Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux
Année 1987-1988 - exposé n° 15 le 5 février 1988

FONCTIONS THETA ET NOMBRES TRANSCENDANTS

par

Michel WALDSCHMIDT

Résumé : Dans cet exposé, nous considérons deux aspects du sujet. D'une part on cherche à démontrer des résultats de transcendance (ou au moins d'irrationalité) sur les valeurs de fonctions thêta (en une variable pour commencer), soit faisant intervenir des groupes algébriques (associés aux intégrales elliptiques), soit en utilisant directement l'équation fonctionnelle des fonctions thêta. D'autre part, dans certaines démonstrations diophantiennes sur les groupes algébriques, on a besoin de précisions concernant les plongements quasi-projectifs, et on doit pour cela établir de nouvelles propriétés des fonctions thêta.

§1. La fonction sigma de Weierstrass.

Soit $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbb{C}$. Une fonction thêta relative à Ω est une fonction entière θ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe deux applications a et b de Ω dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\theta(z+\omega) = \theta(z).\exp\{a(\omega)z+b(\omega)\}$$

pour tout $(z,\omega)\in\mathbb{C}\times\Omega$.

Par exemple, si σ désigne le *produit canonique de Weierstrass* associé à Ω,

$$\sigma(z) = z.\prod_{\substack{\omega\in\Omega\\ \omega\neq 0}} (1-\frac{z}{\omega}).\exp\{\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\},$$

alors pour tout $\gamma\in\mathbb{C}$ la fonction $\sigma(z).e^{\gamma z^2}$ est une fonction thêta avec $a(\omega)=2\gamma\omega + \eta(\omega)$. Ici, $\eta(\omega)$ est la *quasi-période* de la fonction zêta de Weierstrass associée à ω :

$$\eta(\omega) = \zeta(z+\omega)-\zeta(z) \qquad \text{avec } \zeta=\sigma'/\sigma.$$

On sait peu de choses sur la nature arithmétique des valeurs de σ. Par exemple, pour $\Omega=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$, on ne sait pas si le nombre

$$\sigma(1/2) = 2^{5/4}.\pi^{1/2}.e^{\pi/8}.\Gamma(1/4)^{-2} = 0.474949\ldots$$

est rationnel, ou algébrique irrationnel, ou bien transcendant. On peut penser que les trois nombres π, e^{π} et $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants, ce qui donnerait la transcendance de $\sigma(1/2)$. Rappelons que Chudnovsky [C] a démontré que les deux nombres π et $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants.

Au lieu de considérer les valeurs $\sigma(\alpha)$ de σ en des points algébriques α, nous allons considérer les valeurs $\sigma(u)$ de cette fonction en des points u qui sont des logarithmes elliptiques de points algébriques, c'est-à-dire tels que $\exp_E(u)=(\wp(u), \wp'(u),1)\in E(\overline{\mathbb{Q}})$. On a noté $\wp$ la *fonction elliptique de Weierstrass* associée à Ω, c'est-à-dire $\wp=-\zeta'$, et E la *courbe elliptique* correspondante :

$$E = \{(x,y,t)\in\mathbb{P}_2 \ ; \ y^2t=4x^3-g_2xt^2-g_3t^3\}.$$

Pour pouvoir définir $E(\overline{\mathbb{Q}})$, on suppose que les invariants g_2 et g_3 sont algébriques :

$$g_2=60s_4(\Omega),\ g_3=140s_6(\Omega),$$

avec

$$s_m(\Omega) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ \omega\neq 0}} \omega^{-m} \qquad (\text{pour } m\in\mathbb{R},\ m>2).$$

Les zéros de la fonction σ sont les points de Ω. Mais si $u\in\mathbb{C}\setminus\Omega$ est tel que $P=\exp_E(u)\in E(\overline{\mathbb{Q}})$, on ne sait pas si le nombre $\sigma(u)$ est transcendant, alors qu'on sait que $\zeta(u)$ est transcendant. La dérivée logarithmique de σ est mieux connue de ce point de vue que σ elle-même, parce que $\zeta(u)$ est une intégrale elliptique de seconde espèce : la fonction ζ intervient dans l'exponentielle du groupe algébrique qui est extension non triviale de E par $\mathbb{G}_a$.

On sait cependant, par exemple, que le nombre

$$\sigma(u).\exp\{-\frac{1}{2}.u.\zeta(u)\}$$

est transcendant : il apparaît comme une intégrale elliptique de troisième espèce. Plus généralement, pour $\omega\in\Omega$ et $\eta=\eta(\omega)$, et pour tout $\beta\in\overline{\mathbb{Q}}$, le nombre

$$\sigma(u)^2.\exp\{-\eta u-(u-\omega)(\beta+\zeta(u))\}$$

est transcendant. On obtient cet énoncé en considérant le groupe algébrique de dimension 2, extension de E par $\mathbb{G}_m$, associé au point P ; son corps de fonctions rationnelles contient la fonction

$$(z,t) \longrightarrow \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\sigma(u)}.e^{t+z\zeta(u)}.$$

Un résultat plus intéressant, qui repose sur la méthode de Baker, a été démontré par D. Bertrand [Be1] : si P n'est pas de torsion (c'est-à-dire si $u\notin\mathbb{Q}\Omega$), et si E admet des multiplications complexes (ce qui revient à dire que ω_2/ω_1 est algébrique), le nombre

$$\sigma(u).\exp\{-\frac{1}{2}.s_2(\Omega).u^2\}$$

est transcendant ; le nombre $s_2(\Omega)$ est défini par

$$s_2(\Omega) = \lim_{s\to 0} \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ \omega\neq 0}} \omega^{-2}.|\omega|^{-s}.$$

Son résultat est valable aussi dans les domaines ultramétriques ; il implique que sur une courbe elliptique à multiplications complexes définie sur $\mathbb{Q}$, la hauteur p-adique canonique ne s'annule que sur les points de torsion.

D. Bertrand a étendu ces résultats aux fonctions thêta en plusieurs variables, en considérant des extensions de variétés abéliennes de type C.M. par $\mathbb{G}_m^2$ [Be2].

Plus tard [Be3], il a approfondi cette question en étudiant les relations d'orthogonalité pour la forme bilinéaire symétrique associée à la hauteur p-adique.

Pour conclure cette première partie, rappelons un résultat d'E. Reyssat [R] : deux des trois nombres

$$\eta(u) - \frac{\eta}{\omega}.u, \quad \exp\{2i\pi u/\omega\}, \quad \sigma(u).\exp\{-\frac{1}{2}.\frac{\eta(\omega)}{\omega}.u^2\}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, quand $\wp(u)$ est algébrique et $u\notin\mathbb{Q}\Omega$.

§2. Equations fonctionnelles.

Fixons $\tau\in\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Im}(\tau)>0$, et posons $q=e^{2i\pi\tau}$, de sorte que $|q|<1$. Une des fonctions thêta de Jacobi ($\theta_3(u,q)$ dans ses notations) est

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}.e^{2i\pi nz}.$$

C'est une fonction entière qui vérifie

$$\theta(z+m+n\tau) = \theta(u).\exp\{-2i\pi n(z+\frac{\tau}{2}.n)\},$$

donc c'est une fonction thêta relative au réseau $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$.

On a

$$\frac{\theta(z)}{\theta(0)} = \frac{\sigma(\omega_1 z+\omega_3/2)}{\sigma(\omega_3/2)}.e^{-\omega_1 z(\eta_1+\eta_2+\eta_1 z)},$$

avec $\omega_3=\omega_1+\omega_2$, ce qui permet d'obtenir des énoncés de transcendance sur le quotient de valeurs de la fonction θ, connaissant des résultats (comme au §1) sur la fonction σ.

L'étude directe de la fonction θ, et de la série tronquée

$$\sum_{n\geq 0} w^n.q^{n^2},$$

pour w et q rationnels, a fait l'objet de travaux de Bernstein et Szasz en 1915, de Tschakaloff en 1921, et de Bundschuh cinquante ans plus tard. Dans un exposé très bien documenté sur ce sujet, Bundschuh [Bu] a passé en revue les différents résultats connus sur ce sujet, et nous renvoyons à ce texte pour de plus amples informations. Nous mentionnerons seulement un résultat plus récent sur ce thème [Bu-W].

Soient K un corps de nombres de degré δ plongé dans $\mathbb{C}$, τ un nombre complexe de partie imaginaire positive tel que $q=e^{i\pi\tau}\in K$, P et Q deux polynômes de $K[X]$, Λ le degré de P, et f une fonction entière dans $\mathbb{C}$ satisfaisant

$$f(u+1)=f(u) \quad \text{et} \quad f(u+\tau)=P(e^{-2i\pi u}).f(u) + Q(e^{-2i\pi u}).$$

Le fait que f soit périodique de période 1 équivaut au fait qu'il existe une fonction F, analytique dans $\mathbb{C}^*$, telle que $F(e^{-2i\pi u})=f(u)$.

<u>Théorème</u>.- *Supposons que* F *soit analytique en* 0, *et que les deux fonctions* $e^{2i\pi u}$ *et* $f(u)$ *soient algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$. *Soit* d *un entier* >0 ; *soient* $u_1,\dots,u_s$ *des nombres complexes deux-à-deux distincts modulo* $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$, *tels que, pour* $1\leq\sigma\leq s$, *les deux nombres* $\exp(2i\pi u_\sigma)$ *et* $f(u_\sigma)$ *soient algébriques, avec*

$$[K(\exp(2i\pi u_\sigma),f(u_\sigma)):K]\leq d.$$

Alors

$$s < \frac{700}{\pi}.\Lambda.d^2.\delta.h(q)/\mathrm{Im}\tau.$$

On peut considérer non seulement les valeurs de f, mais aussi celles de ses dérivées pour l'opérateur $(1/2i\pi).d/du$. On peut enfin donner des variantes de cet énoncé, dans lesquelles on ne suppose plus F analytique à l'origine. Cela permet d'obtenir des résultats sur la nature algébrique de nombres de la forme $\theta(\frac{\log w}{2i\pi})$ quand θ est une fonction thêta.

§3. Fonctions thêta en plusieurs variables.

Certains des résultats précédents s'étendent en plusieurs variables. Mais nous allons considérer ici un autre aspect de la question.

De nombreux résultats, classiques ou récents, de transcendance, font intervenir les groupes algébriques. Pour rendre ces énoncés effectifs, voire explicites, on est amené à préciser le plongement choisi du groupe algébrique dans un espace projectif comme sous-variété quasi-projective. Le cas particulier le plus important est celui d'une variété abélienne A ; on obtient un plongement grâce à des fonctions thêta en plusieurs variables $(\theta_0,\dots,\theta_N)$, le corps des fonctions rationnelles sur A étant alors $K(\theta_1/\theta_0,\dots,\theta_N/\theta_0)$ où K est un corps de définition de la variété A.

Récemment, S. David [D] a réussi à rendre explicites (les constantes restant ne dépendant plus que de la dimension) les différentes estimations dépendant de ce plongement : majorations analytiques pour la croissance des fonctions thêta, majorations arithmétiques pour la hauteur des nombres algébriques qui interviennent ; ces dernières font intervenir une notion de *hauteur* pour la variété abélienne.

Voici un exemple d'application de ces estimations. D'après un résultat de D.W. Masser, sur une variété abélienne A de dimension $g\geq 1$ définie sur un corps de nombres K, le degré $d(P)$ d'un corps de définition d'un point de torsion $P\in A(\overline{\mathbb{Q}})_{tors}$ est minoré en fonction de l'ordre $n(P)$ de P par

$$d(P) \geq c_A.n(P)^{1/g}/\log n(P).$$

Cet énoncé est raffiné par S. David qui précise la dépendance de c_A en fonction de la variété abélienne A ; par exemple si A est simple, on a

$$d(P) \geq c_g.h^{-2}.\delta^{-2}.(\log\delta)^{-1}.n(P)^{1/g}/\log n(P),$$

où h est un majorant de la hauteur de la variété abélienne A, et δ un majorant du degré d'un corps de nombres sur lequel A est définie. Enfin c_g est une constante positive ne dépendant que de la dimension g de A.

REFERENCES.

[Be1] BERTRAND, Daniel.- Valeurs de fonctions thêta et hauteurs p-adiques ; Sém. Th. Nombres Paris 1980-81, Birkhäuser, P.M. **22** (1982), 1-12.

[Be2] BERTRAND, Daniel.- Propriétés arithmétiques de fonctions thêta à plusieurs variables ; Number Theory Noordwijkerhout 1983, Springer L.N. **1068** (1984), 17-22.

[Be3] BERTRAND, Daniel.- Relations d'orthogonalité sur les groupes de Mordell-Weil ; Sém. Th. Nombres Paris 1984-85, Birkhäuser, P.M. **63** (1986), 33-39.

[Bu] BUNDSCHUH, Peter.- Quelques résultats arithmétiques sur les fonctions thêta de Jacobi ; Problèmes diophantiens 1983-84, Publ. Math. Univ. P. et M. Curie (Paris VI), N°**64**, 15 p.

[Bu-W] BUNDSCHUH, Peter, and WALDSCHMIDT, Michel.- Irrationality results for theta functions by Gel'fond-Schneider's method ; à paraître.

[C] CHUDNOVSKY, Gregory.- Contributions to the theory of transcendental numbers ; Math. Surveys and Monographs, **19** (1984), Amer. Math. Soc.

[D] DAVID, Sinnou.- Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes ; C.R. Acad. Sc. Paris Sér.I, **305** (1987), 211-214.

[R] REYSSAT, Eric.- Fonctions de Weierstrass et indépendance algébrique ; C. R. Acad. Sc. Paris Sér.I, **290** (1981), 439-441.

(Texte reçu le 30 mai 1988)

Michel WALDSCHMIDT
C.N.R.S., U.A. 763
Problèmes Diophantiens
Institut Henri Poincaré
11, rue P. et M. Curie
75231 PARIS Cedex 05.