriques des fonctions $f_1,\dots,f_d$.

En plus des propositions 1, 2 et 3 (qui sont équivalentes à la relation (4.2)) et du théorème 2, on déduit du théorème 3 les inégalités suivantes :

$$\delta(e^z, \wp(b_1 z) \ , \ \zeta(b_1 z)+b_2 z) \le 2$$

$$\delta(\wp(z), \ \zeta(z)+bz) \le 4$$

$$\delta(\wp(\omega z) \ , \ \zeta(\omega z) - \eta z) \le 3$$

$$\delta(\wp_1(b_1 z), \wp_2(b_2 z) \ , \ \zeta_1(b_1 z)+b_3 z) \le 3$$

$$\delta(\wp_1(\omega_1 z) , \ \wp_2(\omega_2 z), \ \zeta_1(\omega_1 z) - \eta_1 z) \le 2$$

$$\delta(\wp_1(b_1 z), \wp_2(b_2 z), \wp_3(b_3 z), \ \zeta_1(b_1 z) - b_4 z) \le 2$$

$$\delta(\wp_1(b_1 z), \wp_2(b_2 z) , \ \zeta_1(b_1 z)+b_3 z \ , \ \zeta_2(b_2 z)+b_4 z) \le 2 \ .$$

La conjecture (3. 13) de Ramachandra serait résolue si on pouvait remplacer (4. 1) par :

$$\delta(f_1, \ldots, f_d) \leq 1 ,$$

c'est-à-dire, si, outre (3. 12), (3. 14), (3. 15) et (3. 16), on avait

$$\delta(\wp(z), \zeta(z) + bz) \leq 1 .$$

La transcendance de π/ω (proposition 3) renforce la vraisemblance de cette conjecture.

§. 5. - INDEPENDANCE LINEAIRE DES PERIODES DE FONCTIONS EXPONENTIELLES ET ELLIPTIQUES

Nous avons vu que, $\wp$ étant une fonction elliptique dont les invariants g_2 et g_3 sont algébriques et dont un couple de périodes fondamentales est (ω_1, ω_2), chacun des nombres suivants est transcendant :

$$\omega_1 , \omega_2 , \eta_1 , \eta_2 , 2i\pi.$$

D'autre part ils sont liés par la relation de Legendre

$$\eta_1\omega_2 - \omega_1\eta_2 = 2i\pi .$$

Le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi)$ sur $\mathbb{Q}$ est donc 1, 2, 3 ou 4 . La détermination de ce degré est un problème ouvert. Une première approche consiste à étudier la transcendance des formes linéaires à coefficients algébriques (c'est-à-dire les polynômes de degré 1). On peut ensuite étudier l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de ces nombres. Depuis le résultat de Schneider que nous avons vu au §. 2. et qui contient l'indépendance linéaire de 1 , ω_1 , η_1 les principales propriétés ont été obtenues par Baker et Coates.

En 1968, Baker [13] a montré que toute forme linéaire non nulle en ω_1, ω_2 , à coefficients algébriques, est transcendante. Il a étendu ce résultat en 1969 [14] aux formes linéaires non nulles en $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ (on en déduit la transcendance de la somme des circonférences de deux ellipses dont les axes ont des longueurs algébriques). Ceci devait être généralisé par Coates qui démontrait, ([15]) en 1970, la transcendance de toute forme linéaire non nulle en $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$ à coefficients algébriques. On en déduit la transcendance de $\pi+\omega$ pour toute période de ω (rappelons que le théorème de Schneider entraîne la transcendance de π/ω ; voir §. 2. proposition 3).

Il reste alors à étudier l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres $1, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$, dans le cas où la fonction $\wp$ n'admet pas de multiplication complexe (sinon évidemment $1, \omega_1, \omega_2$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$, puisque $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est quadratique). Le problème n'est pas entièrement résolu, mais Coates [16] a obtenu récemment l'indépendance linéaire de $1, \omega_1, \omega_2, 2i\pi$.

Citons un résultat effectif de Baker [21] dans ce domaine : si $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \alpha_2$ sont des nombres algébriques de degré $\leq d$ et de hauteur $\leq H$, on a :

$$|\alpha_0 + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2| > c . \exp - (\log H)^k$$

où k et c sont deux constantes positives ne dépendant que de $g_2, g_3, \omega_1, \omega_2$ et d.

On en déduit que pour tout nombre algébrique $\alpha \neq 0$, on a

$$|\wp(\alpha)| < c \exp(\mathrm{Log}\, H(\alpha))^k$$

où k et c ne dépendent que de g_2, g_3 et $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$.

Ces résultats ne sont pas les meilleurs possibles (voir conjectures de [21]); ils font suite aux travaux de Fel'dman [18, 19], (voir à ce sujet [23]), et utilisent la méthode qui avait permis à Baker de montrer la généralisation suivante du théorème de Gel'fond-Schneider [2] :

Si $\mathrm{Log}\,\alpha_1, \ldots, \mathrm{Log}\,\alpha_n$ sont des logarithmes de nombres algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors $1, \mathrm{Log}\,\alpha_1, \ldots, \mathrm{Log}\,\alpha_n$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

On peut poser le problème analogue pour la fonction $\wp$: soient $u_1, \ldots, u_n, \omega_1, \omega_2$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ; soit $\wp$ la fonction de Weierstrass associée à ω_1, ω_2 ; on suppose que les invariants g_2 et g_3 de $\wp$ sont algébriques, et que

$\wp(u_1), \dots, \wp(u_n)$ sont algébriques. Etudier l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres

$$u_1, \dots, u_n .$$

Nous avons vu que le cas $n = 2$ était résolu par le corollaire 4 du théorème 1 §. 2. Une discussion de ce problème pour $n \geq 3$ est faite par Coates [22].

Pour terminer citons un problème de Lang [20] : soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass dont les invariants g_2 et g_3 sont algébriques, et soit ω une période non nulle de $\wp$. Existe-t-il une infinité de réels t tels que les nombres $\wp(\omega t)$ soient algébriques et $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ?

-:-:-:-

REFERENCES

Un exposé historique très complet (avec une abondante bibliographie : 440 références !) sur les nombres transcendants a été fait par

[1] FEL'DMAN N.I. et SIDLOVSKII A.B. - The development and present state of the theory of transcendental numbers. Russian Math. Surveys, 22, n°3 (1967) p. 1-79, (trad. angl. de Usp. Mat. Nauk. S.S.S.R., 22, n° 3 (1967) p. 3-81).

Des références plus récentes peuvent être trouvées dans :

[2] LANG S. - Transcendental numbers and diophantine approximations. Bull. Amer. Math. Soc. 77 n° 5, (1971) p. 635-677.

Parmi les livres sur les nombres transcendants, ceux qui étudient les valeurs de fonctions elliptiques sont les suivants :

[3] SIEGEL C. L. - Transcendental numbers. Ann. of Math. Studies, n° 16 Princeton (1949) 102 p.

[4] GEL'FOND A.O. - Transcendental and algebraic numbers. Dover, New-York, 1960 (trad. angl. de l'édition russe G.I.T.T.L, Moscou, 1952).

[5] SCHNEIDER Th. - Introduction aux nombres transcendants. Paris, Gauthier-Villars, 1959 (trad. franç. de l'édition allemande, Springer, 1957).

[6] LIPMAN J. - Transcendental numbers. Queen's papers n° 7, Kingston, 1966.

[7] LANG S. - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, Reading Mass. 1966.

Les articles originaux dans lesquels ont été publiés les résultats dont nous avons parlés sont les suivants :

[8] SIEGEL C. L. - Über die Perioden elliptischer Functionen, J. reine angew. Math. 167 (1932) p. 62-69.

[9] SCHNEIDER Th. - Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen ; II, Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen, J. reine angew. Math. 172 (1934) p. 70-74.

[10] SCHNEIDER Th. - Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale. Math. Ann. 113 (1937) p. 1-13.

[11] SCHNEIDER Th. - Ein Satz über gangwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. Math. Ann. 121 (1949) p. 131-140.

[12] RAMACHANDRA K. - Contributions to the theory of transcendental numbers. I, Acta Arithm. 14 (1968) p. 65-72 ; II, id., p. 73-88.

[13] BAKER A. - On the periods of the Weierstrass $\wp$-function. Sympos. Math. Roma 4 Téoria Numeri, Dic. 1968, e algebra, Marzo 1969, p. 155-174 (1970).

[14] BAKER A. - On the quasi-periods of the Weierstrass ζ-function. Nach. Akad. Wiss. Göttingen II (1969) n° 16, p. 145-157.

[15] COATES J. - The transcendence of linear forms in $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$. Amer. J. Math. 93 (1971) p. 385-397.

[16] COATES J. - Linear forms in the periods of the exponential and elliptic functions. Inventiones Math., 12 (1971) p. 290-299.

[17] WALDSCHMIDT M. - Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Acta Arithm. vol. 23, n° 1 (à paraître).

Mentionnons également les articles suivants :

[18] FEL'DMAN N. I. - Approximation of certain transcendental numbers. II, the approximation of certain numbers associated with the Weierstrass $\wp$-function. Amer. Math. Soc. Transl. (2), 59 (1966) p. 246-270 (trad. angl. de : Izv. Akad. Nauk. S. S. S. R., Ser. Mat., 15 (1951) p. 153-176).

[19] FELD'MAN N. I. - Simultaneous approximation of the periods of an elliptic function by algebraic numbers. Amer. Math. Soc. Transl. (2), 59 (1966) p. 271-284 (trad angl. de Izv. Akad. Nauk. S. S. S. R., Ser. Mat. 22, (1958) p. 563-576).

[20] LANG S. - Diophantine approximationson toruses. Amer. J. Math., 86 (1964) p. 521-533.

[21] BAKER A. - An estimate for the $\wp$-function at an algebraic point. Amer. J. Math. 92 (1970) p. 619-622.

[22] COATES J. - An application of the Thue-Siegel. Roth theorem to elliptic functions. Proc. Camb. Phil. Soc., 69 (1971) p. 157-161.

[23] BUNDSCHUH P. - Ein approximationsmass für transzendente Lösungen gewisser transzendenter Gleichungen. J. reine angew. Math, 251 (1971) p. 32-53.

Parmi les ouvrages qui traitent de la théorie générale des fonctions elliptiques, retenons par exemple

[24] WEBER H. - Lehrbuch der Algebra. V III, Chelsea Publishing Cy, New-York, 1908.

[25] WHITTAKER E. T. and WATSON G. N. - A course of modern analysis. 4° Ed. Cambridge Univ. Press, Londres (1952).

-:-:-:-

U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33405 TALENCE

Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY