Les nombres π et e^{π} : irrationalité, transcendance, approximation diophantienne

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

Résumé

L'irrationalité du nombre π a été démontrée par H. Lambert en 1767, en utilisant des fractions continues. Sa transcendance a été obtenue grâce à la méthode de Ch. Hermite et aux approximants de Padé par F. Lindemann en 1882, qui résolvait ainsi le problème de la quadrature du cercle. La transcendance du nombre e^π a été démontrée par A.O. Gel'fond en 1929, grâce à des séries d'interpolation ; cette question faisait partie de l'énoncé du septième problème de D. Hilbert qui a été complètement résolu par A.O. Gel'fond et Th. Schneider en 1934 par une méthode de transcendance utilisant des idées de C.L. Siegel.

Résumé (suite)

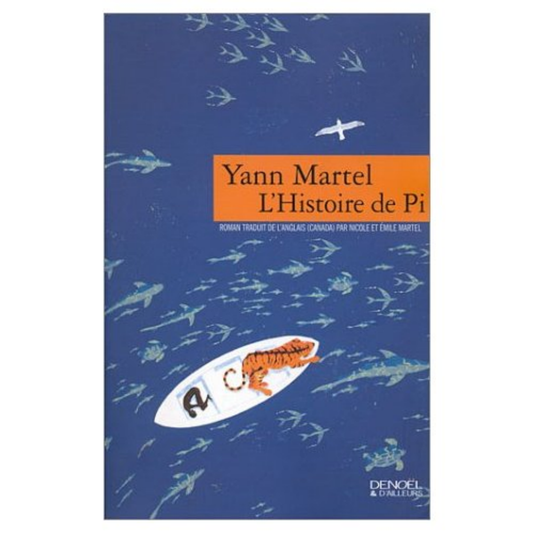
Que π ne soit pas un nombre de Liouville est un résultat de K. Mahler en 1953. Son énoncé a été raffiné par plusieurs mathématiciens, la meilleure estimation actuellement connue est

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{8,0161}}.$$

(M. Hata, 1993). On ne sait pas démontrer que e^π n'est pas un nombre de Liouville. En 1976, G.V. Chudnovsky a montré que les nombres π et $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants. Sa démonstration utilisait les fonctions elliptiques. Son énoncé a été étendu en 1996 à l'indépendance algébrique des trois nombres π, e^π et $\Gamma(1/4)$ par Yu. V. Nesterenko qui utilisait des fonctions modulaires. Mais on ne sait toujours pas démontrer, par exemple, que e et π sont algébriquement indépendants.

Histoire de Pi

Histoire de Pi
Yann Martel
Éditions Denoël,
2004.



Le nombre $\pi = 3.1415926535\ldots$

- Rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre.

- Rapport entre l'aire d'un disque et le carré de son rayon.

- Six fois le rapport entre le volume d'une sphère et le cube de son rayon.

- $$4\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- $$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Le nombre $\pi = 3.1415926535\ldots$

- Rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre.
- Rapport entre l'aire d'un disque et le carré de son rayon.
- Six fois le rapport entre le volume d'une sphère et le cube de son rayon.
- $$4\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$
- $$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Le nombre $\pi = 3.1415926535\ldots$

- Rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre.

- Rapport entre l'aire d'un disque et le carré de son rayon.

- Six fois le rapport entre le volume d'une sphère et le cube de son rayon.

- $$4\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- $$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Le nombre $\pi = 3.1415926535\ldots$

- Rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre.

- Rapport entre l'aire d'un disque et le carré de son rayon.

- Six fois le rapport entre le volume d'une sphère et le cube de son rayon.

- $$4\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- $$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Le nombre $\pi = 3.1415926535\ldots$

- Rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre.

- Rapport entre l'aire d'un disque et le carré de son rayon.

- Six fois le rapport entre le volume d'une sphère et le cube de son rayon.

- $$4\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- $$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Le nombre π

Prototype d'une *période* :

$$e^{z+2i\pi} = e^z$$

Période au sens de Kontsevich et Zagier

$$\pi = \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy,$$

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy & &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x^4)dx}{1+x^2} & &= 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Le nombre π

Prototype d'une *période* :

$$e^{z+2i\pi} = e^z$$

Période au sens de Kontsevich et Zagier

$$\pi = \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy,$$

$$\begin{aligned} \pi &= \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy & &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x^4)dx}{1+x^2} & &= 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Le nombre π

Prototype d'une *période* :

$$e^{z+2i\pi} = e^z$$

Période au sens de Kontsevich et Zagier

$$\pi = \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy,$$

$$\begin{aligned} \pi &= \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy & &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x^4)dx}{1+x^2} & &= 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Périodes : Maxime Kontsevich et Don Zagier

Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Periods, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer 2001, 771–808.

Périodes : Maxime Kontsevich et Don Zagier

Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Periods, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer 2001, 771–808.

Les 750 premières décimales de π : $\pi = 3,$

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 ...

Décimales de π

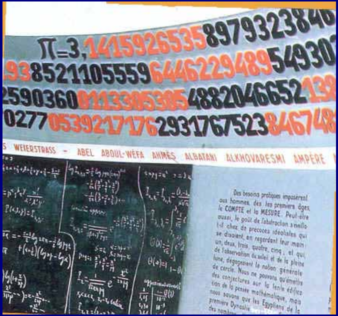
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
Ô quadrature ! Vieux tourment du philosophe
Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
...

Salle π du Palais de la Découverte

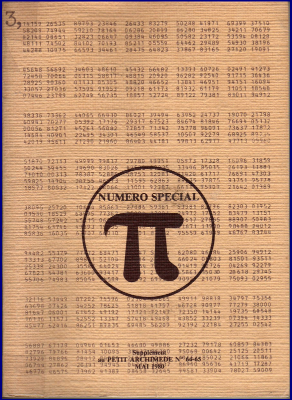
707 premières décimales de π calculées par W. Shanks en 1874.

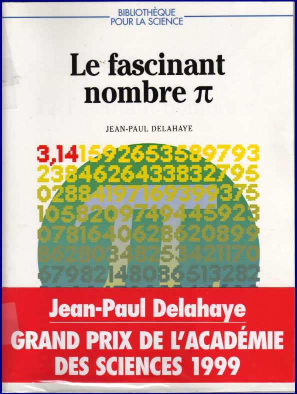
Erreur trouvée en 1947 à partir de la 128ème.

Corrigé au Palais de la Découverte en 1949.

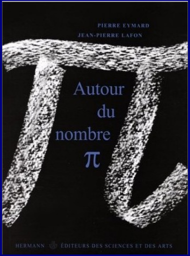


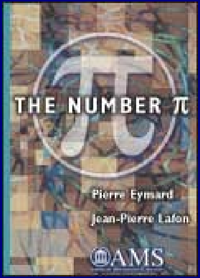
Références


NUMERO SPECIAL
Supplément au PETIT ARCHIMEDE N° 64-65
MAI 1980


BIBLIOTHÈQUE POUR LA SCIENCE
Le fascinant nombre π
JEAN-PAUL DELAHAYE
Jean-Paul Delahaye
GRAND PRIX DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES 1999

Autour du nombre pi



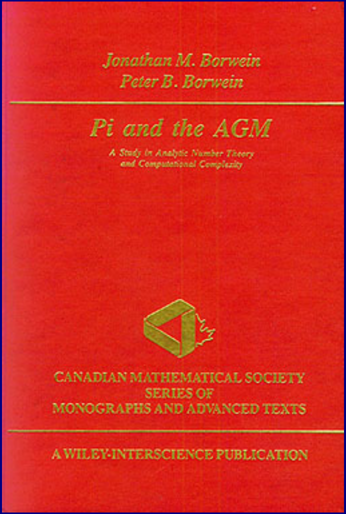


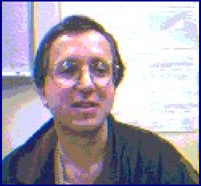
Pierre Eymard, Jean-Pierre Lafon

Autour du nombre π
(Hermann 2000)

The Number π
(AMS 2004)

Pi and the AGM



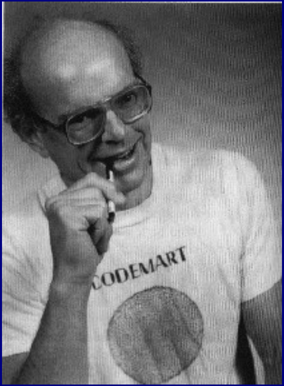



Jonathan M. Borwein et Peter B. Borwein

Pi and the AGM

John Wiley and Sons, 1987.

Neil J. A. Sloane



The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

http ://www.research.att.com/∼njas/sequences/A000796

Yasumasa Kanada

Kanada Laboratory home page

http ://pi2.cc.u-tokyo.ac.jp/index.html

1 241 100 000 000 chiffres décimaux

Yasumasa Kanada

Kanada Laboratory home page

http ://pi2.cc.u-tokyo.ac.jp/index.html

1 241 100 000 000 chiffres décimaux

Émile Borel

Question :
le nombre π
est-il *normal*
au sens
d'Émile Borel ?

Borel, É. – Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Palermo Rend. **27** (1909), p. 247–271.

— Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaînes. C. R. Acad. Sci., Paris **230** (1950), p. 591–593.

Émile Borel

Question :
le nombre π
est-il *normal*
au sens
d'Émile Borel ?

- Borel, É. – Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Palermo Rend. **27** (1909), p. 247–271.
- — Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaînes. C. R. Acad. Sci., Paris **230** (1950), p. 591–593.

Les 850 premiers chiffres binaires de π

11,
0010010000 1111110110 1010100010 0010000101 1010001100
0010001101 0011000100 1100011001 1000101000 1011100000
0011011100 0001110011 0100010010 1001000000 1001001110
0000100010 0010100110 0111110011 0001110100 0000001000
0010111011 1110101001 1000111011 0001001110 0110110010
0010010100 0101001010 0000100001 1110011000 1110001101
0000000100 1101110111 1011111001 0101000110 0110110011
1100110100 1110100100 0011000110 1100110000 0010101100
0010100110 1101111100 1001011111 0001010000 1101110100
1111111000 0100110101 0110110101 1011010101 0001110000
1001000101 1110010010 0001011011 0101011101 1001100010
0101111001 1111101100 0110111101 0001001100 0100001011
1010011010 0110001101 1111101101 0110101100 0010111111
1111010111 0010110110 1111010000 0001101011 0111111011
0111101110 0011100001 1010111111 1011010110 1010001001
1001111110 1001011010 1110100111 1100100100 0001000101
1111000100 1011000111 1111100110 0100100100 1010000110 . . .

Développement en fraction continue de π

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1 \mid}{\mid 7 +} \; \frac{1 \mid}{\mid 15 +} \; \frac{1 \mid}{\mid 1 +} \; \frac{1 \mid}{\mid 292 +} \; \frac{1 \mid}{\mid 1 +} \; \cdots$$

Développement en fraction continue de π

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1\ |}{|7+}\ \frac{1\ \ |}{|15+}\ \frac{1\ |}{|1+}\ \frac{1\ \ \ |}{|292+}\ \frac{1\ |}{|1+}\ \cdots$$

Approximations rationnelles de π

$$\pi = [3; 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\dots]$$

Convergents :

$$[3;7] = \frac{22}{7}, \qquad \text{Archimède}$$

$$[3;7,\ 15] = \frac{333}{106},$$

$$[3;7,\ 15,\ 1] = \frac{355}{113}, \qquad \text{Adrian Metius (1585), Tsu Ch'ung (480)}$$

$$[3;7,\ 15,\ 1,\ 292] = \frac{103\,993}{33\,102},$$

$$\vdots$$

http ://wims.unice.fr/wims/

Approximations rationnelles de π

$\pi = [3; 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ldots]$

Convergents :

$$[3;7] = \frac{22}{7}, \qquad \text{Archimède}$$

$$[3;7,\ 15] = \frac{333}{106},$$

$$[3;7,\ 15,\ 1] = \frac{355}{113}, \qquad \text{Adrian Metius (1585),}$$

Tsu Ch'ung (480)

$$[3;7,\ 15,\ 1,\ 292] = \frac{103\,993}{33\,102},$$

$$\vdots$$

http ://wims.unice.fr/wims/

Approximations rationnelles de π

$$\pi = [3; 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\dots]$$

Convergents :

$$[3;7] = \frac{22}{7}, \qquad \text{Archimède}$$

$$[3;7,\ 15] = \frac{333}{106},$$

$$[3;7,\ 15,\ 1] = \frac{355}{113}, \qquad \text{Adrian Metius (1585), Tsu Ch'ung (480)}$$

$$[3;7,\ 15,\ 1,\ 292] = \frac{103\,993}{33\,102},$$

$$\vdots$$

http ://wims.unice.fr/wims/

Approximations rationnelles de π

$$\pi = [3; 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\dots]$$

Convergents :

$$[3;7] = \frac{22}{7}, \qquad \text{Archimède}$$

$$[3;7,\ 15] = \frac{333}{106},$$

$$[3;7,\ 15,\ 1] = \frac{355}{113}, \qquad \text{Adrian Metius (1585), Tsu Ch'ung (480)}$$

$$[3;7,\ 15,\ 1,\ 292] = \frac{103\,993}{33\,102},$$

$$\vdots$$

http ://wims.unice.fr/wims/

Approximations rationnelles de π

$$\pi = [3; 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\dots]$$

Convergents :

$$[3; 7] = \frac{22}{7}, \qquad \text{Archimède}$$

$$[3; 7,\ 15] = \frac{333}{106},$$

$$[3; 7,\ 15,\ 1] = \frac{355}{113}, \qquad \text{Adrian Metius (1585),}$$

Tsu Ch'ung (480)

$$[3; 7,\ 15,\ 1,\ 292] = \frac{103\,993}{33\,102},$$

$$\vdots$$

http ://wims.unice.fr/wims/

Approximations rationnelles de π

$$\pi = [3; 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ldots]$$

Convergents :

$$[3;7] = \frac{22}{7},$$ Archimède

$$[3;7,\ 15] = \frac{333}{106},$$

$$[3;7,\ 15,\ 1] = \frac{355}{113},$$ Adrian Metius (1585),

Tsu Ch'ung (480)

$$[3;7,\ 15,\ 1,\ 292] = \frac{103\,993}{33\,102},$$

$$\vdots$$

http ://wims.unice.fr/wims/

Approximations rationnelles de π

$$\pi = [3; 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ldots]$$

Convergents :

$$[3;7] = \frac{22}{7},$$

Archimède

$$[3;7,\ 15] = \frac{333}{106},$$

$$[3;7,\ 15,\ 1] = \frac{355}{113},$$

Adrian Metius (1585),

Tsu Ch'ung (480)

$$[3;7,\ 15,\ 1,\ 292] = \frac{103\,993}{33\,102},$$

$$\vdots$$

http ://wims.unice.fr/wims/

Approximations rationnelles de π

$$\pi = [3; 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ldots]$$

Convergents :

$$[3;7] = \frac{22}{7}, \qquad \text{Archimède}$$

$$[3;7,\ 15] = \frac{333}{106},$$

$$[3;7,\ 15,\ 1] = \frac{355}{113}, \qquad \text{Adrian Metius (1585),}$$

Tsu Ch'ung (480)

$$[3;7,\ 15,\ 1,\ 292] = \frac{103\,993}{33\,102},$$

$$\vdots$$

http ://wims.unice.fr/wims/

Archimède (287–212 Av. JC)

$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ périmètres des polygones inscrit et exinscrit à 96 côtés

a_n et b_n demi-périmètres des polygones exinscrit et inscrit à $6 \cdot 2^n$ côtés :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

avec $a_0 = 2\sqrt{3}$, $b_0 = 3$.
Pour $n = 4$ (soit $6 \cdot 2^4 = 96$ côtés) :

$$3,140845 \cdots = 3 + \frac{10}{71} < b_4 = 3,141031 \ldots$$

$$a_4 = 3,142715 \cdots < 3,142857 \cdots = 3 + \frac{1}{7} \cdot$$

Archimède (287–212 Av. JC)

$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ périmètres des polygones inscrit et exinscrit à 96 côtés

a_n et b_n demi-périmètres des polygones exinscrit et inscrit à $6 \cdot 2^n$ côtés :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

avec $a_0 = 2\sqrt{3}$, $b_0 = 3$.
Pour $n = 4$ (soit $6 \cdot 2^4 = 96$ côtés) :

$$3,140845 \dots = 3 + \frac{10}{71} < b_4 = 3,141031 \dots$$

$$a_4 = 3,142715 \dots < 3,142857 \dots = 3 + \frac{1}{7} \cdot$$

Archimède (287–212 Av. JC)

$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ périmètres des polygones inscrit et exinscrit à 96 côtés

a_n et b_n demi-périmètres des polygones exinscrit et inscrit à $6 \cdot 2^n$ côtés :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

avec $a_0 = 2\sqrt{3}$, $b_0 = 3$.

Pour $n = 4$ (soit $6 \cdot 2^4 = 96$ côtés) :

$$3,140845 \cdots = 3 + \frac{10}{71} < b_4 = 3,141031 \ldots$$

$$a_4 = 3,142715 \cdots < 3,142857 \cdots = 3 + \frac{1}{7} \cdot$$

Archimède (287–212 Av. JC)

$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ périmètres des polygones inscrit et exinscrit à 96 côtés

a_n et b_n demi-périmètres des polygones exinscrit et inscrit à $6 \cdot 2^n$ côtés :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

avec $a_0 = 2\sqrt{3}$, $b_0 = 3$.
Pour $n = 4$ (soit $6 \cdot 2^4 = 96$ côtés) :

$$3,140845 \cdots = 3 + \frac{10}{71} < b_4 = 3,141031 \ldots$$

$$a_4 = 3,142715 \cdots < 3,142857 \cdots = 3 + \frac{1}{7} \cdot$$

14 décimales

15ème siècle, Al-Kashi,
Astronome à Samarkand
Longueur du côté d'un
polygone à n côtés :
$s(6) = 1$,
$s(2n) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2(n)}}$.
Pour $n = 3 \cdot 2^{28}$ en notation
sexagésimale,

$$\pi = 3,\ 08\ 29\ 4400\ 47\ 25\ 53\ 07\ 25 \ldots$$

Cyclotomie

Ludolph van Ceulen (1540–1610) : 34 chiffres décimaux

François Viète (1540–1603) :

calcul de l'aire d'un polygone à 2^n côtés

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Premier produit infini de l'histoire :

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad u_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1+u_{n-1})}, \quad \frac{2}{\pi} = u_1 u_2 \cdots u_n \cdots$$

Cyclotomie

Ludolph van Ceulen (1540–1610) : 34 chiffres décimaux
François Viète (1540–1603) :
calcul de l'aire d'un polygone à 2^n côtés

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Premier produit infini de l'histoire :

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad u_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1+u_{n-1})}, \quad \frac{2}{\pi} = u_1 u_2 \cdots u_n \cdots$$

Ludolph van Ceulen (1540–1610) : 34 chiffres décimaux
François Viète (1540–1603) :
calcul de l'aire d'un polygone à 2^n côtés

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Premier produit infini de l'histoire :

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad u_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1+u_{n-1})}, \quad \frac{2}{\pi} = u_1 u_2 \cdots u_n \cdots$$

Calcul numérique vs approximation Diophantienne

Calcul numérique :

on veut des méthodes d'approximation "rapides" peu d'opérations pour beaucoup de décimales.

Approximation rationnelle

on veut de bonnes approximations rationnelles dont le dénominateur ne soit pas trop grand.

Formule de Wallis (1655)

John Wallis
(Arithmetica Infinitorum 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots} = \prod_{n \geq 1} \left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1} \right).$$

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

Formule de Wallis (1655)

John Wallis
(Arithmetica Infinitorum 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}$$

$$= \prod_{n\geq 1}\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)\cdot$$

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdot$$

Formule de Wallis (1655)

John Wallis
(Arithmetica Infinitorum 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots} = \prod_{n \geq 1} \left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1} \right) \cdot$$

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \cdot$$

Formule de Wallis (1655)

John Wallis
(Arithmetica Infinitorum 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots} = \prod_{n\geq 1}\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right).$$

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Formule de Brouncker (1655)

Lord William Brouncker

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1\ |}{|2+} \ \frac{9\ |}{|2+} \ \frac{25\,|}{|2+} \ \frac{49}{|2+} \cdots$$

Fraction continue irrégulière

Pour

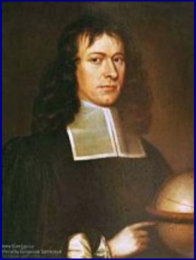
$$S = a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4 + \cdots$$

on a

$$S = \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \cfrac{a_4}{1 + a_4 - \ddots}}}}$$

Formule de Gregory–Leibniz

James Gregory (1671)



G.W. Leibniz (1674)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

École mathématique du Kerala (sud de l'Inde)

Madhava de Sangamagramma (1350-1425)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Nilakantha Somayaji (1444 - 1545) :

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

Madhava de Sangamagramma (1350-1425)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Nilakantha Somayaji (1444 - 1545) :

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

Arc tangente

Formule d'addition

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}\cdot$$

Si on prend $x=\arctan u$ et $y=\arctan v$ on a

$$\arctan u+\arctan v=\arctan\frac{u+v}{1-uv}\cdot$$

On choisit u et v tels que $(u+v)/(1-uv)=1$, de sorte que

$$\frac{\pi}{4}=\arctan u+\arctan v$$

Formule de Hutton (1776)

Avec $u = 1/2$ et $v = 1/3$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \cdots\right)\\ &\qquad\qquad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \cdots\right)\end{aligned}$$

La série converge un peu plus vite, alors on répète l'opération.

Formule de Hutton (1776)

Avec $u = 1/2$ et $v = 1/3$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \cdots\right)\\ &\qquad\qquad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \cdots\right)\end{aligned}$$

La série converge un peu plus vite, alors on répète l'opération.

Formules de Hutton, Euler et Von Vega

$$\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} \qquad (u = 1/3 \text{ et } v = 1/7)$$

et

$$\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} \qquad (u = 1/5 \text{ et } v = 1/8)$$

donnent (Hutton 1776, Euler 1779)

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}$$

et (G. Von Vega, 1794)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\\ &= 2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{8}\cdot\end{aligned}$$

Formules de Hutton, Euler et Von Vega

$$\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} \qquad (u = 1/3 \text{ et } v = 1/7)$$

et

$$\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} \qquad (u = 1/5 \text{ et } v = 1/8)$$

donnent (Hutton 1776, Euler 1779)

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}$$

et (G. Von Vega, 1794)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\\ &= 2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{8}\cdot\end{aligned}$$

Formule de Machin

En prenant $u = 120/119$ et $v = -1/239$, on obtient la formule de John Machin (1680–1752)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

qui a été souvent utilisée pour calculer de nombreuses décimales de π

Remarque : $239^2 + 1 = 2 \cdot 13^4$

Utilisée par J. Guilloud et M. Bouyer pour calculer un million de décimales en 1974.

Formule de Machin

En prenant $u = 120/119$ et $v = -1/239$, on obtient la formule de John Machin (1680–1752)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

qui a été souvent utilisée pour calculer de nombreuses décimales de π

Remarque : $239^2 + 1 = 2 \cdot 13^4$

Utilisée par J. Guilloud et M. Bouyer pour calculer un million de décimales en 1974.

Formule de Machin

En prenant $u = 120/119$ et $v = -1/239$, on obtient la formule de John Machin (1680–1752)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

qui a été souvent utilisée pour calculer de nombreuses décimales de π

Remarque : $239^2 + 1 = 2 \cdot 13^4$

Utilisée par J. Guilloud et M. Bouyer pour calculer un million de décimales en 1974.

Srinivasa Ramanujan (1914)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9\,801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

8 décimales exactes
de plus à chaque itération

1985 : W. Gosper,
17 millions de décimales de π

Démonstration : P. et J. Borwein, 1987.

Srinivasa Ramanujan (1914)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9\,801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

8 décimales exactes
de plus à chaque itération

1985 : W. Gosper,
17 millions de décimales de π

Démonstration : P. et J. Borwein, 1987.

Srinivasa Ramanujan (1914)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9\,801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1\,103+26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

8 décimales exactes
de plus à chaque itération

1985 : W. Gosper,
17 millions de décimales de π

Démonstration : P. et J. Borwein, 1987.

Srinivasa Ramanujan (1914)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9\,801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

8 décimales exactes
de plus à chaque itération

1985 : W. Gosper,
17 millions de décimales de π

Démonstration : P. et J. Borwein, 1987.

David and Gregory Chudnovsky (1994)

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(13\,591\,409 + 545\,140\,134n)}{(3n!)(n!)^3 640\,320^{3n+3/2}}$$

14 décimales exactes
de plus à chaque itération

David and Gregory Chudnovsky (1994)

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(13\,591\,409 + 545\,140\,134n)}{(3n!)(n!)^3 640\,320^{3n+3/2}}$$

14 décimales exactes
de plus à chaque itération

Simon Plouffe (1995)

Calcul des chiffres de π en base 2^4

$$\pi = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Simon Plouffe (1995)

Calcul des chiffres de π en base 2^4

$$\pi = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

La quadrature du cercle

Marie Jacob
La quadrature du cercle
Un problème
à la mesure des Lumières
Fayard (2006).

Aryabhata I (476 – 550)

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम् ।
अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ॥

100 plus 4, multiplied by 8, and added to 62,000: this is approximately the measure of the circumference of a circle of diameter 20,000.

This gives:

$$\pi = \frac{circumference}{diameter} = \frac{62832}{20000} = 3.1416,$$

seen to be accurate to four decimal places.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD :
Pourquoi Aryabhaṭa a-t-il donné seulement une valeur approchée, et non pas la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

Irrationalité du nombre π

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD :
Pourquoi Aryabhaṭa a-t-il donné seulement une valeur approchée, et non pas la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD :
Pourquoi Aryabhaṭa a-t-il donné seulement une valeur approchée, et non pas la valeur exacte ? Parce que la valeur exacte ne peut pas être exprimée

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

La quadrature du cercle (antiquité)

Anaxagore de Clazomène 5è Siècle avant JC (cité par Plutarque)

Hippocrates de Chios

Aristophane *Les Oiseaux* Méton cherche à quarrer le cercle

Quadratrice de Dinostrate

La quadrature du cercle (antiquité)

Anaxagore de Clazomène 5è Siècle avant JC (cité par Plutarque)

Hippocrates de Chios

Aristophane *Les Oiseaux* Méton cherche à quarrer le cercle

Quadratrice de Dinostrate

La quadrature du cercle (antiquité)

Anaxagore de Clazomène 5è Siècle avant JC (cité par Plutarque)

Hippocrates de Chios

Aristophane *Les Oiseaux* Méton cherche à quarrer le cercle

Quadratrice de Dinostrate

La quadrature du cercle (antiquité)

Anaxagore de Clazomène 5è Siècle avant JC (cité par Plutarque)

Hippocrates de Chios

Aristophane *Les Oiseaux* Méton cherche à quarrer le cercle

Quadratrice de Dinostrate

La quadrature du cercle (suite et fin)

J. Grégory (1668) : envisage l'impossibilité de la quadrature du cercle

J-H. Lambert (1767), démontre l'irrationalité de π et mentionne le problème de la quadrature du cercle

A.M. Legendre (1794), démontre l'irrationalité de π^2 et conjecture que π n'est pas algébrique

P. Wantzel (1837) : duplication du cube, trisection de l'angle

F. Lindemann (1882), démontre la transcendance de π : solution définitive du problème de la quadrature du cercle.

La quadrature du cercle (suite et fin)

J. Grégory (1668) : envisage l'impossibilité de la quadrature du cercle

J-H. Lambert (1767), démontre l'irrationalité de π et mentionne le problème de la quadrature du cercle

A.M. Legendre (1794), démontre l'irrationalité de π^2 et conjecture que π n'est pas algébrique

P. Wantzel (1837) : duplication du cube, trisection de l'angle

F. Lindemann (1882), démontre la transcendance de π : solution définitive du problème de la quadrature du cercle.

La quadrature du cercle (suite et fin)

J. Grégory (1668) : envisage l'impossibilité de la quadrature du cercle

J-H. Lambert (1767), démontre l'irrationalité de π et mentionne le problème de la quadrature du cercle

A.M. Legendre (1794), démontre l'irrationalité de π^2 et conjecture que π n'est pas algébrique

P. Wantzel (1837) : duplication du cube, trisection de l'angle

F. Lindemann (1882), démontre la transcendance de π : solution définitive du problème de la quadrature du cercle.

La quadrature du cercle (suite et fin)

J. Grégory (1668) : envisage l'impossibilité de la quadrature du cercle

J-H. Lambert (1767), démontre l'irrationalité de π et mentionne le problème de la quadrature du cercle

A.M. Legendre (1794), démontre l'irrationalité de π^2 et conjecture que π n'est pas algébrique

P. Wantzel (1837) : duplication du cube, trisection de l'angle

F. Lindemann (1882), démontre la transcendance de π : solution définitive du problème de la quadrature du cercle.

La quadrature du cercle (suite et fin)

J. Grégory (1668) : envisage l'impossibilité de la quadrature du cercle

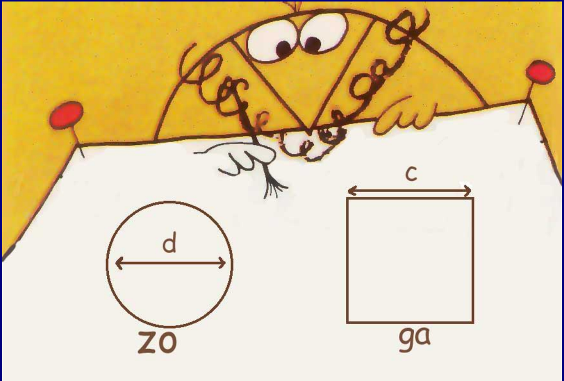
J-H. Lambert (1767), démontre l'irrationalité de π et mentionne le problème de la quadrature du cercle

A.M. Legendre (1794), démontre l'irrationalité de π^2 et conjecture que π n'est pas algébrique

P. Wantzel (1837) : duplication du cube, trisection de l'angle

F. Lindemann (1882), démontre la transcendance de π : solution définitive du problème de la quadrature du cercle.

Quadrature du cercle par les Shadocks



http ://www.chez.com/mathproject/

Irrationalité de π

Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)
Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques,
Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **17** (1761), p. 265-322 ;
read in 1767 ; Math. Werke, t. II.

Frédéric II, Roi de Prusse
et H. Lambert
— Que savez vous, Lambert ?
— Tout, Sire.
— Et de qui le tenez–vous ?
— De moi-même !

Frédéric II, Roi de Prusse
et H. Lambert

— Que savez vous, Lambert ?
— Tout, Sire.
— Et de qui le tenez–vous ?
— De moi-même !

Frédéric II, Roi de Prusse
et H. Lambert
— Que savez vous, Lambert ?
— Tout, Sire.
— Et de qui le tenez–vous ?
— De moi-même !

Frédéric II, Roi de Prusse
et H. Lambert
— Que savez vous, Lambert ?
— Tout, Sire.
— Et de qui le tenez–vous ?
— De moi-même !

Frédéric II, Roi de Prusse
et H. Lambert
— Que savez vous, Lambert ?
— Tout, Sire.
— Et de qui le tenez–vous ?
— De moi-même !

Lambert (1767)

Le nombre $\tan(v)$ est irrationnel pour toute valeur rationnelle de $v \neq 0$

et $\tan(\pi/4) = 1$.

$$\tan(x) = \frac{1}{i}\tanh(ix), \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Développement en fraction continue de $\tan(x)$

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}}}.$$

Lambert (1767)

Le nombre $\tan(v)$ est irrationnel pour toute valeur rationnelle de $v \neq 0$
et $\tan(\pi/4) = 1$.

$$\tan(x) = \frac{1}{i}\tanh(ix), \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\cdot$$

Développement en fraction continue de $\tan(x)$

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}}}\cdot$$

Lambert (1767)

Le nombre $\tan(v)$ est irrationnel pour toute valeur rationnelle de $v \neq 0$
et $\tan(\pi/4) = 1$.

$$\tan(x) = \frac{1}{i}\tanh(ix), \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot$$

Développement en fraction continue de $\tan(x)$

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}}} \cdot$$

Développement en fraction continue de $\tan(x)$

S.A. Shirali – *Continued fraction for e*, Resonance, vol. **5** N°1, Jan. 2000, 14–28.
http ://www.ias.ac.in/resonance/

Introductio in analysin infinitorum

Leonhard Euler (1737)

(1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

Anticipe le 7ème problème de D. Hilbert sur la transcendance de a^b

Fraction continue de e

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Introductio in analysin infinitorum

Leonhard Euler (1737)

(1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

Fraction continue de e

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Anticipe le 7ème problème de D. Hilbert sur la transcendance de a^b

Introductio in analysin infinitorum

Leonhard Euler (1737)

(1707 – 1783)

Introductio in analysin infinitorum

Anticipe le 7ème problème de D. Hilbert sur la transcendance de a^b

Fraction continue de e

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Fonction zêta de Euler et Riemann

La fonction
$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$
a été étudiée par L. Euler (1707– 1783) pour $s \in \mathbf{Z}$ et par B. Riemann (1859) pour $s \in \mathbf{C}$.

Euler : pour toute valeur entière *paire* de $s \geq 2$, le nombre $\zeta(s)$ est un multiple rationnel de π^s.

Exemples : $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, $\zeta(8) = \pi^8/9450 \cdots$

Coefficients : nombres de Bernoulli.

Fonction zêta de Euler et Riemann

La fonction
$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$
a été étudiée par L. Euler (1707– 1783) pour $s \in \mathbf{Z}$ et par B. Riemann (1859) pour $s \in \mathbf{C}$.

Euler : pour toute valeur entière *paire* de $s \geq 2$, le nombre $\zeta(s)$ est un multiple rationnel de π^s.

Exemples : $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, $\zeta(8) = \pi^8/9450 \cdots$

Coefficients : nombres de Bernoulli.

Fonction zêta de Euler et Riemann

La fonction
$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$
a été étudiée par L. Euler (1707– 1783) pour $s \in \mathbf{Z}$ et par B. Riemann (1859) pour $s \in \mathbf{C}$.

Euler : pour toute valeur entière *paire* de $s \geq 2$, le nombre $\zeta(s)$ est un multiple rationnel de π^s.

Exemples : $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, $\zeta(8) = \pi^8/9450 \cdots$

Coefficients : nombres de Bernoulli.

Fonction zêta de Euler et Riemann

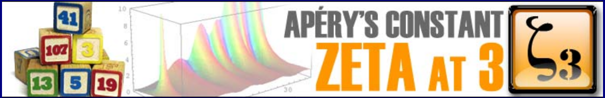
La fonction
$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$
a été étudiée par L. Euler (1707– 1783) pour $s\in\mathbf{Z}$ et par B. Riemann (1859) pour $s\in\mathbf{C}$.

Euler : pour toute valeur entière *paire* de $s\geq 2$, le nombre $\zeta(s)$ est un multiple rationnel de π^s.

Exemples : $\zeta(2)=\pi^2/6$, $\zeta(4)=\pi^4/90$, $\zeta(6)=\pi^6/945$, $\zeta(8)=\pi^8/9450\cdots$

Coefficients : nombres de Bernoulli.

Fonction zêta de Riemann



Le nombre

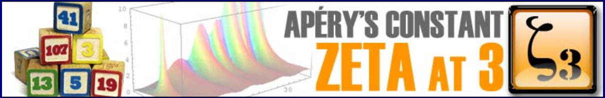
$$\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} = 1,202\,056\,903\,159\,594\,285\,399\,738\,161\,511\ \ldots$$

est irrationnel *(R. Apéry 1978)*.

Rappelons que $\zeta(s)/\pi^s$ est rationnel pour toute valeur paire de $s \geq 2$.

Problème ouvert : Le nombre $\zeta(3)/\pi^3$ est–il rationnel ?

Fonction zêta de Riemann



Le nombre

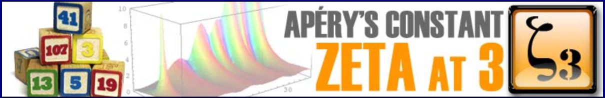
$$\zeta(3) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} = 1,202\,056\,903\,159\,594\,285\,399\,738\,161\,511\ \ldots$$

est irrationnel *(R. Apéry 1978)*.

Rappelons que $\zeta(s)/\pi^s$ est rationnel pour toute valeur paire de $s \geq 2$.

Problème ouvert : Le nombre $\zeta(3)/\pi^3$ est–il rationnel ?

Fonction zêta de Riemann



Le nombre

$$\zeta(3) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} = 1,202\,056\,903\,159\,594\,285\,399\,738\,161\,511\ \ldots$$

est irrationnel *(R. Apéry 1978).*

Rappelons que $\zeta(s)/\pi^s$ est rationnel pour toute valeur paire de $s \geq 2$.

Problème ouvert : Le nombre $\zeta(3)/\pi^3$ est–il rationnel ?

Le nombre

$$\zeta(5) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5} = 1.036\,927\,755\,143\,369\,926\,331\,365\,486\,457\ldots$$

est-il irrationnel ?

Conjecture : *Les nombres*

$$\zeta(2),\ \zeta(3),\ \zeta(5)\ \ldots,\zeta(2n+1)\ \ldots$$

sont algébriquement indépendants :
si $P \in \mathbf{Z}[X_2, X_3, \ldots, X_{2n+1}]$ *est un polynôme non nul, alors*

$$P\big(\zeta(2),\ \zeta(3),\ \zeta(5)\ \ldots,\zeta(2n+1)\big) \neq 0.$$

Le nombre

$$\zeta(5) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5} = 1.036\,927\,755\,143\,369\,926\,331\,365\,486\,457\ldots$$

est-il irrationnel ?

Conjecture : *Les nombres*

$$\zeta(2),\ \zeta(3),\ \zeta(5)\ \ldots, \zeta(2n+1)\ \ldots$$

sont algébriquement indépendants :
si $P \in \mathbf{Z}[X_2, X_3, \ldots, X_{2n+1}]$ *est un polynôme non nul, alors*

$$P\bigl(\zeta(2),\ \zeta(3),\ \zeta(5)\ \ldots, \zeta(2n+1)\bigr) \neq 0.$$

Tanguy Rivoal

- Rivoal (2000) + Ball, Zudilin... *Une infinité de nombres parmi les* $\zeta(2k+1)$ *sont irrationnels + minoration de la dimension du* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel qu'ils engendrent.*

Soit $\epsilon > 0$*. Pour tout entier impair suffisamment grand* a*, la dimension du* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel engendré par les nombres* $1,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \cdots,\zeta(a)$ *est au moins*

$$\frac{1-\epsilon}{1+\log 2}\log a.$$

Tanguy Rivoal

• Rivoal (2000) + Ball, Zudilin… *Une infinité de nombres parmi les* $\zeta(2k+1)$ *sont irrationnels + minoration de la dimension du* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel qu'ils engendrent.*

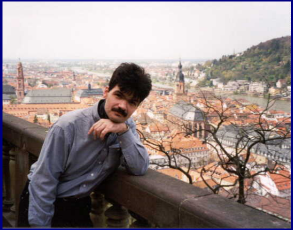
Soit $\epsilon > 0$*. Pour tout entier impair suffisamment grand* a*, la dimension du* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel engendré par les nombres* $1,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \cdots,\zeta(a)$ *est au moins*

$$\frac{1-\epsilon}{1+\log 2}\log a.$$

Wadim Zudilin

- *Un au moins des quatre nombres*
  $$\zeta(5), \quad \zeta(7), \quad \zeta(9), \quad \zeta(11)$$
  est irrationnel.

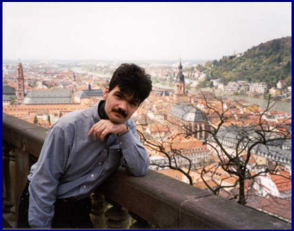
- *Il existe un nombre impair* j *dans l'intervalle* $[5, 69]$ *tel que les trois nombres*
  $$1, \zeta(3), \zeta(j)$$
  soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.



Wadim Zudilin

- *Un au moins des quatre nombres*
  $\zeta(5), \quad \zeta(7), \quad \zeta(9), \quad \zeta(11)$
  est irrationnel.

- *Il existe un nombre impair* j *dans l'intervalle* $[5, 69]$ *tel que les trois nombres*
  $1,\ \zeta(3),\ \zeta(j)$
  soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.



Références

S. Fischler
Irrationalité de valeurs de zêta, (d'après Apéry, Rivoal, ...),
Sém. Nicolas Bourbaki, 2002-2003, N° 910 (Novembre 2002).
http://www.math.u-psud.fr/~fischler/publi.html

C. Krattenthaler and T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann,* Mem. Amer. Math. Soc. **186** (2007), 93 p.
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal/articles.html

Références

S. Fischler
Irrationalité de valeurs de zêta, (d'après Apéry, Rivoal, ...),
Sém. Nicolas Bourbaki, 2002-2003, N° 910 (Novembre 2002).
http://www.math.u-psud.fr/~fischler/publi.html

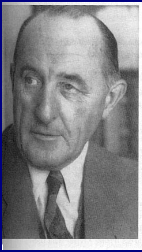
C. Krattenthaler and T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann,* Mem. Amer. Math. Soc. **186** (2007), 93 p.
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal/articles.html

Irrationalité de e^r et π *(Lambert, 1767)*

Charles Hermite (1873)

Carl Ludwig Siegel (1929, 1949)

Yuri Nesterenko (2005)


Irrationalité et approximation rationnelle

Si un nombre réel x est rationnel, alors il est mal approché par des nombres rationnels autres que lui même :

il existe $c > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $p/q \neq x$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q}.$$

Il suffit de prendre $c = 1/b$ quand $x = a/b$:

$$|aq - bp| \geq 1.$$

Un nombre $x \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $p/q \in \mathbf{Q}$ avec

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\epsilon}{q}$$

est donc irrationnel.

Irrationalité et approximation rationnelle

Si un nombre réel x est rationnel, alors il est mal approché par des nombres rationnels autres que lui même :
il existe $c > 0$ *tel que, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec* $p/q \neq x$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q}.$$

Il suffit de prendre $c = 1/b$ quand $x = a/b$:

$$|aq - bp| \geq 1.$$

Un nombre $x \in \mathbf{R}$ *tel que, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\epsilon}{q}$$

est donc irrationnel.

Irrationalité et approximation rationnelle

Si un nombre réel x est rationnel, alors il est mal approché par des nombres rationnels autres que lui même :
il existe $c > 0$ *tel que, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec* $p/q \neq x$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q}.$$

Il suffit de prendre $c = 1/b$ quand $x = a/b$:

$$|aq - bp| \geq 1.$$

Un nombre $x \in \mathbf{R}$ *tel que, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\epsilon}{q}$$

est donc irrationnel.

Irrationalité et approximation rationnelle

Si un nombre réel x est rationnel, alors il est mal approché par des nombres rationnels autres que lui même :
il existe $c > 0$ *tel que, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec* $p/q \neq x$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q}.$$

Il suffit de prendre $c = 1/b$ quand $x = a/b$:

$$|aq - bp| \geq 1.$$

Un nombre $x \in \mathbf{R}$ *tel que, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\epsilon}{q}$$

est donc irrationnel.

Si un nombre réel x est rationnel, alors il est mal approché par des nombres rationnels autres que lui même :
il existe $c > 0$ *tel que, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec* $p/q \neq x$*,*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q}.$$

Il suffit de prendre $c = 1/b$ quand $x = a/b$:

$$|aq - bp| \geq 1.$$

Un nombre $x \in \mathbf{R}$ *tel que, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\epsilon}{q}$$

est donc irrationnel.

Réciproque

Inversement, si $x \in \mathbf{R}$ est irrationnel, alors il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ avec

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Donc x possède de très bonnes approximations rationnelles. Or il suffit d'en trouver d'assez bonnes (ϵ/q) pour montrer qu'un nombre est irrationnel.

Réciproque

Inversement, si $x \in \mathbf{R}$ est irrationnel, alors il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ avec

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Donc x possède de très bonnes approximations rationnelles. Or il suffit d'en trouver d'assez bonnes (ϵ/q) pour montrer qu'un nombre est irrationnel.

Réciproque

Inversement, si $x \in \mathbf{R}$ est irrationnel, alors il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ avec

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Donc x possède de très bonnes approximations rationnelles. Or il suffit d'en trouver d'assez bonnes (ϵ/q) pour montrer qu'un nombre est irrationnel.

Idée d'Hermite (1873)

On veut démontrer l'irrationalité de e^a quand a est un entier positif. On en déduira l'irrationalité de e^r quand r est un nombre rationnel non nul :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad \left(e^{a/b}\right)^b = e^a.$$

L'idée d'Hermite est d'approcher la *fonction* e^z par une fraction rationnelle $A(z)/B(z)$, puis de substituer $z = a$.

Idée d'Hermite (1873)

On veut démontrer l'irrationalité de e^a quand a est un entier positif. On en déduira l'irrationalité de e^r quand r est un nombre rationnel non nul :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad \left(e^{a/b}\right)^b = e^a.$$

L'idée d'Hermite est d'approcher la *fonction* e^z par une fraction rationnelle $A(z)/B(z)$, puis de substituer $z = a$.

Idée d'Hermite (1873)

On veut démontrer l'irrationalité de e^a quand a est un entier positif. On en déduira l'irrationalité de e^r quand r est un nombre rationnel non nul :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad \left(e^{a/b}\right)^b = e^a.$$

L'idée d'Hermite est d'approcher la *fonction* e^z par une fraction rationnelle $A(z)/B(z)$, puis de substituer $z = a$.

Approximation rationnelle d'une fonction

Une fraction rationnelle A/B est une approximation d'une fonction analytique f (au sens d'Hermite, puis de Padé) si les développements de Taylor à l'origine ont les mêmes premiers termes.

Quand $f(0) \neq 0$ cela signifie que $B(z)f(z)$ et $A(z)$ ont le même début de développement de Taylor à l'origine, donc que $B(z)f(z)$ a un grand trou dans son développement de Taylor à l'origine : on prend pour $A(z)$ le début de ce développement.

Approximation rationnelle d'une fonction

Une fraction rationnelle A/B est une approximation d'une fonction analytique f (au sens d'Hermite, puis de Padé) si les développements de Taylor à l'origine ont les mêmes premiers termes.

Quand $f(0) \neq 0$ cela signifie que $B(z)f(z)$ et $A(z)$ ont le même début de développement de Taylor à l'origine, donc que $B(z)f(z)$ a un grand trou dans son développement de Taylor à l'origine : on prend pour $A(z)$ le début de ce développement.

Approximation rationnelle d'une fonction

Une fraction rationnelle A/B est une approximation d'une fonction analytique f (au sens d'Hermite, puis de Padé) si les développements de Taylor à l'origine ont les mêmes premiers termes.

Quand $f(0) \neq 0$ cela signifie que $B(z)f(z)$ et $A(z)$ ont le même début de développement de Taylor à l'origine, donc que $B(z)f(z)$ a un grand trou dans son développement de Taylor à l'origine : on prend pour $A(z)$ le début de ce développement.

Approximation rationnelle d'une fonction

Une fraction rationnelle A/B est une approximation d'une fonction analytique f (au sens d'Hermite, puis de Padé) si les développements de Taylor à l'origine ont les mêmes premiers termes.

Quand $f(0) \neq 0$ cela signifie que $B(z)f(z)$ et $A(z)$ ont le même début de développement de Taylor à l'origine, donc que $B(z)f(z)$ a un grand trou dans son développement de Taylor à l'origine : on prend pour $A(z)$ le début de ce développement.

Irrationalité de e^r et π *(Lambert, 1766)*

But : écrire $B_n(z)e^z = A_n(z) + R_n(z)$ avec A_n et B_n dans $\mathbf{Z}[z]$ et $R_n(a) \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n(a) = 0$.

On spécialise $z = a$, on pose $q = B_n(a)$, $p = A_n(a)$ et on obtient

$$0 < |qe^a - p| < \epsilon.$$

L'irrationalité de e^a en résulte.

Pour $a = 1$ $B_n = 1$ suffit : on tronque la série exponentielle (Ch. Fourier, cours à l'École Polytechnique en 1815 : irrationalité de e).

Pour $a = 2$ aussi : J. Liouville, 1840.

Irrationalité de e^r et π *(Lambert, 1766)*

But : écrire $B_n(z)e^z = A_n(z) + R_n(z)$ avec A_n et B_n dans $\mathbf{Z}[z]$ et $R_n(a) \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n(a) = 0$.

On spécialise $z = a$, on pose $q = B_n(a)$, $p = A_n(a)$ et on obtient

$$0 < |qe^a - p| < \epsilon.$$

L'irrationalité de e^a en résulte.

Pour $a = 1$ $B_n = 1$ suffit : on tronque la série exponentielle (Ch. Fourier, cours à l'École Polytechnique en 1815 : irrationalité de e).

Pour $a = 2$ aussi : J. Liouville, 1840.

Irrationalité de e^r et π *(Lambert, 1766)*

But : écrire $B_n(z)e^z = A_n(z) + R_n(z)$ avec A_n et B_n dans $\mathbf{Z}[z]$ et $R_n(a) \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n(a) = 0$.

On spécialise $z = a$, on pose $q = B_n(a)$, $p = A_n(a)$ et on obtient

$$0 < |qe^a - p| < \epsilon.$$

L'irrationalité de e^a en résulte.

Pour $a = 1$ $B_n = 1$ suffit : on tronque la série exponentielle (Ch. Fourier, cours à l'École Polytechnique en 1815 : irrationalité de e).

Pour $a = 2$ aussi : J. Liouville, 1840.

Irrationalité de e^r et π *(Lambert, 1766)*

But : écrire $B_n(z)e^z = A_n(z) + R_n(z)$ avec A_n et B_n dans $\mathbf{Z}[z]$ et $R_n(a) \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n(a) = 0$.

On spécialise $z = a$, on pose $q = B_n(a)$, $p = A_n(a)$ et on obtient

$$0 < |qe^a - p| < \epsilon.$$

L'irrationalité de e^a en résulte.

Pour $a = 1$ $B_n = 1$ suffit : on tronque la série exponentielle (Ch. Fourier, cours à l'École Polytechnique en 1815 : irrationalité de e).

Pour $a = 2$ aussi : J. Liouville, 1840.

Irrationalité de e^r et π *(Lambert, 1766)*

But : écrire $B_n(z)e^z = A_n(z) + R_n(z)$ avec A_n et B_n dans $\mathbf{Z}[z]$ et $R_n(a) \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n(a) = 0$.

On spécialise $z = a$, on pose $q = B_n(a)$, $p = A_n(a)$ et on obtient

$$0 < |qe^a - p| < \epsilon.$$

L'irrationalité de e^a en résulte.

Pour $a = 1$ $B_n = 1$ suffit : on tronque la série exponentielle (Ch. Fourier, cours à l'École Polytechnique en 1815 : irrationalité de e).

Pour $a = 2$ aussi : J. Liouville, 1840.

Approximations rationnelles de la fonction exp

Étant donnés $n_0 \geq 0$ *et* $n_1 \geq 0$, *trouver* A *et* B *dans* $\mathbf{R}[z]$ *de degrés* $\leq n_0$ *et* $\leq n_1$ *tels que* $R(z) = B(z)e^z - A(z)$ *ait un zéro à l'origine de multiplicité* $\geq N+1$ *avec* $N = n_0 + n_1$.

On utilise cette construction avec $n_0 = n_1 = n$.

Théorème *Il existe une solution, elle est unique avec* B *unitaire. De plus,* B *est dans* $\mathbf{Z}[z]$ *et* $(n_0!/n_1!)A$ *est dans* $\mathbf{Z}[z]$, *le polynôme* A *est de degré exactement* n_0 *et* B *de degré* n_1, *tandis que* R *a un zéro de multiplicité exactement* $N+1$ *à l'origine.*

Étant donnés $n_0 \geq 0$ *et* $n_1 \geq 0$*, trouver* A *et* B *dans* $\mathbf{R}[z]$ *de degrés* $\leq n_0$ *et* $\leq n_1$ *tels que* $R(z) = B(z)e^z - A(z)$ *ait un zéro à l'origine de multiplicité* $\geq N+1$ *avec* $N = n_0 + n_1$.

On utilise cette construction avec $n_0 = n_1 = n$.

Théorème *Il existe une solution, elle est unique avec* B *unitaire. De plus,* B *est dans* $\mathbf{Z}[z]$ *et* $(n_0!/n_1!)A$ *est dans* $\mathbf{Z}[z]$*, le polynôme* A *est de degré exactement* n_0 *et* B *de degré* n_1*, tandis que* R *a un zéro de multiplicité exactement* $N+1$ *à l'origine.*

Approximations rationnelles de la fonction exp

Étant donnés $n_0 \geq 0$ *et* $n_1 \geq 0$, *trouver* A *et* B *dans* $\mathbf{R}[z]$ *de degrés* $\leq n_0$ *et* $\leq n_1$ *tels que* $R(z) = B(z)e^z - A(z)$ *ait un zéro à l'origine de multiplicité* $\geq N+1$ *avec* $N = n_0 + n_1$.

On utilise cette construction avec $n_0 = n_1 = n$.

Théorème *Il existe une solution, elle est unique avec* B *unitaire. De plus,* B *est dans* $\mathbf{Z}[z]$ *et* $(n_0!/n_1!)A$ *est dans* $\mathbf{Z}[z]$, *le polynôme* A *est de degré exactement* n_0 *et* B *de degré* n_1, *tandis que* R *a un zéro de multiplicité exactement* $N+1$ *à l'origine.*

Irrationalité de logarithmes, y compris π

L'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}^\times$, équivaut à l'irrationalité de $\log s$ pour $s \in \mathbf{Q}_{>0}$.

Le même argument donne l'irrationalité de $\log(-1)$, au sens où $\log(-1) = i\pi \notin \mathbf{Q}(i)$.

Donc $\pi \notin \mathbf{Q}$.

Irrationalité de logarithmes, y compris π

L'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}^\times$, équivaut à l'irrationalité de $\log s$ pour $s \in \mathbf{Q}_{>0}$.

Le même argument donne l'irrationalité de $\log(-1)$, au sens où $\log(-1) = i\pi \notin \mathbf{Q}(i)$.

Donc $\pi \notin \mathbf{Q}$.

Irrationalité de logarithmes, y compris π

L'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}^\times$, équivaut à l'irrationalité de $\log s$ pour $s \in \mathbf{Q}_{>0}$.

Le même argument donne l'irrationalité de $\log(-1)$, au sens où $\log(-1) = i\pi \notin \mathbf{Q}(i)$.

Donc $\pi \notin \mathbf{Q}$.

Irrationalité de logarithmes, y compris π

L'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}^\times$, équivaut à l'irrationalité de $\log s$ pour $s \in \mathbf{Q}_{>0}$.

Le même argument donne l'irrationalité de $\log(-1)$, au sens où $\log(-1) = i\pi \notin \mathbf{Q}(i)$.

Donc $\pi \notin \mathbf{Q}$.

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)

Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$q k^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Irrationalité de π^2

Une démonstration courte (J. Niven 1946)
Supposons $\pi^2 = p/q$. Pour n entier suffisamment grand, considérons

$$a_n = \pi \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \sin(\pi x) x^n (1-x)^n dx.$$

Alors $a_n \in \mathbf{Z}$ et $0 < a_n < 1$. Contradiction.

De même pour l'irrationalité de e^k, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ (donc l'irrationalité de e^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq 0$) : si $e^k = p/q$, considérer

$$qk^{2n+1} \int_0^1 e^{kx} x^n (1-x)^n dx.$$

1979, F. Beukers : $\zeta(2) \notin \mathbf{Q}$ (R. Apéry, 1978, $\zeta(3) \notin \mathbf{Q}$).

Approximation simultanée et transcendance

Les démonstrations d'irrationalité font intervenir des approximations rationnelles du nombre considéré.

On veut obtenir des énoncés de transcendance.

Un nombre complexe θ est transcendant si et seulement si

$$1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^m, \ldots$$

sont linéairement $\mathbf{Q}$ indépendants.

Donc le but est de démontrer des résultats d'indépendance linéaire, sur le corps des nombres rationnels, de nombres complexes.

Approximation simultanée et transcendance

Les démonstrations d'irrationalité font intervenir des approximations rationnelles du nombre considéré.

On veut obtenir des énoncés de transcendance.

Un nombre complexe θ est transcendant si et seulement si

$$1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^m, \ldots$$

sont linéairement $\mathbf{Q}$ indépendants.

Donc le but est de démontrer des résultats d'indépendance linéaire, sur le corps des nombres rationnels, de nombres complexes.

Les démonstrations d'irrationalité font intervenir des approximations rationnelles du nombre considéré.

On veut obtenir des énoncés de transcendance.

Un nombre complexe θ est transcendant si et seulement si

$$1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^m, \ldots$$

sont linéairement $\mathbf{Q}$ indépendants.

Donc le but est de démontrer des résultats d'indépendance linéaire, sur le corps des nombres rationnels, de nombres complexes.

Approximation simultanée et transcendance

Les démonstrations d'irrationalité font intervenir des approximations rationnelles du nombre considéré.

On veut obtenir des énoncés de transcendance.

Un nombre complexe θ est transcendant si et seulement si

$$1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^m, \dots$$

sont linéairement $\mathbf{Q}$ indépendants.

Donc le but est de démontrer des résultats d'indépendance linéaire, sur le corps des nombres rationnels, de nombres complexes.

$L = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des nombres réels et a_0, $a_1, \ldots,$ a_m des entiers rationnels qui ne sont pas tous nuls. On veut démontrer que le nombre

$$L = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$$

n'est pas nul. L'idée est d'approcher simultanément les nombres $x_1, \ldots, x_m$ par des nombres rationnels $b_1/b_0, \ldots, b_m/b_0$.
Soient $b_0, b_1, \ldots, b_m$ des entiers rationnels. Pour $1 \leq k \leq m$ posons

$$\epsilon_k = b_0x_k - b_k.$$

Alors $b_0L = A + R$ avec

$$A = a_0b_0 + \cdots + a_mb_m \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad R = a_1\epsilon_1 + \cdots + a_m\epsilon_m \in \mathbf{R}.$$

Si $0 < |R| < 1$, *alors* $L \neq 0$.

$L = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des nombres réels et a_0, $a_1, \ldots$, a_m des entiers rationnels qui ne sont pas tous nuls. On veut démontrer que le nombre

$$L = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$$

n'est pas nul. L'idée est d'approcher simultanément les nombres $x_1, \ldots, x_m$ par des nombres rationnels $b_1/b_0, \ldots, b_m/b_0$.

Soient $b_0, b_1, \ldots, b_m$ des entiers rationnels. Pour $1 \leq k \leq m$ posons

$$\epsilon_k = b_0x_k - b_k.$$

Alors $b_0L = A + R$ avec

$$A = a_0b_0 + \cdots + a_mb_m \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad R = a_1\epsilon_1 + \cdots + a_m\epsilon_m \in \mathbf{R}.$$

Si $0 < |R| < 1$, *alors* $L \neq 0$.

$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des nombres réels et a_0, $a_1, \ldots,$ a_m des entiers rationnels qui ne sont pas tous nuls. On veut démontrer que le nombre

$$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$$

n'est pas nul. L'idée est d'approcher simultanément les nombres $x_1, \ldots, x_m$ par des nombres rationnels $b_1/b_0, \ldots, b_m/b_0$.

Soient $b_0, b_1, \ldots, b_m$ des entiers rationnels. Pour $1 \le k \le m$ posons

$$\epsilon_k = b_0 x_k - b_k.$$

Alors $b_0 L = A + R$ avec

$$A = a_0 b_0 + \cdots + a_m b_m \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad R = a_1 \epsilon_1 + \cdots + a_m \epsilon_m \in \mathbf{R}.$$

Si $0 < |R| < 1$, *alors* $L \neq 0$.

$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des nombres réels et a_0, $a_1, \ldots,$ a_m des entiers rationnels qui ne sont pas tous nuls. On veut démontrer que le nombre

$$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$$

n'est pas nul. L'idée est d'approcher simultanément les nombres $x_1, \ldots, x_m$ par des nombres rationnels $b_1/b_0, \ldots, b_m/b_0$.
Soient $b_0, b_1, \ldots, b_m$ des entiers rationnels. Pour $1 \le k \le m$ posons

$$\epsilon_k = b_0 x_k - b_k.$$

Alors $b_0 L = A + R$ avec

$A = a_0 b_0 + \cdots + a_m b_m \in \mathbf{Z}$ et $R = a_1 \epsilon_1 + \cdots + a_m \epsilon_m \in \mathbf{R}.$

Si $0 < |R| < 1$, alors $L \neq 0$.

$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des nombres réels et a_0, $a_1, \ldots,$ a_m des entiers rationnels qui ne sont pas tous nuls. On veut démontrer que le nombre

$$L = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$$

n'est pas nul. L'idée est d'approcher simultanément les nombres $x_1, \ldots, x_m$ par des nombres rationnels $b_1/b_0, \ldots, b_m/b_0$.
Soient $b_0, b_1, \ldots, b_m$ des entiers rationnels. Pour $1 \le k \le m$ posons

$$\epsilon_k = b_0 x_k - b_k.$$

Alors $b_0 L = A + R$ avec

$$A = a_0 b_0 + \cdots + a_m b_m \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad R = a_1 \epsilon_1 + \cdots + a_m \epsilon_m \in \mathbf{R}.$$

Si $0 < |R| < 1$*, alors* $L \neq 0$*.*

Approximation simultanée de la fonction exponentielle

L'énoncé d'irrationalité de e^r reposait sur la construction explicite d'approximations rationnelles $A/B \in \mathbf{Q}(x)$ de la fonction exponentielle e^x.

Une des idées d'Hermite est d'introduire des *approximations rationnelles simultanées de la fonction exponentielle*, en analogie avec les résultats récents (à l'époque) sur l'approximation diophantienne de nombres. (Dirichlet notamment).

Approximation simultanée de la fonction exponentielle

L'énoncé d'irrationalité de e^r reposait sur la construction explicite d'approximations rationnelles $A/B \in \mathbf{Q}(x)$ de la fonction exponentielle e^x.

Une des idées d'Hermite est d'introduire des *approximations rationnelles simultanées de la fonction exponentielle*, en analogie avec les résultats récents (à l'époque) sur l'approximation diophantienne de nombres. (Dirichlet notamment).

Approximants de Padé

Henri Eugène Padé (1863 - 1953)
Approximation de
fonctions analytiques
par des fractions rationnelles.

Théorie des séries divergentes
(*L. Euler, E.N. Laguerre,*
1886 : *T.J. Stieltjes Séries semi-convergentes* et
H. Poincaré séries asymptotiques).
S. Ramanujan

Approximants de Padé

Henri Eugène Padé (1863 - 1953)
Approximation de
fonctions analytiques
par des fractions rationnelles.

Théorie des séries divergentes
(*L. Euler, E.N. Laguerre,*
1886 : *T.J. Stieltjes Séries semi-convergentes* et
H. Poincaré séries asymptotiques).
S. Ramanujan

Approximants de Padé

Henri Eugène Padé (1863 - 1953)
Approximation de
fonctions analytiques
par des fractions rationnelles.

Théorie des séries divergentes
(*L. Euler, E.N. Laguerre,*
1886 : *T.J. Stieltjes Séries semi-convergentes* et
H. Poincaré séries asymptotiques).
S. Ramanujan

Henri Eugène Padé (1863 - 1953)
Approximation de
fonctions analytiques
par des fractions rationnelles.

Théorie des séries divergentes
(*L. Euler, E.N. Laguerre,*
1886 : *T.J. Stieltjes Séries semi-convergentes* et
H. Poincaré séries asymptotiques).
S. Ramanujan

Théorèmes de Hermite et Lindemann

Hermite (1873) :
transcendance de e.

Lindemann (1882) :
transcendance de π.

Théorème de Hermite–Lindemann
Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z, e^z est transcendant.

Corollaires : transcendance de $\log \alpha$ et de e^β pour α and β nombres algébriques non nuls avec $\log \alpha \neq 0$.

Théorèmes de Hermite et Lindemann

Hermite (1873) :
transcendance de e.

Lindemann (1882) :
transcendance de π.

Théorème de Hermite–Lindemann
Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z, e^z est transcendant.

Corollaires : transcendance de $\log \alpha$ et de e^β pour α and β nombres algébriques non nuls avec $\log \alpha \neq 0$.

Théorèmes de Hermite et Lindemann

Hermite (1873) :
transcendance de e.

Lindemann (1882) :
transcendance de π.

Théorème de Hermite–Lindemann
Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z, e^z est transcendant.

Corollaires : transcendance de $\log\alpha$ et de e^β pour α and β nombres algébriques non nuls avec $\log\alpha \neq 0$.

Fonctions entières arithmétiques

Une fonction entière arithmétique (ou fonction entière à valeurs entières) est une fonction f, analytique dans $\mathbf{C}$, qui envoie $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$.

Exemple : 2^z *est une fonction entière arithmétique qui n'est pas un polynôme.*

Question : *Existe-t-il de telles fonctions qui croissent moins vite que* 2^z *sans être un polynôme ?*

Pour f fonction entière dans $\mathbf{C}$ et $R > 0$ on pose

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|.$$

Fonctions entières arithmétiques

Une fonction entière arithmétique (ou fonction entière à valeurs entières) est une fonction f, analytique dans $\mathbf{C}$, qui envoie $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$.

Exemple : 2^z *est une fonction entière arithmétique qui n'est pas un polynôme.*

Question : *Existe-t-il de telles fonctions qui croissent moins vite que* 2^z *sans être un polynôme ?*

Pour f fonction entière dans $\mathbf{C}$ et $R > 0$ on pose

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|.$$

Fonctions entières arithmétiques

Une fonction entière arithmétique (ou fonction entière à valeurs entières) est une fonction f, analytique dans $\mathbf{C}$, qui envoie $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$.

Exemple : 2^z *est une fonction entière arithmétique qui n'est pas un polynôme.*

Question : *Existe-t-il de telles fonctions qui croissent moins vite que* 2^z *sans être un polynôme ?*

Pour f fonction entière dans $\mathbf{C}$ et $R > 0$ on pose

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|.$$

Fonctions entières arithmétiques

Une fonction entière arithmétique (ou fonction entière à valeurs entières) est une fonction f, analytique dans $\mathbf{C}$, qui envoie $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$.

Exemple : 2^z *est une fonction entière arithmétique qui n'est pas un polynôme.*

Question : *Existe-t-il de telles fonctions qui croissent moins vite que* 2^z *sans être un polynôme ?*

Pour f fonction entière dans $\mathbf{C}$ et $R > 0$ on pose

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|.$$

Fonctions entières arithmétiques

G. Pólya (1914) :
Si f est une fonction entière qui n'est pas un polynôme et si $f(n) \in \mathbf{Z}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, alors

$$\limsup_{R\to\infty} 2^{-R}|f|_R \geq 1.$$

Développements par G.H. Hardy, G. Pólya, D. Sato, E.G. Straus, A. Selberg, Ch. Pisot, F. Carlson, F. Gross,...

Fonctions entières arithmétiques

G. Pólya (1914) :
Si f est une fonction entière
qui n'est pas un polynôme
et si $f(n) \in \mathbf{Z}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$,
alors

$$\limsup_{R\to\infty} 2^{-R}|f|_R \geq 1.$$

Développements par G.H. Hardy, G. Pólya, D. Sato, E.G. Straus, A. Selberg, Ch. Pisot, F. Carlson, F. Gross,...

G. Pólya développe f en *série d'interpolation de Newton* aux points $0, 1, 2, \ldots$:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z(z-1) + a_3 z(z-1)(z-2) + \cdots$$

Comme $f(n)$ est un entier pour tout $n \geq 0$, les coefficients a_n sont des nombres rationnels dont on peut estimer le dénominateur. Si f ne croît pas trop vite, on montre que ces coefficients sont nuls pour tout n suffisamment grand.

G. Pólya développe f en *série d'interpolation de Newton* aux points $0, 1, 2, \ldots$:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z(z-1) + a_3 z(z-1)(z-2) + \cdots$$

Comme $f(n)$ est un entier pour tout $n \geq 0$, les coefficients a_n sont des nombres rationnels dont on peut estimer le dénominateur. Si f ne croît pas trop vite, on montre que ces coefficients sont nuls pour tout n suffisamment grand.

Fonctions entières à valeurs entières sur $\mathbf{Z}[i]$

A.O. Gel'fond (1929) : étudie la croissance des fonctions entières qui envoient les entiers de Gauss dans eux-mêmes
Série d'interpolation de Newton aux points de $\mathbf{Z}[i]$.

Une fonction entière f qui n'est pas un polynôme et vérifie $f(a+ib) \in \mathbf{Z}[i]$ pour tout $a+ib \in \mathbf{Z}[i]$ satisfait

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log |f|_R \geq \gamma.$$

F. Gramain (1981) : $\gamma = \pi/(2e)$.
C'est optimal *D.W. Masser (1980).*

Fonctions entières à valeurs entières sur $\mathbf{Z}[i]$

A.O. Gel'fond (1929) : étudie la croissance des fonctions entières qui envoient les entiers de Gauss dans eux-mêmes Série d'interpolation de Newton aux points de $\mathbf{Z}[i]$.

Une fonction entière f qui n'est pas un polynôme et vérifie $f(a+ib) \in \mathbf{Z}[i]$ pour tout $a+ib \in \mathbf{Z}[i]$ satisfait

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log |f|_R \geq \gamma.$$

F. Gramain (1981) : $\gamma = \pi/(2e)$.
C'est optimal *D.W. Masser (1980)*.

Fonctions entières à valeurs entières sur $\mathbf{Z}[i]$

A.O. Gel'fond (1929) : étudie la croissance des fonctions entières qui envoient les entiers de Gauss dans eux-mêmes
Série d'interpolation de Newton aux points de $\mathbf{Z}[i]$.

Une fonction entière f qui n'est pas un polynôme et vérifie $f(a+ib) \in \mathbf{Z}[i]$ pour tout $a+ib \in \mathbf{Z}[i]$ satisfait

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log |f|_R \geq \gamma.$$

F. Gramain (1981) : $\gamma = \pi/(2e)$.
C'est optimal *D.W. Masser (1980)*.

Fonctions entières à valeurs entières sur $\mathbf{Z}[i]$

A.O. Gel'fond (1929) : étudie la croissance des fonctions entières qui envoient les entiers de Gauss dans eux-mêmes
Série d'interpolation de Newton aux points de $\mathbf{Z}[i]$.

Une fonction entière f qui n'est pas un polynôme et vérifie $f(a+ib) \in \mathbf{Z}[i]$ pour tout $a+ib \in \mathbf{Z}[i]$ satisfait

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log |f|_R \geq \gamma.$$

F. Gramain (1981) : $\gamma = \pi/(2e)$.
C'est optimal *D.W. Masser (1980).*

Transcendance de $e^\pi = (-1)^{-i} = i^{-2i}$

A.O. Gel'fond (1929).

Si

$$e^\pi = 23,140\,692\,632\,779\,269\,005\,729\,086\,367\ldots$$

était rationnel, la fonction entière $e^{\pi z}$ prendrait des valeurs dans $\mathbf{Q}(i)$ pour tout z dans $\mathbf{Z}[i]$.

Développer $e^{\pi z}$ en série d'interpolation aux entiers de Gauß

Transcendance de $e^\pi = (-1)^{-i} = i^{-2i}$

A.O. Gel'fond (1929).

Si

$$e^\pi = 23,140\,692\,632\,779\,269\,005\,729\,086\,367\,\ldots$$

était rationnel, la fonction entière $e^{\pi z}$ prendrait des valeurs dans $\mathbf{Q}(i)$ pour tout z dans $\mathbf{Z}[i]$.

Développer $e^{\pi z}$ en série d'interpolation aux entiers de Gauß

Transcendance de $e^{\pi} = (-1)^{-i} = i^{-2i}$

A.O. Gel'fond (1929).

Si

$$e^{\pi} = 23,140\,692\,632\,779\,269\,005\,729\,086\,367\ \ldots$$

était rationnel, la fonction entière $e^{\pi z}$ prendrait des valeurs dans $\mathbf{Q}(i)$ pour tout z dans $\mathbf{Z}[i]$.

Développer $e^{\pi z}$ en série d'interpolation aux entiers de Gauß

Septième Problème de Hilbert (1934)

A.O. Gel'fond

Transcendance de α^{β} et de $(\log \alpha_1)/(\log \alpha_2)$ pour α, β, α_1, α_2 algébriques.

Th. Schneider

Exemples : Transcendance de $2^{\sqrt{2}}$ de $e^{\pi} = i^{-2i}$.
rappel : anticipé par Euler (1737).

Septième Problème de Hilbert (1934)

A.O. Gel'fond

Transcendance de α^β *et de* $(\log \alpha_1)/(\log \alpha_2)$ *pour* α, β, α_1, α_2 *algébriques.*

Th. Schneider

Exemples : Transcendance de $2^{\sqrt{2}}$ de $e^\pi = i^{-2i}$.

rappel : anticipé par Euler (1737).

Septième Problème de Hilbert (1934)

A.O. Gel'fond

Transcendance de α^β *et de* $(\log\alpha_1)/(\log\alpha_2)$ *pour* $\alpha,\ \beta,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ *algébriques.*

Th. Schneider

Exemples : Transcendance de $2^{\sqrt{2}}$ de $e^\pi = i^{-2i}$.
rappel : anticipé par Euler (1737).

Du théorème de Gel'fond-Schneider on déduit la transcendance de $e^{\pi\sqrt{d}}$ quand d est un entier > 0.

Exemple :

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743,999\,999\,999\,999\,250\,7\ldots$$

Martin Gardner, 1 Avril 1975.

Corps imaginaires quadratiques ayant comme nombre de classes 1 :

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163.$$

Du théorème de Gel'fond-Schneider on déduit la transcendance de $e^{\pi\sqrt{d}}$ quand d est un entier > 0.

Exemple :

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743,999\,999\,999\,999\,250\,7\ldots$$

Martin Gardner, 1 Avril 1975.

Corps imaginaires quadratiques ayant comme nombre de classes 1 :

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163.$$

Du théorème de Gel'fond-Schneider on déduit la transcendance de $e^{\pi\sqrt{d}}$ quand d est un entier > 0.

Exemple :

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743,999\,999\,999\,999\,250\,7\ldots$$

Martin Gardner, 1 Avril 1975.

Corps imaginaires quadratiques ayant comme nombre de classes 1 :

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163.$$

Du théorème de Gel'fond-Schneider on déduit la transcendance de $e^{\pi\sqrt{d}}$ quand d est un entier > 0.

Exemple :

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743{,}999\,999\,999\,999\,250\,7\ldots$$

Martin Gardner, 1 Avril 1975.

Corps imaginaires quadratiques ayant comme nombre de classes 1 :

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163.$$

Principe des tiroirs de Dirichlet

Gel'fond et Schneider
utilisent une *fonction auxiliaire*,
dont l'existence résulte du
principe des tiroirs de Dirichlet
(Lemme de Thue-Siegel).

Fonctions auxiliaires

Hermite, Lindemann, Weierstraß : fonctions auxiliaires explicites

C.L. Siegel (1929) :
Les formules explicites de Ch. Hermite
peuvent être remplacées
par le principe des tiroirs
(Lemme de Thue–Siegel)
qui montre l'existence
de *fonctions auxiliaires* convenables.

Déterminants d'interpolation

M. Laurent (1991) :

Au lieu d'utiliser le principe des tiroirs pour montrer l'existence de solutions de certains systèmes d'équations homogènes, on peut simplement considérer la matrice d'un tel système et travailler sur des déterminants.

Inégalités de pentes en théorie d'Arakelov

J–B. Bost (1994) :
Faire intervenir des matrices et des déterminants impose le choix de bases.
La théorie d'Arakelov
donne une approche plus intrinsèque
en produisant des
inégalités de pentes
qui évitent le recours à des bases.

Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres, (d'après D. Masser et G. Wüstholz).
Séminaire Nicolas Bourbaki, Vol. 1994/95.

Inégalités de pentes en théorie d'Arakelov

J–B. Bost (1994) :
Faire intervenir des matrices et des déterminants
impose le choix de bases.
La théorie d'Arakelov
donne une approche plus intrinsèque
en produisant des
inégalités de pentes
qui évitent le recours à des bases.

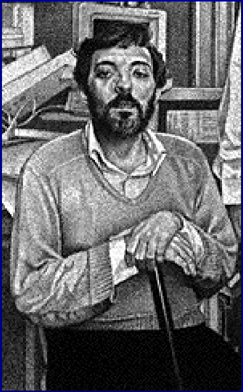
Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres, (d'après D. Masser et G. Wüstholz).
Séminaire Nicolas Bourbaki, Vol. 1994/95.

Fonctions elliptiques

1976, G.V. Chudnovsky :

Les nombres π *et* $\Gamma(1/4)$
sont algébriquement indépendants.

Démonstration :
utilise les fonctions elliptiques.

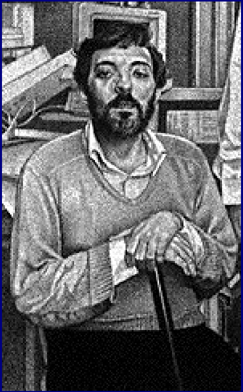


Fonctions elliptiques

1976, G.V. Chudnovsky :

Les nombres π *et* $\Gamma(1/4)$
sont algébriquement indépendants.

Démonstration :
utilise les fonctions elliptiques.



Fonctions modulaires

1996, Yu. V. Nesterenko :

Les trois nombres
π, e^π *et* $\Gamma(1/4)$
sont algébriquement indépendants.

Démonstration :

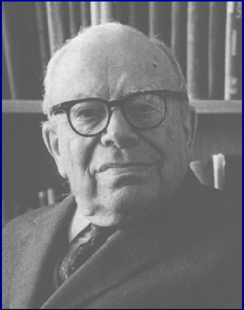
utilise les fonctions modulaires.

Problème ouvert :

Montrer que e *et* π *sont algébriquement indépendants.*

Mesures d'irrationalité de π

1953 : K. Mahler, π *n'est pas un nombre de Liouville*



1967 : K. Mahler
$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}} \quad \text{pour } q \geq 2.$$

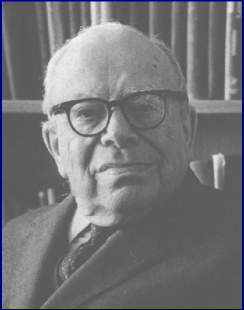
1974 : M. Mignotte
exposant $20,6$ pour $q \geq 2$

1984 : D. et G. Chudnovsky
$14,65$ pour q suffisamment grand.

1992 : M. Hata, meilleure estimation actuellement connue

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{8,0161}}.$$

Mesures d'irrationalité de π



1953 : K. Mahler, π *n'est pas un nombre de Liouville*

1967 : K. Mahler
$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}} \quad \text{pour } q \geq 2.$$

1974 : M. Mignotte
exposant $20,6$ pour $q \geq 2$

1984 : D. et G. Chudnovsky
$14,65$ pour q suffisamment grand.

1992 : M. Hata, meilleure estimation actuellement connue
$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{8,0161}}.$$

Mesures d'irrationalité de π

1953 : K. Mahler, π *n'est pas un nombre de Liouville*

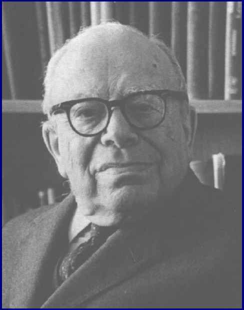
1967 : K. Mahler
$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}} \quad \text{pour } q \geq 2.$$

1974 : M. Mignotte
exposant $20,6$ pour $q \geq 2$

1984 : D. et G. Chudnovsky
$14,65$ pour q suffisamment grand.

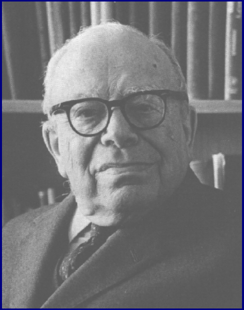
1992 : M. Hata, meilleure estimation actuellement connue

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{8,0161}}.$$



Mesures d'irrationalité de π

1953 : K. Mahler, π *n'est pas un nombre de Liouville*



1967 : K. Mahler

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}} \quad \text{pour } q \geq 2.$$

1974 : M. Mignotte

exposant $20,6$ pour $q \geq 2$

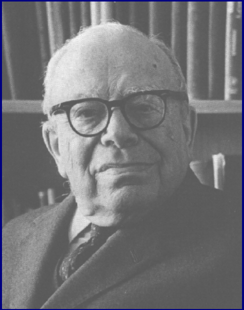
1984 : D. et G. Chudnovsky

$14,65$ pour q suffisamment grand.

1992 : M. Hata, meilleure estimation actuellement connue

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{8,0161}}.$$

Mesures d'irrationalité de π



1953 : K. Mahler, π *n'est pas un nombre de Liouville*

1967 : K. Mahler

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}} \quad \text{pour } q \geq 2.$$

1974 : M. Mignotte

exposant $20,6$ pour $q \geq 2$

1984 : D. et G. Chudnovsky

$14,65$ pour q suffisamment grand.

1992 : M. Hata, meilleure estimation actuellement connue

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{8,0161}}.$$

Mesures d'irrationalité de e^π et $\Gamma(1/4)$

On ne sait pas démontrer que e^π n'est pas un nombre de Liouville :

$$\left| e^\pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{2^{60} \log\log q}} \quad \text{pour } q \geq 3.$$

(méthode de Baker)

1999, P. Philippon et S. Bruiltet : *Le nombre* $\Gamma(1/4)$ *n'est pas un nombre de Liouville*

$$\left| \Gamma(1/4) - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{10^{330}}} \quad \text{pour } q \text{ suffisamment grand.}$$

(méthode de Chudnovsky)

On ne sait pas démontrer que e^π n'est pas un nombre de Liouville :

$$\left| e^\pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{2^{60} \log\log q}} \quad \text{pour } q \geq 3.$$

(méthode de Baker)
1999, P. Philippon et S. Bruiltet : *Le nombre* $\Gamma(1/4)$ *n'est pas un nombre de Liouville*

$$\left| \Gamma(1/4) - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{10^{330}}} \quad \text{pour } q \text{ suffisamment grand.}$$

(méthode de Chudnovsky)

Mesures d'indépendance algébrique de π et $\Gamma(1/4)$

Les énoncés de P. Philippon et S. Bruiltet sont des mesures d'indépendance algébrique de π et $\Gamma(1/4)$.

Pour $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$
de degré d
et de hauteur H,

$$\log |P(\pi, \Gamma(1/4)| > -10^{326}\big((\log H + d\log(d+1)\big)d^2\big(\log(d+1)\big)^2.$$

Les énoncés de P. Philippon et S. Bruiltet sont des mesures d'indépendance algébrique de π et $\Gamma(1/4)$.

Pour $P \in \mathbf{Z}[X,Y]$
de degré d
et de hauteur H,

$$\log|P(\pi,\Gamma(1/4)| > -10^{326}\bigl((\log H + d\log(d+1)\bigr)d^2\bigl(\log(d+1)\bigr)^2.$$

Problèmes ouverts

- e et π sont algébriquement indépendants : *si* $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$ *est un polynôme non nul, alors* $P(e, \pi) \neq 0$.
- e, π et e^π sont algébriquement indépendants.
- π et $\log 2$ sont algébriquement indépendants.
- $\Gamma(1/5)$ est transcendant.
- e^π n'est pas un nombre de Liouville :

$$\left| e^\pi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^C}.$$

Problèmes ouverts

- e et π sont algébriquement indépendants : *si* $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$ *est un polynôme non nul, alors* $P(e, \pi) \neq 0$.
- e, π et e^π sont algébriquement indépendants.
- π et $\log 2$ sont algébriquement indépendants.
- $\Gamma(1/5)$ est transcendant.
- e^π n'est pas un nombre de Liouville :

$$\left| e^\pi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^C}.$$

Problèmes ouverts

- e et π sont algébriquement indépendants : *si* $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$ *est un polynôme non nul, alors* $P(e, \pi) \neq 0$.
- e, π et e^π sont algébriquement indépendants.
- π et $\log 2$ sont algébriquement indépendants.
- $\Gamma(1/5)$ est transcendant.
- e^π n'est pas un nombre de Liouville :

$$\left| e^\pi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^C}.$$

Problèmes ouverts

- e et π sont algébriquement indépendants : *si* $P \in \mathbf{Z}[X,Y]$ *est un polynôme non nul, alors* $P(e,\pi) \neq 0$.

- e, π et e^π sont algébriquement indépendants.

- π et $\log 2$ sont algébriquement indépendants.

- $\Gamma(1/5)$ est transcendant.

- e^π n'est pas un nombre de Liouville :

$$\left| e^\pi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^C}.$$

Problèmes ouverts

- e et π sont algébriquement indépendants : *si* $P \in \mathbf{Z}[X,Y]$ *est un polynôme non nul, alors* $P(e,\pi) \neq 0$.

- e, π et e^π sont algébriquement indépendants.

- π et $\log 2$ sont algébriquement indépendants.

- $\Gamma(1/5)$ est transcendant.

- e^π n'est pas un nombre de Liouville :

$$\left| e^\pi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^C}.$$

Les nombres π et e^π : irrationalité, transcendance, approximation diophantienne

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/∼miw/