Colloquium de l'Université Laval

Québec *Jeudi 24 septembre 2009*

Autour de l'équation de Markoff

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

Résumé

Il est facile de montrer que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, dans laquelle les trois inconnues x, y, z sont des entiers positifs, possède une infinité de solutions. Un algorithme permet de les déterminer toutes. Cela ne résout pas tous les problèmes : en particulier Frobenius a conjecturé que pour tout entier $z > 0$ il existe au plus une solution (x, y, z) satisfaisant $x < y < z$. Cette question fait l'objet de recherches actuelles, elle est encore ouverte.

Résumé (suite et fin)

Cette équation est apparue dans l'étude de minima de formes quadratiques (travaux de Lagrange, Hermite, Korkine, Zolotarev, Markoff, Frobenius, Hurwitz, Cassels notamment) et l'approximation rationnelle de nombres réels. Les solutions correspondent aux nombres quadratiques qui possèdent les moins bonnes approximations rationnelles, ce qui donne lieu au spectre de Lagrange–Markoff. Elle intervient aussi dans l'étude de groupes Fuchsiens et de surfaces de Riemann hyperboliques (Ford, Lehner, Cohn, Rankin, Conway, Coxeter, Hirzebruch et Zagier…).
Nous ferons un petit tour non exhaustif du sujet.

La suite des nombres de Markoff

Un *nombre de Markoff* est un nombre entier positif z tel qu'il existe des entiers positifs x et y satisfaisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Par exemple 1 est un nombre de Markoff, puisque $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ est une solution.

Andrei Andreyevich Markoff (1856–1922)

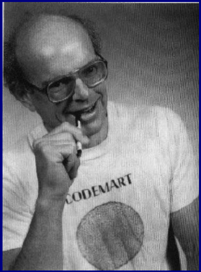
Crédit photos :
http ://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

Encyclopédie des suites

1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1325, 1597, 2897, 4181, 5741, 6466, 7561, 9077, 10946, 14701, 28657, 33461, 37666, 43261, 51641, 62210, 75025, 96557, 135137, 195025, 196418, 294685, ...

On trouve la suite des nombres de Markoff sur la toile
The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Neil J. A. Sloane



http ://www.research.att.com/∼njas/sequences/A002559

Points entiers sur une surface

Étant donné un nombre de Markoff z, il existe une infinité de couples d'entiers positifs x et y satisfaisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

C'est une équation de degré 3 en les 3 variables (x, y, z) dont on connaît une solution $(1, 1, 1)$.

Un algorithme permet de déterminer toutes les solutions entières.

Points entiers sur une surface

Étant donné un nombre de Markoff z, il existe une infinité de couples d'entiers positifs x et y satisfaisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

C'est une équation de degré 3 en les 3 variables (x, y, z) dont on connaît une solution $(1, 1, 1)$.

Un algorithme permet de déterminer toutes les solutions entières.

Points entiers sur une surface

Étant donné un nombre de Markoff z, il existe une infinité de couples d'entiers positifs x et y satisfaisant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

C'est une équation de degré 3 en les 3 variables (x, y, z) dont on connaît une solution $(1, 1, 1)$.

Un algorithme permet de déterminer toutes les solutions entières.

La cubique de Markoff

La surface cubique définie par l'équation de Markoff

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

est une variété algébrique avec beaucoup d'automorphismes : permutation des variables, changements de signes et

$$(x, y, z) \mapsto (3yz - x, y, z).$$

A.A. Markoff (1856–1922)

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ – c'est le *procédé de la corde et de la tangente.*

Ainsi une *autre* solution est (m', m_1, m_2) avec $m' = 3m_1m_2 - m$.

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ – c'est le *procédé de la corde et de la tangente.*

Ainsi une *autre* solution est (m', m_1, m_2) avec $m' = 3m_1m_2 - m$.

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ – c'est le *procédé de la corde et de la tangente.*

Ainsi une *autre* solution est (m', m_1, m_2) avec $m' = 3m_1m_2 - m$.

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ – c'est le *procédé de la corde et de la tangente.*

Ainsi une *autre* solution est (m', m_1, m_2) avec $m' = 3m_1m_2 - m$.

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ – c'est le *procédé de la corde et de la tangente.*

Ainsi une *autre* solution est (m', m_1, m_2) avec $m' = 3m_1m_2 - m$.

Algorithme donnant toutes les solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Fixons deux des coordonnées de cette solution, disons m_1 et m_2. Il reste une équation en la troisième coordonnée m dont on connait une solution, donc l'équation

$$x^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3xm_1m_2.$$

a deux solutions, $x = m$ et $x = m'$, avec $m + m' = 3m_1m_2$ et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ – c'est le *procédé de la corde et de la tangente.*

Ainsi une *autre* solution est (m', m_1, m_2) avec $m' = 3m_1m_2 - m$.

Trois solutions à partir d'une

Partant d'une solution (m, m_1, m_2) on en déduit trois *nouvelles* solutions :

$$(m', m_1, m_2), \quad (m, m_1', m_2), \quad (m, m_1, m_2').$$

Si la solution dont on part est $(1, 1, 1)$, on ne trouve en fait qu'une nouvelle solution, $(2, 1, 1)$ (à permutation près).

Si la solution dont on part est $(2, 1, 1)$, on ne trouve en fait que deux *nouvelles* solutions, $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$ (à permutation près).

Nouvelle = différente de la solution de départ.

Trois solutions à partir d'une

Partant d'une solution (m, m_1, m_2) on en déduit trois *nouvelles* solutions :

$$(m', m_1, m_2), \quad (m, m_1', m_2), \quad (m, m_1, m_2').$$

Si la solution dont on part est $(1, 1, 1)$, on ne trouve en fait qu'une nouvelle solution, $(2, 1, 1)$ (à permutation près).

Si la solution dont on part est $(2, 1, 1)$, on ne trouve en fait que deux *nouvelles* solutions, $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$ (à permutation près).

Nouvelle = différente de la solution de départ.

Trois solutions à partir d'une

Partant d'une solution (m, m_1, m_2) on en déduit trois *nouvelles* solutions :

$$(m', m_1, m_2), \quad (m, m_1', m_2), \quad (m, m_1, m_2').$$

Si la solution dont on part est $(1, 1, 1)$, on ne trouve en fait qu'une nouvelle solution, $(2, 1, 1)$ (à permutation près).

Si la solution dont on part est $(2, 1, 1)$, on ne trouve en fait que deux *nouvelles* solutions, $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$ (à permutation près).

Nouvelle = différente de la solution de départ.

Trois solutions à partir d'une

Partant d'une solution (m, m_1, m_2) on en déduit trois *nouvelles* solutions :

$$(m', m_1, m_2), \quad (m, m_1', m_2), \quad (m, m_1, m_2').$$

Si la solution dont on part est $(1, 1, 1)$, on ne trouve en fait qu'une nouvelle solution, $(2, 1, 1)$ (à permutation près).

Si la solution dont on part est $(2, 1, 1)$, on ne trouve en fait que deux *nouvelles* solutions, $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$ (à permutation près).

Nouvelle = différente de la solution de départ.

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Ainsi $(1,1,1)$ a une voisine qui est $(2,1,1)$,
$(2,1,1)$ a deux voisines $(1,1,1)$ et $(5,2,1)$,
toute autre solution a exactement trois voisines.

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Ainsi $(1, 1, 1)$ a une voisine qui est $(2, 1, 1)$,
$(2, 1, 1)$ a deux voisines $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$,
toute autre solution a exactement trois voisines.

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Ainsi $(1, 1, 1)$ a une voisine qui est $(2, 1, 1)$,
$(2, 1, 1)$ a deux voisines $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$,
toute autre solution a exactement trois voisines.

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Ainsi $(1, 1, 1)$ a une voisine qui est $(2, 1, 1)$,
$(2, 1, 1)$ a deux voisines $(1, 1, 1)$ et $(5, 2, 1)$,
toute autre solution a exactement trois voisines.

Nouvelles solutions

On montrera que toute solution autre que $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$ produit trois nouvelles solutions différentes, et aussi que pour toute solution autre que $(1,1,1)$ et $(2,1,1)$, les trois nombres m, m_1 et m_2 sont distincts.

On dit que deux solutions distinctes sont *voisines* si deux de leurs composantes sont les mêmes.

Ainsi $(1,1,1)$ a une voisine qui est $(2,1,1)$,
$(2,1,1)$ a deux voisines $(1,1,1)$ et $(5,2,1)$,
toute autre solution a exactement trois voisines.

Cet algorithme les produit toutes

Supposons que la solution initiale (m, m_1, m_2) satisfasse $m > m_1 > m_2$. On va vérifier

$$m_2' > m_1' > m > m'.$$

On peut ordonner les solutions par leur plus grande composante. Alors deux des voisins de (m, m_1, m_2) sont plus grands, le troisième est plus petit.

Ainsi quand on part de $(1, 1, 1)$ on produit une infinité de solutions, qu'on dispose en un arbre : *l'arbre de Markoff*.

Cet algorithme les produit toutes

Supposons que la solution initiale (m, m_1, m_2) satisfasse $m > m_1 > m_2$. On va vérifier

$$m_2' > m_1' > m > m'.$$

On peut ordonner les solutions par leur plus grande composante. Alors deux des voisins de (m, m_1, m_2) sont plus grands, le troisième est plus petit.

Ainsi quand on part de $(1, 1, 1)$ on produit une infinité de solutions, qu'on dispose en un arbre : *l'arbre de Markoff*.

Cet algorithme les produit toutes

Supposons que la solution initiale (m, m_1, m_2) satisfasse $m > m_1 > m_2$. On va vérifier

$$m_2' > m_1' > m > m'.$$

On peut ordonner les solutions par leur plus grande composante. Alors deux des voisins de (m, m_1, m_2) sont plus grands, le troisième est plus petit.

Ainsi quand on part de $(1, 1, 1)$ on produit une infinité de solutions, qu'on dispose en un arbre : *l'arbre de Markoff*.

On obtient toutes les solutions

Inversement quand on part d'une solution autre que $(1, 1, 1)$, l'algorithme lui associe une solution plus petite, et par récurrence on trouve une suite de solutions de plus en plus petites qui aboutit sur $(1, 1, 1)$. Donc la solution dont on est partie était dans l'arbre de Markoff.

Premières branches de l’arbre de Markoff

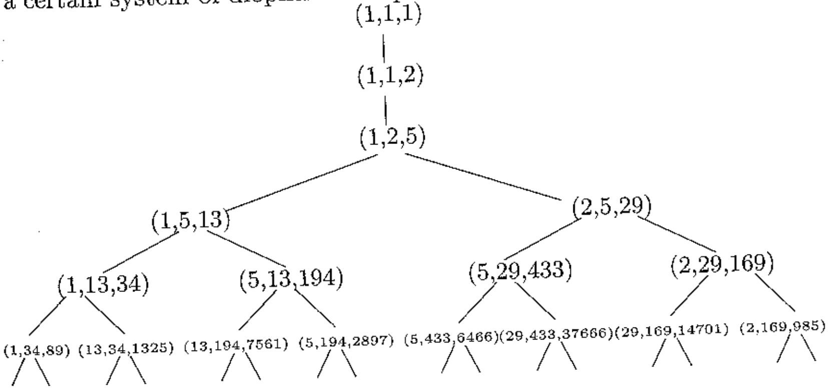
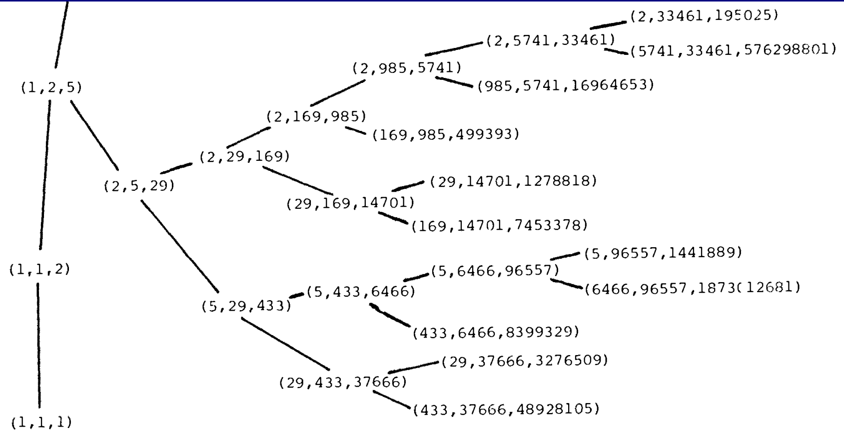


Figure 10. The Tree of Markoff Solutions.

Arbre de Markoff partant de $(2, 5, 29)$



Arbre de Markoff jusqu'à 100 000

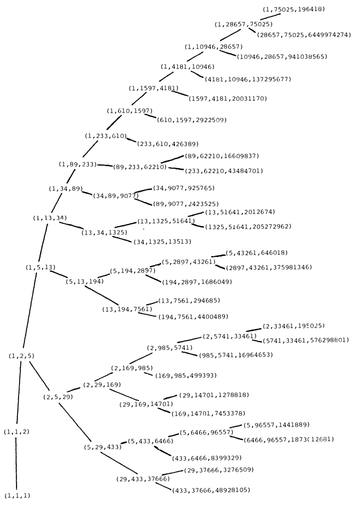


FIGURE 2

Markoff triples (p, q, r) *with* $\max(p, q) \leqslant 100000$

Don Zagier,
On the number of Markoff numbers below a given bound.
Mathematics of Computation, **39** 160 (1982), 709–723.

Fractions continues et arbre de Markoff

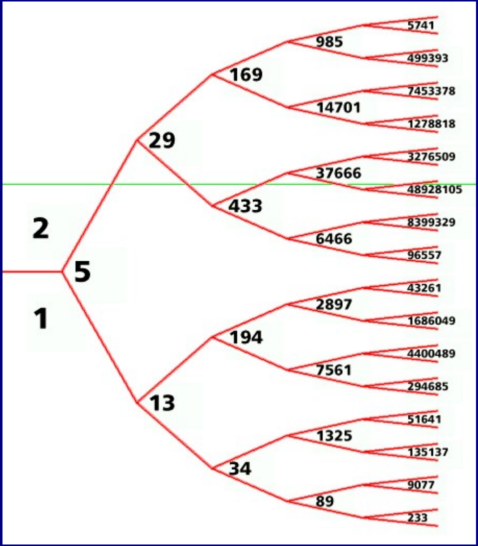
E. Bombieri,

Continued fractions and the Markoff tree,

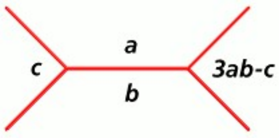
Expo. Math. **25** (2007),

no. 3, 187–213.

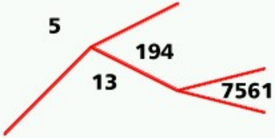
L'arbre de Markoff

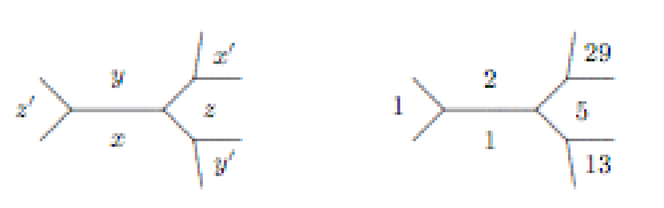


$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$$



$$X^2 - 3abX + a^2 + b^2 = (X - c)(X - 3ab + c)$$





La suite de Fibonacci et l'équation de Markoff

Le plus petit nombre de Markoff est 1. Quand on fixe $z = 1$ dans l'équation de Markoff $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy.$$

En décrivant l'arbre de Markoff à partir de $(1, 1, 1)$, on obtient une sous–suite de la suite de Markoff

$$1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ 233,\ 610,\ 1597, 4181,\ 10946,\ 28657,\ \ldots\ldots$$

qui est la suite des nombres de Fibonacci d'indices impairs

$$F_1 = 1,\ F_3 = 2,\ F_5 = 5,\ F_7 = 13,\ F_9 = 34,\ F_{11} = 89,\ \ldots$$

La suite de Fibonacci et l'équation de Markoff

Le plus petit nombre de Markoff est 1. Quand on fixe $z = 1$ dans l'équation de Markoff $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy.$$

En décrivant l'arbre de Markoff à partir de $(1, 1, 1)$, on obtient une sous–suite de la suite de Markoff

$$1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ 233,\ 610,\ 1597, 4181,\ 10946,\ 28657,\ \ldots\ldots$$

qui est la suite des nombres de Fibonacci d'indices impairs

$$F_1 = 1,\ F_3 = 2,\ F_5 = 5,\ F_7 = 13,\ F_9 = 34,\ F_{11} = 89,\ \ldots$$

La suite de Fibonacci et l'équation de Markoff

Le plus petit nombre de Markoff est 1. Quand on fixe $z = 1$ dans l'équation de Markoff $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy.$$

En décrivant l'arbre de Markoff à partir de $(1, 1, 1)$, on obtient une sous–suite de la suite de Markoff

$$1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ 233,\ 610,\ 1597, 4181,\ 10946,\ 28657,\ \ldots\ldots$$

qui est la suite des nombres de Fibonacci d'indices impairs

$$F_1 = 1,\ F_3 = 2,\ F_5 = 5,\ F_7 = 13,\ F_9 = 34,\ F_{11} = 89,\ \ldots$$

Leonardo Pisano Fibonacci

La suite de Fibonacci
$(F_n)_{n\geq 0}$:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,$$

$$34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233\dots$$

est définie par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

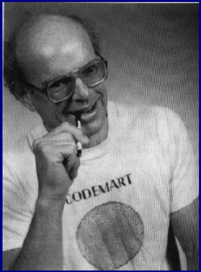
Leonardo Pisano Fibonacci
(1170–1250)

Encyclopédie des suites (suite)

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, . . .

On trouve la suite de Fibonacci sur la toile
The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Neil J. A. Sloane



http ://www.research.att.com/∼njas/sequences/A000045

Nombres de Fibonacci d'indices impairs

Les nombres de Fibonacci d'indices impairs sont des nombres de Markoff :

$$F_{m+3}F_{m-1} - F_{m+1}^2 = (-1)^m \quad \text{pour} \quad m \geq 1$$

et

$$F_{m+3} + F_{m-1} = 3F_{m+1} \quad \text{pour} \quad m \geq 1.$$

Posons $y = F_{m+1}$, $x = F_{m-1}$, $x' = F_{m+3}$. Alors, pour m pair, on a

$$x + x' = 3y, \quad xx' = y^2 + 1$$

et

$$X^2 - 3yX + y^2 + 1 = (X - x)(X - x').$$

Nombres de Fibonacci d'indices impairs

Les nombres de Fibonacci d'indices impairs sont des nombres de Markoff :

$$F_{m+3}F_{m-1} - F_{m+1}^2 = (-1)^m \quad \text{pour} \quad m \geq 1$$

et

$$F_{m+3} + F_{m-1} = 3F_{m+1} \quad \text{pour} \quad m \geq 1.$$

Posons $y = F_{m+1}$, $x = F_{m-1}$, $x' = F_{m+3}$. Alors, pour m pair, on a

$$x + x' = 3y, \quad xx' = y^2 + 1$$

et

$$X^2 - 3yX + y^2 + 1 = (X - x)(X - x').$$

Nombres de Fibonacci d'indices impairs

Les nombres de Fibonacci d'indices impairs sont des nombres de Markoff :

$$F_{m+3}F_{m-1} - F_{m+1}^2 = (-1)^m \quad \text{pour} \quad m \geq 1$$

et

$$F_{m+3} + F_{m-1} = 3F_{m+1} \quad \text{pour} \quad m \geq 1.$$

Posons $y = F_{m+1}$, $x = F_{m-1}$, $x' = F_{m+3}$. Alors, pour m pair, on a

$$x + x' = 3y, \quad xx' = y^2 + 1$$

et

$$X^2 - 3yX + y^2 + 1 = (X - x)(X - x').$$

Ordre des *nouvelles* solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Désignons par m' la seconde racine du polynôme quadratique

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2.$$

Ainsi

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2 = (X - m)(X - m')$$

et

$$m + m' = 3m_1m_2, \quad mm' = m_1^2 + m_2^2.$$

Ordre des *nouvelles* solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Désignons par m' la seconde racine du polynôme quadratique

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2.$$

Ainsi

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2 = (X - m)(X - m')$$

et

$$m + m' = 3m_1m_2, \quad mm' = m_1^2 + m_2^2.$$

Ordre des *nouvelles* solutions

Soit (m, m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Désignons par m' la seconde racine du polynôme quadratique

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2.$$

Ainsi

$$X^2 - 3m_1m_2X + m_1^2 + m_2^2 = (X - m)(X - m')$$

et

$$m + m' = 3m_1m_2, \quad mm' = m_1^2 + m_2^2.$$

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$:
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m - 2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.
Quand $k = 2$ on trouve $m_1 = 1$, $m = 2$.

Considérons désormais une solution autre que $(1, 1, 1)$ ou $(2, 1, 1)$: on a $m_1 \neq m_2$.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:*
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m - 2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.
Quand $k = 2$ on trouve $m_1 = 1$, $m = 2$.

Considérons désormais une solution autre que $(1, 1, 1)$ ou $(2, 1, 1)$: on a $m_1 \neq m_2$.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:* ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m - 2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.
Quand $k = 2$ on trouve $m_1 = 1$, $m = 2$.

Considérons désormais une solution autre que $(1, 1, 1)$ ou $(2, 1, 1)$: on a $m_1 \neq m_2$.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:*
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m - 2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.
Quand $k = 2$ on trouve $m_1 = 1$, $m = 2$.

Considérons désormais une solution autre que $(1, 1, 1)$ ou $(2, 1, 1)$: on a $m_1 \neq m_2$.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$*, alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:*
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m - 2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.
Quand $k = 2$ on trouve $m_1 = 1$, $m = 2$.

Considérons désormais une solution autre que $(1, 1, 1)$ ou $(2, 1, 1)$: on a $m_1 \neq m_2$.

$m_1 \neq m_2$

Montrons que *si* $m_1 = m_2$, *alors* $m_1 = m_2 = 1$ *:*
ceci ne se produit que pour les deux solutions $(1,1,1)$, $(2,1,1)$.

Supposons $m_1 = m_2$. On a

$$m^2 + 2m_1^2 = 3mm_1^2 \quad \text{donc} \quad m^2 = (3m-2)m_1^2.$$

Alors m_1 divise m. Soit $m = km_1$. On a $k^2 = 3km_1 - 2$, donc k divise 2.
Quand $k = 1$ on obtient $m = m_1 = 1$.
Quand $k = 2$ on trouve $m_1 = 1$, $m = 2$.

Considérons désormais une solution autre que $(1,1,1)$ ou $(2,1,1)$: on a $m_1 \neq m_2$.

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Comme $m + m' = 3m_1m_2$, et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ on a

$$\begin{aligned} a &= m_1^2 - m_1(m + m') + mm' \\ &= 2m_1^2 + m_2^2 - 3m_1^2 m_2 \\ &= (2m_1^2 - 2m_1^2 m_2) + (m_2^2 - m_1^2 m_2). \end{aligned}$$

Mais $2m_1^2 < 2m_1^2 m_2$ et $m_2^2 < m_1^2 m_2$, donc $a < 0$.

Autrement dit $\boxed{m_1 \text{ est entre } m \text{ et } m'.}$

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Comme $m + m' = 3m_1m_2$, et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ on a

$$\begin{aligned} a &= m_1^2 - m_1(m + m') + mm' \\ &= 2m_1^2 + m_2^2 - 3m_1^2m_2 \\ &= (2m_1^2 - 2m_1^2m_2) + (m_2^2 - m_1^2m_2). \end{aligned}$$

Mais $2m_1^2 < 2m_1^2m_2$ et $m_2^2 < m_1^2m_2$, donc $a < 0$.

Autrement dit $\boxed{m_1 \text{ est entre } m \text{ et } m'.}$

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Comme $m + m' = 3m_1 m_2$, et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ on a

$$\begin{aligned} a &= m_1^2 - m_1(m + m') + mm' \\ &= 2m_1^2 + m_2^2 - 3m_1^2 m_2 \\ &= (2m_1^2 - 2m_1^2 m_2) + (m_2^2 - m_1^2 m_2). \end{aligned}$$

Mais $2m_1^2 < 2m_1^2 m_2$ et $m_2^2 < m_1^2 m_2$, donc $a < 0$.

Autrement dit $\boxed{m_1 \text{ est entre } m \text{ et } m'.}$

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Comme $m + m' = 3m_1 m_2$, et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ on a

$$\begin{aligned} a &= m_1^2 - m_1(m + m') + mm' \\ &= 2m_1^2 + m_2^2 - 3m_1^2 m_2 \\ &= (2m_1^2 - 2m_1^2 m_2) + (m_2^2 - m_1^2 m_2). \end{aligned}$$

Mais $2m_1^2 < 2m_1^2 m_2$ et $m_2^2 < m_1^2 m_2$, donc $a < 0$.

Autrement dit $\boxed{m_1 \text{ est entre } m \text{ et } m'.}$

Deux plus grandes et une plus petite

Supposons $m_1 > m_2$.
Question : *a-t-on* $m' > m_1$ *ou bien* $m' < m_1$ *?*

Considérons le nombre $a = (m_1 - m)(m_1 - m')$.

Comme $m + m' = 3m_1m_2$, et $mm' = m_1^2 + m_2^2$ on a

$$\begin{aligned} a &= m_1^2 - m_1(m + m') + mm' \\ &= 2m_1^2 + m_2^2 - 3m_1^2m_2 \\ &= (2m_1^2 - 2m_1^2m_2) + (m_2^2 - m_1^2m_2). \end{aligned}$$

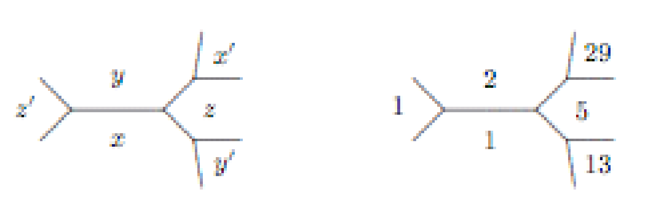
Mais $2m_1^2 < 2m_1^2m_2$ et $m_2^2 < m_1^2m_2$, donc $a < 0$.

Autrement dit $\boxed{m_1 \text{ est entre } m \text{ et } m'.}$

Ordre des solutions

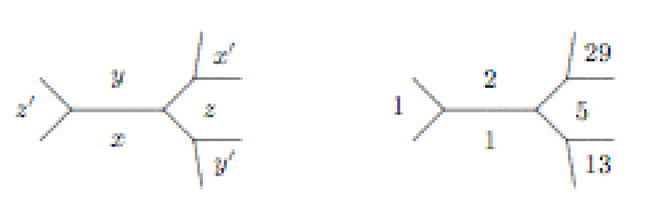
Si $m > m_1$ on a $m_1 > m'$ et la nouvelle solution (m', m_1, m_2) est plus petite que la solution initiale (m, m_1, m_2).

Si $m < m_1$ on a $m_1 < m'$ et la nouvelle solution (m', m_1, m_2) est plus grande que la solution initiale (m, m_1, m_2).



Ordre des solutions

Si $m > m_1$ on a $m_1 > m'$ et la nouvelle solution (m', m_1, m_2) est plus petite que la solution initiale (m, m_1, m_2).
Si $m < m_1$ on a $m_1 < m'$ et la nouvelle solution (m', m_1, m_2) est plus grande que la solution initiale (m, m_1, m_2).



Facteurs premiers

Remarque. Soit m un nombre de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Le même argument montre que le PGCD de m, m_1 et m_2 est 1 : en effet, si p divise m_1, m_2 et m, alors p divise les *nouvelles* solutions produites par le procédé de la corde et de la tangente - en descendant dans l'arbre on trouve que p doit diviser 1.

Les facteurs premiers impairs de m sont tous congrus à 1 modulo 4 (ils divisent une somme de deux carrés premiers entre eux).

Si m est un nombre de Markoff pair, alors les nombres

$$\frac{m}{2}, \quad \frac{3m-2}{4}, \quad \frac{3m+2}{8}$$

sont entiers et impairs.

Facteurs premiers

Remarque. Soit m un nombre de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Le même argument montre que le PGCD de m, m_1 et m_2 est 1 : en effet, si p divise m_1, m_2 et m, alors p divise les *nouvelles* solutions produites par le procédé de la corde et de la tangente - en descendant dans l'arbre on trouve que p doit diviser 1.

Les facteurs premiers impairs de m sont tous congrus à 1 modulo 4 (ils divisent une somme de deux carrés premiers entre eux).

Si m est un nombre de Markoff pair, alors les nombres

$$\frac{m}{2}, \quad \frac{3m-2}{4}, \quad \frac{3m+2}{8}$$

sont entiers et impairs.

Facteurs premiers

Remarque. Soit m un nombre de Markoff :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2.$$

Le même argument montre que le PGCD de m, m_1 et m_2 est 1 : en effet, si p divise m_1, m_2 et m, alors p divise les *nouvelles* solutions produites par le procédé de la corde et de la tangente - en descendant dans l'arbre on trouve que p doit diviser 1.

Les facteurs premiers impairs de m sont tous congrus à 1 modulo 4 (ils divisent une somme de deux carrés premiers entre eux).

Si m est un nombre de Markoff pair, alors les nombres

$$\frac{m}{2}, \quad \frac{3m-2}{4}, \quad \frac{3m+2}{8}$$

sont entiers et impairs.

La conjecture de Markoff

On dispose donc d'un algorithme donnant la suite des nombres de Markoff. Chaque nombre de Markoff apparaît une infinité de fois dans l'arbre comme une des composantes de la solution de l'équation.

Par définition, pour un nombre de Markoff $m > 2$, il existe un couple (m_1, m_2) d'entiers positifs avec $m > m_1 > m_2$ tels que $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$.

Question : *Étant donné* m*, un tel couple* (m_1, m_2) *est-il unique ?*

La réponse est oui tant que $m \leq 10^{105}$.

La conjecture de Markoff

On dispose donc d'un algorithme donnant la suite des nombres de Markoff. Chaque nombre de Markoff apparaît une infinité de fois dans l'arbre comme une des composantes de la solution de l'équation.

Par définition, pour un nombre de Markoff $m > 2$, il existe un couple (m_1, m_2) d'entiers positifs avec $m > m_1 > m_2$ tels que $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$.

Question : *Étant donné m, un tel couple (m_1, m_2) est-il unique ?*

La réponse est oui tant que $m \leq 10^{105}$.

La conjecture de Markoff

On dispose donc d'un algorithme donnant la suite des nombres de Markoff. Chaque nombre de Markoff apparaît une infinité de fois dans l'arbre comme une des composantes de la solution de l'équation.

Par définition, pour un nombre de Markoff $m > 2$, il existe un couple (m_1, m_2) d'entiers positifs avec $m > m_1 > m_2$ tels que $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$.

Question : *Étant donné m, un tel couple (m_1, m_2) est-il unique ?*

La réponse est oui tant que $m \leq 10^{105}$.

La conjecture de Markoff

On dispose donc d'un algorithme donnant la suite des nombres de Markoff. Chaque nombre de Markoff apparaît une infinité de fois dans l'arbre comme une des composantes de la solution de l'équation.

Par définition, pour un nombre de Markoff $m > 2$, il existe un couple (m_1, m_2) d'entiers positifs avec $m > m_1 > m_2$ tels que $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$.

Question : *Étant donné m, un tel couple (m_1, m_2) est-il unique ?*

La réponse est oui tant que $m \leq 10^{105}$.

Travaux de Frobenius

La *conjecture de Markoff* n'apparaît pas dans les travaux de Markoff en 1879 et 1880 mais dans ceux de Frobenius en 1913.

Ferdinand Georg Frobenius
(1849–1917)

Cas particuliers

La conjecture est démontrée pour certains nombres de Markoff m comme
$p^n, \quad (p^n \pm 2)/3$, p premier
A. Baragar (1996),
P. Schmutz (1996),
J.O. Button (1998),
M.L. Lang, S.P. Tan (2005),
Ying Zhang (2007).

Arthur Baragar

http ://www.nevada.edu/ baragar/

Puissance d'un nombre premier

Anitha Srinivasan, 2007
A really simple proof of the Markoff conjecture for prime powers

Number Theory Web
Created and maintained by
Keith Matthews, Brisbane, Australia
www.numbertheory.org/pdfs/simpleproof.pdf

http ://fr.arxiv.org/abs/0709.1499

A triple (a, b, c) *of positive integers is called a Markoff triple iff it satisfies the diophantine equation* $a^2 + b^2 + c^2 = abc$. *Recasting the Markoff tree, whose vertices are Markoff triples, in the framework of integral upper triangular* 3×3 *matrices, it will be shown that the largest member of such a triple determines the other two uniquely. This answers a question which has been open for almost 100 years.*

http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00406601

[v1] Mon, 10 Sep 2007 22 :11 :39 GMT (11kb)
[v2] Thu, 13 Sep 2007 18 :45 :29 GMT (11kb)
[v3] Tue, 4 Dec 2007 17 :43 :40 GMT (15kb)
[v4] Tue, 5 Aug 2008 21 :24 :23 GMT (15kb)
[v5] Thu, 12 Mar 2009 14 :08 :48 GMT (15kb)
[v6] Tue, 28 Jul 2009 18 :49 :17 GMT (15kb)

Commentaires par Serge Perrine (23/07/2009)
Sur la version 2 le 7 novembre 2007, 32 pages
Sur la version 3 le 25 avril 2008, 57 pages
Sur la version 4 le 10 mars 2009, 103 pages

Serge Perrine

http ://www.tessier-ashpool.fr/html/markoff.html

La théorie de Markoff
et ses développements
Tessier et Ashpool, 2002.

Pourquoi le coefficient 3 ?

Soit n un entier positif.
Hurwitz (1907) : *Si l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = nxyz$ a une solution en entiers positifs, alors*
ou bien $n = 3$ et x, y, z sont premiers entre eux,
ou bien $n = 1$ et le PGCD *de des nombres x, y, z est* 3.

Friedrich Hirzebruch & Don Zagier,
The Atiyah–Singer Theorem and elementary number theory,
Publish or Perish (1974)

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ et celles avec $n = 3$:

- si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car $(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

- si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Si un ou deux seulement parmi X, Y, Z est multiple de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ n'est pas multiple de 3.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ et celles avec $n = 3$:

- si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car $(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

- si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Si un ou deux seulement parmi X, Y, Z est multiple de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ n'est pas multiple de 3.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

• si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car
$(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

• si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Si un ou deux seulement parmi X, Y, Z est multiple de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ n'est pas multiple de 3.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ et celles avec $n = 3$:

- si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car
$(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

- si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Si un ou deux seulement parmi X, Y, Z est multiple de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ n'est pas multiple de 3.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

- si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car
$(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

- si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Si un ou deux seulement parmi X, Y, Z est multiple de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ n'est pas multiple de 3.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

• si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car
$(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

• si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Si un ou deux seulement parmi X, Y, Z est multiple de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ n'est pas multiple de 3.

Équations de type Markoff

Bijection entre les solutions de l'équation avec $n = 1$ *et celles avec* $n = 3$ *:*

• si $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, alors $(3x, 3y, 3z)$ est solution de $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, car
$(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = (3x)(3y)(3z)$.

• si $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$, alors X, Y, Z sont multiples de 3, et $(X/3)^2 + (Y/3)^2 + (Z/3)^2 = 3(X/3)(Y/3)(Z/3)$.

Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, si X, Y et Z ne sont pas multiples de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ est multiple de 3.

Si un ou deux seulement parmi X, Y, Z est multiple de 3, alors $X^2 + Y^2 + Z^2$ n'est pas multiple de 3.

Équations $x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$

Si on impose que $(1, 1, 1)$ soit une solution, il n'y a (à permutation près) que deux autres équations diophantiennes du type

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$$

ayant une infinité de solutions entières : ce sont celles avec $(a, b) = (1, 2)$ et $(2, 3)$:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz \quad \text{et} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz.$$

- $x^2 + y^2 + z^2$: pavage du plan par des triangles équilatéraux,
- $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz$: pavage du plan par des triangles isocèles rectangles,
- $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz$: pavage ?

Équations $x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$

Si on impose que $(1, 1, 1)$ soit une solution, il n'y a (à permutation près) que deux autres équations diophantiennes du type

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$$

ayant une infinité de solutions entières : ce sont celles avec $(a, b) = (1, 2)$ et $(2, 3)$:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz \quad \text{et} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz.$$

• $x^2 + y^2 + z^2$: pavage du plan par des triangles équilatéraux,

• $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz$: pavage du plan par des triangles isocèles rectangles,

• $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz$: pavage ?

Équations $x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$

Si on impose que $(1, 1, 1)$ soit une solution, il n'y a (à permutation près) que deux autres équations diophantiennes du type

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$$

ayant une infinité de solutions entières : ce sont celles avec $(a, b) = (1, 2)$ et $(2, 3)$:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz \quad \text{et} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz.$$

• $x^2 + y^2 + z^2$: pavage du plan par des triangles équilatéraux,
• $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz$: pavage du plan par des triangles isocèles rectangles,
• $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz$: pavage ?

Équations $x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$

Si on impose que $(1, 1, 1)$ soit une solution, il n'y a (à permutation près) que deux autres équations diophantiennes du type

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = (1 + a + b)xyz$$

ayant une infinité de solutions entières : ce sont celles avec $(a, b) = (1, 2)$ et $(2, 3)$:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz \quad \text{et} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz.$$

• $x^2 + y^2 + z^2$: pavage du plan par des triangles équilatéraux,
• $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4xyz$: pavage du plan par des triangles isocèles rectangles,
• $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz$: pavage ?

Le phénomène de Laurent

Lien avec les polynômes de Laurent.

James Propp, *The combinatorics of frieze paterns and Markoff numbers,* http ://fr.arxiv.org/abs/math/0511633

Si f, g, h sont des polynômes de Laurent en deux variables x et y, c'est-à-dire des polynômes en x, x^{-1}, y, y^{-1}, en général

$$h\big(f(x,y), g(x,y)\big)$$

n'est pas un polynôme de Laurent :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x},$$

$$f\big(f(x)\big) = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + 1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)}.$$

Le phénomène de Laurent

Lien avec les polynômes de Laurent.

James Propp, *The combinatorics of frieze paterns and Markoff numbers,* http ://fr.arxiv.org/abs/math/0511633

Si f, g, h sont des polynômes de Laurent en deux variables x et y, c'est-à-dire des polynômes en x, x^{-1}, y, y^{-1}, en général

$$h\big(f(x,y), g(x,y)\big)$$

n'est pas un polynôme de Laurent :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x},$$

$$f\big(f(x)\big) = \frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 + 1}{x + \dfrac{1}{x}} = \frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)}.$$

Le phénomène de Laurent

Lien avec les polynômes de Laurent.

James Propp, *The combinatorics of frieze paterns and Markoff numbers,* http ://fr.arxiv.org/abs/math/0511633

Si f, g, h sont des polynômes de Laurent en deux variables x et y, c'est-à-dire des polynômes en x, x^{-1}, y, y^{-1}, en général

$$h\big(f(x,y), g(x,y)\big)$$

n'est pas un polynôme de Laurent :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x},$$

$$f\big(f(x)\big) = \frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1}{x+\dfrac{1}{x}} = \frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)}.$$

Le phénomène de Laurent

Lien avec les polynômes de Laurent.

James Propp, *The combinatorics of frieze paterns and Markoff numbers,* http ://fr.arxiv.org/abs/math/0511633

Si f, g, h sont des polynômes de Laurent en deux variables x et y, c'est-à-dire des polynômes en x, x^{-1}, y, y^{-1}, en général

$$h\big(f(x,y), g(x,y)\big)$$

n'est pas un polynôme de Laurent :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x},$$

$$f\big(f(x)\big) = \frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1}{x+\dfrac{1}{x}} = \frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)}.$$

Équation de Hurwitz (1907)

Pour chaque entier $n \geq 2$, l'ensemble K_n des entiers positifs k pour lesquels l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

a une solution en entiers positifs est fini.

Le plus grand élément k de K_n est n — avec la solution

$$(1, 1, \ldots, 1).$$

Exemples :

$$K_3 = \{1,\ 3\},$$
$$K_4 = \{1,\ 4\},$$
$$K_7 = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}.$$

Équation de Hurwitz (1907)

Pour chaque entier $n \geq 2$, l'ensemble K_n des entiers positifs k pour lesquels l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = k x_1 \cdots x_n$$

a une solution en entiers positifs est fini.

Le plus grand élément k de K_n est n — avec la solution

$$(1, 1, \ldots, 1).$$

Exemples :

$$K_3 = \{1,\ 3\},$$
$$K_4 = \{1,\ 4\},$$
$$K_7 = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}.$$

Équation de Hurwitz (1907)

Pour chaque entier $n \geq 2$, l'ensemble K_n des entiers positifs k pour lesquels l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

a une solution en entiers positifs est fini.

Le plus grand élément k de K_n est n — avec la solution

$$(1, 1, \ldots, 1).$$

Exemples :

$$K_3 = \{1,\ 3\},$$
$$K_4 = \{1,\ 4\},$$
$$K_7 = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}.$$

Équation de Hurwitz (1907)

Pour chaque entier $n \geq 2$, l'ensemble K_n des entiers positifs k pour lesquels l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

a une solution en entiers positifs est fini.

Le plus grand élément k de K_n est n — avec la solution

$$(1, 1, \ldots, 1).$$

Exemples :

$$K_3 = \{1,\ 3\},$$
$$K_4 = \{1,\ 4\},$$
$$K_7 = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}.$$

Équation de Hurwitz

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

Quand il y a une solution en entiers positifs, il y en a une infinité, qui se répartissent en un nombre fini d'arbres.

A. Baragar a montré qu'*il existe de telles équations nécessitant un nombre d'arbres arbitrairement grand*
J. Number Theory (1994), **49** No 1, 27-44.

L'énoncé analogue pour le rang des courbes elliptiques sur le corps des nombres rationnels n'est pas connu.

Équation de Hurwitz

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

Quand il y a une solution en entiers positifs, il y en a une infinité, qui se répartissent en un nombre fini d'arbres.

A. Baragar a montré qu'*il existe de telles équations nécessitant un nombre d'arbres arbitrairement grand*
J. Number Theory (1994), **49** No 1, 27-44.

L'énoncé analogue pour le rang des courbes elliptiques sur le corps des nombres rationnels n'est pas connu.

Équation de Hurwitz

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = kx_1 \cdots x_n$$

Quand il y a une solution en entiers positifs, il y en a une infinité, qui se répartissent en un nombre fini d'arbres.

A. Baragar a montré qu'*il existe de telles équations nécessitant un nombre d'arbres arbitrairement grand*
J. Number Theory (1994), **49** No 1, 27-44.

L'énoncé analogue pour le rang des courbes elliptiques sur le corps des nombres rationnels n'est pas connu.

Croissance de la suite de Markoff

1978 : ordre de grandeur de m, m_1 et m_2 pour $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$ avec $m_1 < m_2 < m$,

$$\log(3m_1) + \log(3m_2) = \log(3m) + o(1).$$

Identifier des mots primitifs dans un groupe libre à deux générateurs

Markoff forms and primitive words

Harvey Cohn

$x \mapsto \log(3x)$: $(m_1, m_2, m) \mapsto (a, b, c)$ avec $a + b \sim c$.

Croissance de la suite de Markoff

1978 : ordre de grandeur de m, m_1 et m_2 pour
$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$
avec $m_1 < m_2 < m$,

$\log(3m_1) + \log(3m_2) = \log(3m) + o(1)$.

Harvey Cohn

Identifier des mots primitifs dans un groupe libre à deux générateurs

Markoff forms and primitive words

$x \mapsto \log(3x) : (m_1, m_2, m) \mapsto (a, b, c)$ avec $a + b \sim c$.

Arbre d'Euclide

On part de $(0,1,1)$. Quand on a un triplet (a,b,c) avec $a+b=c$ et $a \leq b \leq c$, on en déduit deux autres plus grands $(a,c,a+c)$ et $(b,c,b+c)$ et un plus petit $(a,b-a,b)$ ou $(b-a,a,b)$.

$(0,1,1)$

$(1,1,2)$

$(1,2,3)$

$(1,3,4)$ $(2,3,5)$

$(1,4,5)$ $(3,4,7)$ $(2,5,7)$ $(3,5,8)$

$\vdots$

Arbre d'Euclide

On part de $(0, 1, 1)$. Quand on a un triplet (a, b, c) avec $a + b = c$ et $a \leq b \leq c$, on en déduit deux autres plus grands $(a, c, a + c)$ et $(b, c, b + c)$ et un plus petit $(a, b - a, b)$ ou $(b - a, a, b)$.

- $(0, 1, 1)$
  - $(1, 1, 2)$
    - $(1, 2, 3)$
      - $(1, 3, 4)$
        - $(1, 4, 5)$
          - $\vdots$ $\vdots$
        - $(3, 4, 7)$
          - $\vdots$ $\vdots$
      - $(2, 3, 5)$
        - $(2, 5, 7)$
          - $\vdots$ $\vdots$
        - $(3, 5, 8)$
          - $\vdots$ $\vdots$

Arbre d'Euclide

On part de $(0,1,1)$. Quand on a un triplet (a,b,c) avec $a+b=c$ et $a \le b \le c$, on en déduit deux autres plus grands $(a,c,a+c)$ et $(b,c,b+c)$ et un plus petit $(a,b-a,b)$ ou $(b-a,a,b)$.

$$(0,1,1)$$
$$(1,1,2)$$
$$(1,2,3)$$
$$(1,3,4) \qquad (2,3,5)$$
$$(1,4,5) \qquad (3,4,7) \qquad (2,5,7) \qquad (3,5,8)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Arbre de Markoff et arbre d'Euclide

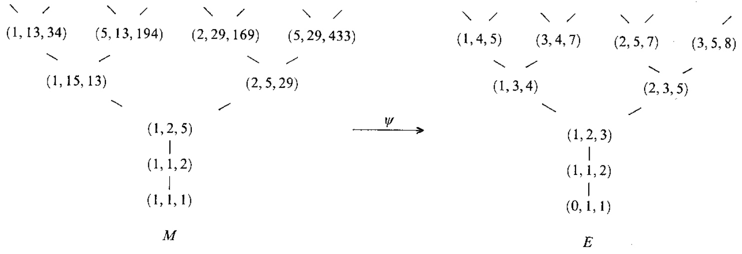


FIGURE 2. THE MARKOFF TREE AND THE EUCLID TREE

Tom Cusik & Mary Flahive,
The Markoff and Lagrange spectra,
Math. Surveys and Monographs **30**, AMS (1989).

Croissance de la suite de Markoff

Don Zagier (1982)
estimation du nombre de triplets de Markoff majorés par x :

$$c(\log x)^2 + O\big(\log x(\log\log x)^2\big),$$

$$c = 0,18071704711507\ldots$$

Conjecture : le n-ième nombre de Markoff m_n vérifie

$$m_n \sim A^{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad A = 10,5101504\cdots$$

Croissance de la suite de Markoff

Don Zagier (1982)
estimation du nombre de triplets de Markoff majorés par x :

$$c(\log x)^2 + O\big(\log x(\log\log x)^2\big),$$

$$c = 0,18071704711507\ldots$$

Conjecture : le n-ième nombre de Markoff m_n vérifie

$$m_n \sim A^{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad A = 10,5101504\cdots$$

Origine historique : approximation rationnelle

Théorème de Hurwitz (1891) : *Pour tout nombre réel irrationnel x, il existe une infinité de p/q tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5} q^2}.$$

Nombre d'Or
$\Phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1,6180339887498948482\ldots$
ce résultat est optimal.

Adolf Hurwitz
(1859–1919)

Énoncé de Hurwitz

Don Zagier,
On the number of Markoff numbers below a given bound.
Mathematics of Computation, **39** 160 (1982), 709–723.

the part of the *Markoff spectrum* (the set of all $\mu(Q)$) lying above $\frac{1}{3}$ is described exactly by the Markoff numbers. An equivalent theorem is that, under the action of $SL_2(\mathbf{Z})$ on $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ given by $x \to (ax+b)/(cx+d)$, the $SL_2(\mathbf{Z})$-equivalence classes of real numbers x for which the approximation measure

$$\mu(x) = \limsup_{q \to \infty} \left(q \cdot \min_{p \in \mathbf{Z}} |\, qx - p \,| \right)$$

is $> \frac{1}{3}$ are in 1 : 1 correspondence with the Markoff triples, the spectrum being the same as above (e.g. $\mu(x) = 5^{-1/2}$ for x equivalent to the golden ratio and $\mu(x) \leqslant 8^{-1/2}$ for all other x). Thus the Markoff numbers are important both in the theory of quadratic forms and in the theory of Diophantine approximation. They have also

M.W., *Open Diophantine Problems,*
Moscow Mathematical Journal 4 N°1, 2004, 245–305.

Énoncé de Hurwitz

Don Zagier,
On the number of Markoff numbers below a given bound.
Mathematics of Computation, **39** 160 (1982), 709–723.

the part of the *Markoff spectrum* (the set of all $\mu(Q)$) lying above $\frac{1}{3}$ is described exactly by the Markoff numbers. An equivalent theorem is that, under the action of $SL_2(\mathbf{Z})$ on $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ given by $x \to (ax+b)/(cx+d)$, the $SL_2(\mathbf{Z})$-equivalence classes of real numbers x for which the approximation measure

$$\mu(x) = \limsup_{q \to \infty} \left(q \cdot \min_{p \in \mathbf{Z}} |qx - p| \right)$$

is $> \frac{1}{3}$ are in 1 : 1 correspondence with the Markoff triples, the spectrum being the same as above (e.g. $\mu(x) = 5^{-1/2}$ for x equivalent to the golden ratio and $\mu(x) \leqslant 8^{-1/2}$ for all other x). Thus the Markoff numbers are important both in the theory of quadratic forms and in the theory of Diophantine approximation. They have also

M.W., *Open Diophantine Problems*,
Moscow Mathematical Journal **4** N°1, 2004, 245–305.

Énoncé de Hurwitz

Pour un nombre réel irrationnel x, la suite $(qx)_{q\geq 1}$ est équirépartie modulo 1, donc

$$\limsup_{q\to\infty}\Big(\min_{p\in\mathbf{Z}}|qx-p|\Big)=\frac{1}{2}\quad\text{pour tout } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.$$

L'énoncé de Hurwitz peut se formuler :

$$\liminf_{q\to\infty} q\min_{p\in\mathbf{Z}}|qx-p|\leq\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\text{pour tout } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

avec égalité pour $x=\Phi=1,6180339887498948482\ldots$ le Nombre d'Or.

Énoncé de Hurwitz

Pour un nombre réel irrationnel x, la suite $(qx)_{q\geq 1}$ est équirépartie modulo 1, donc

$$\limsup_{q\to\infty}\Bigl(\min_{p\in\mathbf{Z}}|qx-p|\Bigr)=\frac{1}{2}\quad \text{pour tout } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.$$

L'énoncé de Hurwitz peut se formuler :

$$\liminf_{q\to\infty} q\min_{p\in\mathbf{Z}}|qx-p|\leq\frac{1}{\sqrt{5}}\quad \text{pour tout } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

avec égalité pour $x=\Phi=1,6180339887498948482\ldots$ le Nombre d'Or.

La suite de Fibonacci et le Nombre d'Or

Formule de A. De Moivre (1730), L. Euler (1765), J.P.M. Binet (1843) :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

La formule de De Moivre – Euler – Binet

Abraham de Moivre (1667–1754)

Leonhard Euler (1707–1783)

Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856)

F_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n$.

Relation quadratique

On vérifie, par récurrence,

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Le membre de gauche est la valeur en (F_{n+1}, F_n) de la forme quadratique

$$X^2 - XY - Y^2 = (X - \Phi Y)(X + \Phi^{-1} Y).$$

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ converge vers le Nombre d'Or Φ et

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}).$$

Relation quadratique

On vérifie, par récurrence,

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Le membre de gauche est la valeur en (F_{n+1}, F_n) de la forme quadratique

$$X^2 - XY - Y^2 = (X - \Phi Y)(X + \Phi^{-1} Y).$$

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ converge vers le Nombre d'Or Φ et

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}).$$

Relation quadratique

On vérifie, par récurrence,

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Le membre de gauche est la valeur en (F_{n+1}, F_n) de la forme quadratique

$$X^2 - XY - Y^2 = (X - \Phi Y)(X + \Phi^{-1} Y).$$

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ converge vers le Nombre d'Or Φ et

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}).$$

La suite u_n des quotients de Fibonacci

Les quotients $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ vérifient

$$F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}) = (-1)^n.$$

On en déduit

$$F_n^2|\Phi - u_n| = \frac{1}{\Phi^{-1} + u_n} \to \frac{1}{\Phi^{-1} + \Phi} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} F_n^2 \left| \Phi - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La suite u_n des quotients de Fibonacci

Les quotients $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ vérifient

$$F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}) = (-1)^n.$$

On en déduit

$$F_n^2|\Phi - u_n| = \frac{1}{\Phi^{-1} + u_n} \to \frac{1}{\Phi^{-1} + \Phi} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} F_n^2 \left| \Phi - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La suite u_n des quotients de Fibonacci

Les quotients $u_n = F_{n+1}/F_n$, $n \geq 1$ vérifient

$$F_n^2(u_n - \Phi)(u_n + \Phi^{-1}) = (-1)^n.$$

On en déduit

$$F_n^2|\Phi - u_n| = \frac{1}{\Phi^{-1} + u_n} \to \frac{1}{\Phi^{-1} + \Phi} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} F_n^2 \left|\Phi - \frac{F_{n+1}}{F_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Fractions continues

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$ est aussi définie par

$$u_1 = 1,\; u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad (n \geq 2).$$

Donc

$$u_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-3}}}} = \cdots$$

$$= 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} \cdots + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}$$

$$= [1, 1, \ldots, 1] \quad n \text{ termes}$$

$$\Phi = [\overline{1}]$$

Fractions continues

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$ est aussi définie par

$$u_1 = 1,\ u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad (n \geq 2).$$

Donc

$$u_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-3}}}} = \cdots$$

$$= 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} \cdots + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}$$

$$= [1, 1, \ldots, 1] \quad n \text{ termes}$$

Fractions continues

La suite $u_n = F_{n+1}/F_n$ est aussi définie par

$$u_1 = 1,\ u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad (n \geq 2).$$

Donc

$$u_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_{n-3}}}} = \cdots$$

$$= 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} \cdots + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}$$

$$= [1, 1, \ldots, 1] \quad n \text{ termes}$$

$$\Phi = [\overline{1}]$$

Le résultat de Hurwitz est optimal

L'énoncé de Hurwitz

$$\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx-p| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

est optimal : il y a égalité dans le cas $x = \Phi$.

Pour $|q\Phi - p| \leq 1$, on a

$$1 \leq |q^2 + pq - p^2| = |q\Phi - p| \cdot (q\Phi^{-1} + p)$$

avec

$$q\Phi^{-1} + p = q(\Phi + \Phi^{-1}) + p - q\Phi \leq q\sqrt{5} + 1,$$

donc

$$1 \leq |q\Phi - p| \cdot (q\sqrt{5} + 1).$$

Noter que $P(X) = X^2 - X - 1$ a pour discriminant 5 et $P'(\Phi) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$.

Le résultat de Hurwitz est optimal

L'énoncé de Hurwitz

$$\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx-p| \le \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

est optimal : il y a égalité dans le cas $x = \Phi$.
Pour $|q\Phi - p| \le 1$, on a

$$1 \le |q^2+pq-p^2| = |q\Phi - p|\cdot(q\Phi^{-1}+p)$$

avec

$$q\Phi^{-1}+p = q(\Phi+\Phi^{-1}) + p - q\Phi \le q\sqrt{5}+1,$$

donc

$$1 \le |q\Phi-p|\cdot(q\sqrt{5}+1).$$

Noter que $P(X) = X^2 - X - 1$ a pour discriminant 5 et $P'(\Phi) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$.

Le résultat de Hurwitz est optimal

L'énoncé de Hurwitz

$$\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx-p| \le \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

est optimal : il y a égalité dans le cas $x=\Phi$.
Pour $|q\Phi - p| \le 1$, on a

$$1 \le |q^2+pq-p^2| = |q\Phi-p|\cdot(q\Phi^{-1}+p)$$

avec

$$q\Phi^{-1}+p = q(\Phi+\Phi^{-1})+p-q\Phi \le q\sqrt{5}+1,$$

donc

$$1 \le |q\Phi-p|\cdot(q\sqrt{5}+1).$$

Noter que $P(X)=X^2-X-1$ a pour discriminant 5 et $P'(\Phi)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$.

Inégalité de Liouville

Inégalité de Liouville. *Soient* α *un nombre algébrique de degré* $d \geq 2$, $P \in \mathbf{Z}[X]$ *son polynôme minimal,* $c = |P'(\alpha)|$ *et* $\epsilon > 0$. *Il existe un entier* q_0 *tel que, pour tout* $p/q \in \mathbf{Q}$ *avec* $q \geq q_0$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{(c+\epsilon)q^d}.$$

Joseph Liouville, 1844

Inégalité de Liouville

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{(c+\epsilon)q^d}, \qquad c = |P'(\alpha)|.$$

Quand α est un nombre réel irrationnel quadratique ($d = 2$) de discriminant $\Delta > 0$, on a $c = \sqrt{\Delta}$.

Remarque : pour un polynôme quadratique irréductible $P(X) = aX^2 + bX + c$ à coefficients entiers de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on a $\Delta \geq 5$.

Inégalité de Liouville

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{(c+\epsilon)q^d}, \qquad c = |P'(\alpha)|.$$

Quand α est un nombre réel irrationnel quadratique $(d = 2)$ de discriminant $\Delta > 0$, on a $c = \sqrt{\Delta}$.

Remarque : pour un polynôme quadratique irréductible $P(X) = aX^2 + bX + c$ à coefficients entiers de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on a $\Delta \geq 5$.

Inégalité de Liouville

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{(c+\epsilon)q^d}, \qquad c = |P'(\alpha)|.$$

Quand α est un nombre réel irrationnel quadratique ($d = 2$) de discriminant $\Delta > 0$, on a $c = \sqrt{\Delta}$.

Remarque : pour un polynôme quadratique irréductible $P(X) = aX^2 + bX + c$ à coefficients entiers de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on a $\Delta \geq 5$.

Démonstration de l'inégalité de Liouville

Soient q un entier suffisamment grand, p l'entier le plus proche de $q\alpha$:

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $a_0 > 0$ le coefficient directeur de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ses racines, avec $\alpha_1 = \alpha$:

$$P(X) = a_0(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_d),$$

$$q^d P(p/q) = a_0 q^d \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{p}{q} - \alpha_i\right),$$

et

$$P'(\alpha) = a_0 \prod_{i=2}^{d} (\alpha - \alpha_i).$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

Soient q un entier suffisamment grand, p l'entier le plus proche de $q\alpha$:

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $a_0 > 0$ le coefficient directeur de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ses racines, avec $\alpha_1 = \alpha$:

$$P(X) = a_0(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_d),$$

$$q^d P(p/q) = a_0 q^d \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{p}{q} - \alpha_i \right),$$

et

$$P'(\alpha) = a_0 \prod_{i=2}^{d} (\alpha - \alpha_i).$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

Soient q un entier suffisamment grand, p l'entier le plus proche de $q\alpha$:

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{2}\cdot$$

Soit $a_0 > 0$ le coefficient directeur de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ses racines, avec $\alpha_1 = \alpha$:

$$P(X) = a_0(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_d),$$

$$q^d P(p/q) = a_0 q^d \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{p}{q} - \alpha_i \right),$$

et

$$P'(\alpha) = a_0 \prod_{i=2}^{d} (\alpha - \alpha_i).$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

On a $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Pour $i \geq 2$ on a

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| \leq |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}.$$

Donc

$$1 \leq q^d a_0 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{d} \left(|\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}\right).$$

Pour q suffisamment grand, on déduit

$$1 \leq q^d \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| (|P'(\alpha)| + \epsilon).$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

On a $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Pour $i \geq 2$ on a

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| \leq |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}\cdot$$

Donc

$$1 \leq q^d a_0 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{d} \left(|\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}\right)\cdot$$

Pour q suffisamment grand, on déduit

$$1 \leq q^d \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| (|P'(\alpha)| + \epsilon).$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

On a $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Pour $i \geq 2$ on a

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| \leq |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}.$$

Donc

$$1 \leq q^d a_0 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{d} \left(|\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}\right).$$

Pour q suffisamment grand, on déduit

$$1 \leq q^d \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| (|P'(\alpha)| + \epsilon).$$

Démonstration de l'inégalité de Liouville

On a $q^d P(p/q) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Pour $i \geq 2$ on a

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| \leq |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}.$$

Donc

$$1 \leq q^d a_0 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{d} \left(|\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}\right).$$

Pour q suffisamment grand, on déduit

$$1 \leq q^d \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| (|P'(\alpha)| + \epsilon).$$

Constante d'approximation

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, notons $\lambda(x) \in [\sqrt{5}, +\infty]$ la borne supérieure des $\lambda > 0$ tels qu'il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ satisfaisant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Autrement dit

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \liminf_{q \to \infty} q \min_{p \in \mathbf{Z}} |qx - p| .$$

Hurwitz : $\lambda(x) \geq \sqrt{5}$ pour tout x et $\lambda(\Phi) = \sqrt{5}$.

Constante d'approximation

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, notons $\lambda(x) \in [\sqrt{5}, +\infty]$ la borne supérieure des $\lambda > 0$ tels qu'il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ satisfaisant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Autrement dit

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \liminf_{q \to \infty} q \min_{p \in \mathbf{Z}} |qx - p| \,.$$

Hurwitz : $\lambda(x) \geq \sqrt{5}$ pour tout x et $\lambda(\Phi) = \sqrt{5}$.

Constante d'approximation

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, notons $\lambda(x) \in [\sqrt{5}, +\infty]$ la borne supérieure des $\lambda > 0$ tels qu'il existe une infinité de $p/q \in \mathbf{Q}$ satisfaisant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Autrement dit

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \liminf_{q \to \infty} q \min_{p \in \mathbf{Z}} |qx - p| \,.$$

Hurwitz : $\lambda(x) \geq \sqrt{5}$ pour tout x et $\lambda(\Phi) = \sqrt{5}$.

Nombres mal approchables

Un nombre réel irrationnel x est *mal approchable* par les nombres rationnels si sa constante d'approximation $\lambda(x)$ est finie : cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Par exemple les nombres de Liouville ont une constante d'approximation infinie.

Un nombre réel irrationnel est mal approchable si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ des quotients partiels de son développement en fractions continues

$$x = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n,\ \ldots]$$

est bornée.

Nombres mal approchables

Un nombre réel irrationnel x est *mal approchable* par les nombres rationnels si sa constante d'approximation $\lambda(x)$ est finie : cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Par exemple les nombres de Liouville ont une constante d'approximation infinie.

Un nombre réel irrationnel est mal approchable si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ des quotients partiels de son développement en fractions continues

$$x = [a_0, \ a_1, \ a_2, \ \dots, a_n, \ \dots]$$

est bornée.

Nombres mal approchables

Un nombre réel irrationnel x est *mal approchable* par les nombres rationnels si sa constante d'approximation $\lambda(x)$ est finie : cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Par exemple les nombres de Liouville ont une constante d'approximation infinie.

Un nombre réel irrationnel est mal approchable si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ des quotients partiels de son développement en fractions continues

$$x = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n,\ \ldots]$$

est bornée.

Nombres mal approchables

Un nombre réel irrationnel x est *mal approchable* par les nombres rationnels si sa constante d'approximation $\lambda(x)$ est finie : cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Par exemple les nombres de Liouville ont une constante d'approximation infinie.

Un nombre réel irrationnel est mal approchable si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ des quotients partiels de son développement en fractions continues

$$x = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n,\ \ldots]$$

est bornée.

Nombres mal approchables

Tout nombre réel quadratique irrationnel a une constante d'approximation finie.

On ignore s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui soient mal approchables.

On ignore aussi s'il n'en existe pas…

On conjecture que *tout nombre réel irrationnel non quadratique mal approchable est transcendant.*

Nombres mal approchables

Tout nombre réel quadratique irrationnel a une constante d'approximation finie.

On ignore s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui soient mal approchables.

On ignore aussi s'il n'en existe pas…

On conjecture que *tout nombre réel irrationnel non quadratique mal approchable est transcendant.*

Nombres mal approchables

Tout nombre réel quadratique irrationnel a une constante d'approximation finie.

On ignore s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui soient mal approchables.

On ignore aussi s'il n'en existe pas…

On conjecture que *tout nombre réel irrationnel non quadratique mal approchable est transcendant.*

Nombres mal approchables

Tout nombre réel quadratique irrationnel a une constante d'approximation finie.

On ignore s'il existe des nombres algébriques réels de degré ≥ 3 qui soient mal approchables.

On ignore aussi s'il n'en existe pas...

On conjecture que *tout nombre réel irrationnel non quadratique mal approchable est transcendant.*

Mesure de Lebesgue

Les nombres mal approchables forment un ensemble de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

Henri Léon Lebesgue
(1875–1941)

Propriétés de la constante d'approximation

On a

$$\lambda(x+1)=\lambda(x) : \qquad \left|x+1-\frac{p}{q}\right| = \left|x-\frac{p+q}{q}\right|$$

et

$$\lambda(-x)=\lambda(x) : \qquad \left|-x-\frac{p}{q}\right| = \left|x+\frac{p}{q}\right|,$$

On a aussi $\lambda(1/x)=\lambda(x)$:

$$p^2\left|\frac{1}{x}-\frac{q}{p}\right| = q^2\left|\frac{p}{qx}\right|\cdot\left|x-\frac{p}{q}\right|.$$

Propriétés de la constante d'approximation

On a

$$\lambda(x+1) = \lambda(x) : \qquad \left| x + 1 - \frac{p}{q} \right| = \left| x - \frac{p+q}{q} \right|$$

et

$$\lambda(-x) = \lambda(x) : \qquad \left| -x - \frac{p}{q} \right| = \left| x + \frac{p}{q} \right|,$$

On a aussi $\lambda(1/x) = \lambda(x)$:

$$p^2 \left| \frac{1}{x} - \frac{q}{p} \right| = q^2 \left| \frac{p}{qx} \right| \cdot \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

Le groupe modulaire

Le groupe multiplicatif engendré par les trois matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est le groupe des matrices 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de déterminant ± 1.

J-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, Coll. SUP, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = x+1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = -x \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \frac{1}{x}$$

$$\lambda(x+1) = \lambda(x) \qquad \lambda(-x) = \lambda(x) \qquad \lambda(1/x) = \lambda(x)$$

Conséquence : *Soit* $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ *et soient* a, b, c, d *des entiers rationnels satisfaisant* $ad - bc = \pm 1$. *On pose*

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Alors $\lambda(x) = \lambda(y)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = x+1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = -x \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \frac{1}{x}$$

$$\lambda(x+1) = \lambda(x) \qquad \lambda(-x) = \lambda(x) \qquad \lambda(1/x) = \lambda(x)$$

Conséquence : *Soit* $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ *et soient* a, b, c, d *des entiers rationnels satisfaisant* $ad - bc = \pm 1$. *On pose*

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Alors $\lambda(x) = \lambda(y)$.

Travaux de Hurwitz (suite)

L'inégalité $\lambda(x) \geq \sqrt{5}$ *pour tout x irrationnel* est optimale pour le Nombre d'Or et pour tous les nombres *nobles* dont le développement en fraction continue termine par une suite infinie de 1, qui sont les racines de polynômes quadratiques de discriminant 5.

$$\Phi = [1, 1, 1, \dots] = [\overline{1}].$$

Adolf Hurwitz, 1891

Le début du spectre

Pour tous les nombres qui ne sont pas associés au Nombre d'Or par une homographie à coefficients entiers de déterminant ± 1, une inégalité plus forte que celle de Hurwitz

$$\lambda(x) \geq \sqrt{5} = 2,236\,067\,977\ldots$$

est valable, à savoir

$$\lambda(x) \geq 2\sqrt{2} = 2,828\,427\,125\ldots$$

C'est optimal pour

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785\ldots$$

dont le développement en fraction continue est

$$[1;\ 2,2,2,\ldots] = [1;\ \overline{2}].$$

Le début du spectre

Pour tous les nombres qui ne sont pas associés au Nombre d'Or par une homographie à coefficients entiers de déterminant ± 1, une inégalité plus forte que celle de Hurwitz

$$\lambda(x) \geq \sqrt{5} = 2,236\,067\,977\ldots$$

est valable, à savoir

$$\lambda(x) \geq 2\sqrt{2} = 2,828\,427\,125\ldots$$

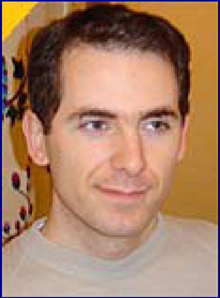
C'est optimal pour

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785\ldots$$

dont le développement en fraction continue est

$$[1;\ 2,2,2,\ldots] = [1;\ \overline{2}].$$

Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$



- Benoît Rittaud, Éditions *Le Pommier* (2006).

http://www.math.univ-paris13.fr/~rittaud/RacineDeDeux

$\lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Comme le discriminant de $X^2 - 2$ est 8, on a $\lambda(\sqrt{2}) \geq 2\sqrt{2}$. Montrons l'égalité.

On pose $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, et par récurrence on définit $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
Pour tout $n \geq 1$, on a

$$G_n^2 - 2G_nG_{n-1} - G_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

La suite $(G_n/G_{n-1})_{n\geq 2}$ converge vers $1 + \sqrt{2}$ quand $n \to \infty$.

Donc il existe une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombre rationnels telle que

$$\lim_{n\to\infty} q_n \left| q_n\sqrt{2} - p_n \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$\lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Comme le discriminant de $X^2 - 2$ est 8, on a $\lambda(\sqrt{2}) \geq 2\sqrt{2}$. Montrons l'égalité.

On pose $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, et par récurrence on définit $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
Pour tout $n \geq 1$, on a

$$G_n^2 - 2G_nG_{n-1} - G_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

La suite $(G_n/G_{n-1})_{n\geq 2}$ converge vers $1+\sqrt{2}$ quand $n \to \infty$.

Donc il existe une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombre rationnels telle que

$$\lim_{n\to\infty} q_n \left| q_n\sqrt{2} - p_n \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$\lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Comme le discriminant de $X^2 - 2$ est 8, on a $\lambda(\sqrt{2}) \geq 2\sqrt{2}$. Montrons l'égalité.

On pose $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, et par récurrence on définit $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
Pour tout $n \geq 1$, on a

$$G_n^2 - 2G_nG_{n-1} - G_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

La suite $(G_n/G_{n-1})_{n\geq 2}$ converge vers $1+\sqrt{2}$ quand $n \to \infty$.

Donc il existe une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombre rationnels telle que

$$\lim_{n\to\infty} q_n \left| q_n\sqrt{2} - p_n \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$\lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

Comme le discriminant de $X^2 - 2$ est 8, on a $\lambda(\sqrt{2}) \geq 2\sqrt{2}$. Montrons l'égalité.

On pose $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, et par récurrence on définit $G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
Pour tout $n \geq 1$, on a

$$G_n^2 - 2G_nG_{n-1} - G_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

La suite $(G_n/G_{n-1})_{n\geq 2}$ converge vers $1 + \sqrt{2}$ quand $n \to \infty$.

Donc il existe une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombre rationnels telle que

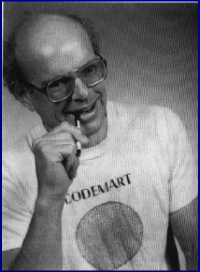
$$\lim_{n\to\infty} q_n \left| q_n\sqrt{2} - p_n \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La suite récurrente linéaire G_n

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, 1136689, 2744210, 6625109, 15994428, 38613965, 93222358, 225058681, 543339720, 1311738121, ...

On trouve la suite G_n sur la toile
The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
Pell numbers :
a(0) = 0, a(1) = 1 ;
for n > 1,
a(n) = 2*a(n-1) + a(n-2).

Neil J. A. Sloane



http ://www.research.att.com/~njas/sequences/A000129

La suite du spectre

Pour tous les nombres x associés au Nombre d'Or par une homographie à coefficients entiers de déterminant 1, on a

$$\lambda(x) = \sqrt{5} = 2,236\ 067\ 977\ldots$$

Pour tous les nombres associés à $\sqrt{2}$, on a

$$\lambda(x) = 2\sqrt{2} = 2,828\ 427\ 125\ldots$$

Pour tous les autres nombres réels irrationnels x, on a

$$\lambda(x) \geq \frac{\sqrt{221}}{5} = 2,973\ 213\ 749\ldots$$

C'est optimal pour les racines du polynôme $5x^2 + 11x - 5$ et leurs associés, dont le développement en fraction continue termine par la période $\overline{2211}$.

La suite du spectre

Pour tous les nombres x associés au Nombre d'Or par une homographie à coefficients entiers de déterminant 1, on a

$$\lambda(x) = \sqrt{5} = 2,236\,067\,977\ldots$$

Pour tous les nombres associés à $\sqrt{2}$, on a

$$\lambda(x) = 2\sqrt{2} = 2,828\,427\,125\ldots$$

Pour tous les autres nombres réels irrationnels x, on a

$$\lambda(x) \geq \frac{\sqrt{221}}{5} = 2,973\,213\,749\ldots$$

C'est optimal pour les racines du polynôme $5x^2 + 11x - 5$ et leurs associés, dont le développement en fraction continue termine par la période $\overline{2211}$.

La suite du spectre

Pour tous les nombres x associés au Nombre d'Or par une homographie à coefficients entiers de déterminant 1, on a

$$\lambda(x) = \sqrt{5} = 2,236\,067\,977\ldots$$

Pour tous les nombres associés à $\sqrt{2}$, on a

$$\lambda(x) = 2\sqrt{2} = 2,828\,427\,125\ldots$$

Pour tous les autres nombres réels irrationnels x, on a

$$\lambda(x) \geq \frac{\sqrt{221}}{5} = 2,973\,213\,749\ldots$$

C'est optimal pour les racines du polynôme $5x^2 + 11x - 5$ et leurs associés, dont le développement en fraction continue termine par la période $\overline{2211}$.

La suite du spectre

Pour tous les nombres x associés au Nombre d'Or par une homographie à coefficients entiers de déterminant 1, on a

$$\lambda(x) = \sqrt{5} = 2,236\ 067\ 977\ldots$$

Pour tous les nombres associés à $\sqrt{2}$, on a

$$\lambda(x) = 2\sqrt{2} = 2,828\ 427\ 125\ldots$$

Pour tous les autres nombres réels irrationnels x, on a

$$\lambda(x) \geq \frac{\sqrt{221}}{5} = 2,973\ 213\ 749\ldots$$

C'est optimal pour les racines du polynôme $5x^2 + 11x - 5$ et leurs associés, dont le développement en fraction continue termine par la période $\overline{2211}$.

La suite du spectre

La suite de nombres commençant par $\lambda_1 = \sqrt{5}$, $\lambda_2 = 2\sqrt{2}$, $\lambda_5 = \sqrt{221}/5, \ldots$ continue avec

$$\lambda_{13} = \frac{\sqrt{1517}}{13}, \ \lambda_{29} = \frac{\sqrt{7565}}{29} \cdots$$

et plus généralement

$$\lambda_m = \sqrt{9 - \frac{4}{m^2}}$$

où m décrit la suite des nombres de Markoff.

Les polynômes quadratiques

La suite de polynômes quadratiques commençant par

$$f_1(x) = x^2 - x - 1,$$

$$f_2(x) = 2x^2 + 4x - 2,$$

$$f_5(x) = 5x^2 + 11x - 5,$$

continue avec

$$f_{13}(x) = 13x^2 + 29x - 13,$$

de discriminant 1517. Ses racines et leurs associés ont un développement en fraction continue qui termine par la période $\overline{221111}$.

Les polynômes quadratiques

La suite de polynômes quadratiques commençant par

$$f_1(x) = x^2 - x - 1,$$

$$f_2(x) = 2x^2 + 4x - 2,$$
$$f_5(x) = 5x^2 + 11x - 5,$$

continue avec

$$f_{13}(x) = 13x^2 + 29x - 13,$$

de discriminant 1517. Ses racines et leurs associés ont un développement en fraction continue qui termine par la période $\overline{221111}$.

Les polynômes quadratiques

Soient m un nombre de Markoff. On pose

$$\Delta_m = 9m^2 - 4\cdot$$

Soit (m_1, m_2) une solution de l'équation de Markoff

$$m_1^2 + m_2^2 + m^2 = 3m_1m_2m, \quad (m_1 \leq m_2 \leq m).$$

Soit $k \in \mathbf{Z}$, $0 < k < m$, tel que $km_1 \equiv m_2 \pmod{m}$.
Comme $m_1^2 + m_2^2 \equiv 0 \pmod{m}$, on a $k^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$
et le nombre

$$\ell = \frac{k^2 + 1}{m}$$

est entier.

Les polynômes quadratiques

Le polynôme

$$f_m(X) = mX^2 + (3m-2k)X + \ell - 3k$$

a pour discriminant $9m^2 - 4 = \Delta_m$.

Soient ξ_m et ξ'_m ses racines. Alors

$$\lambda(\xi_m) = \frac{\sqrt{\Delta_m}}{m^2}.$$

De plus les développements en fraction continue de ξ_m et ξ'_m ne comportent que des 1 et des 2.

Minima de formes quadratiques

Considérons une forme quadratique $f(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ à coefficients réels. Soit $\Delta(f)$ son discriminant $b^2 - 4ac$.

On s'intéresse au minimum $m(f)$ de $|f(x,y)|$ sur $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On suppose donc $\Delta(f) \neq 0$ et on pose

$$C(f) = m(f)/\sqrt{|\Delta(f)|}.$$

Soient α et α' les racines de $f(X,1)$:

$$f(X,Y) = a(X-\alpha Y)(X-\alpha' Y),$$

$$\{\alpha,\alpha'\} = \frac{1}{2a}\left\{-b \pm \sqrt{\Delta(f)}\right\}.$$

Minima de formes quadratiques

Considérons une forme quadratique $f(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ à coefficients réels. Soit $\Delta(f)$ son discriminant $b^2 - 4ac$.

On s'intéresse au minimum $m(f)$ de $|f(x, y)|$ sur $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On suppose donc $\Delta(f) \neq 0$ et on pose

$$C(f) = m(f)/\sqrt{|\Delta(f)|}.$$

Soient α et α' les racines de $f(X, 1)$:

$$f(X, Y) = a(X - \alpha Y)(X - \alpha' Y),$$

$$\{\alpha, \alpha'\} = \frac{1}{2a}\left\{-b \pm \sqrt{\Delta(f)}\right\}.$$

Minima de formes quadratiques

Considérons une forme quadratique $f(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ à coefficients réels. Soit $\Delta(f)$ son discriminant $b^2 - 4ac$.

On s'intéresse au minimum $m(f)$ de $|f(x,y)|$ sur $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On suppose donc $\Delta(f) \neq 0$ et on pose

$$C(f) = m(f)/\sqrt{|\Delta(f)|}.$$

Soient α et α' les racines de $f(X,1)$:

$$f(X,Y) = a(X-\alpha Y)(X-\alpha' Y),$$

$$\{\alpha,\alpha'\} = \frac{1}{2a}\left\{-b \pm \sqrt{\Delta(f)}\right\}.$$

Exemple avec $\Delta < 0$

La forme quadratique

$$f(X,Y) = X^2 + XY + Y^2$$

a pour discriminant $\Delta(f) = -3$ et minimum $m(f) = 1$, donc

$$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{|\Delta(f)|}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour $\Delta < 0$, la forme quadratique

$$f(X,Y) = \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}(X^2 + XY + Y^2)$$

a pour discriminant Δ et minimum $\sqrt{|\Delta|/3}$. De nouveau

$$C(f) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exemple avec $\Delta < 0$

La forme quadratique

$$f(X,Y) = X^2 + XY + Y^2$$

a pour discriminant $\Delta(f) = -3$ et minimum $m(f) = 1$, donc

$$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{|\Delta(f)|}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour $\Delta < 0$, la forme quadratique

$$f(X,Y) = \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}(X^2 + XY + Y^2)$$

a pour discriminant Δ et minimum $\sqrt{|\Delta|/3}$. De nouveau

$$C(f) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

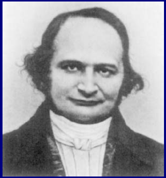
Formes quadratiques définies ($\Delta < 0$)

Si le discriminant est négatif, J.L. Lagrange et Ch. Hermite (lettre à Jacobi, 6 Août 1845) ont montré que $C(f) \le 1/\sqrt{3}$ avec égalité pour $f(X,Y) = X^2 + XY + Y^2$. Pour chaque $\varrho \in (0, 1/\sqrt{3}]$, il existe une telle forme f avec $C(f) = \varrho$.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Charles Hermite (1822–1901)

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)



Exemple avec $\Delta > 0$

La forme quadratique

$$f(X,Y) = X^2 - XY - Y^2$$

a pour discriminant $\Delta(f) = 5$ et minimum $m(f) = 1$, donc

$$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{\Delta(f)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Pour $\Delta > 0$, la forme quadratique

$$f(X,Y) = \sqrt{\frac{\Delta}{5}}(X^2 - XY - Y^2)$$

a pour discriminant Δ et minimum $\sqrt{\Delta/5}$. De nouveau

$$C(f) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Exemple avec $\Delta > 0$

La forme quadratique

$$f(X,Y) = X^2 - XY - Y^2$$

a pour discriminant $\Delta(f) = 5$ et minimum $m(f) = 1$, donc

$$C(f) = \frac{m(f)}{\sqrt{\Delta(f)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Pour $\Delta > 0$, la forme quadratique

$$f(X,Y) = \sqrt{\frac{\Delta}{5}}(X^2 - XY - Y^2)$$

a pour discriminant Δ et minimum $\sqrt{\Delta/5}$. De nouveau

$$C(f) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Supposons $\Delta > 0$

A. Korkine et E.I. Zolotarev ont montré en 1873 $C(f) \le 1/\sqrt{5}$ avec égalité pour $f_0(X, Y) = X^2 - XY - Y^2$.
Pour toutes les formes qui ne sont pas équivalentes à f_0 sous $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$ ils montrent $C(f) \le 1/\sqrt{8}$.
$1/\sqrt{5} = 0,447\,213\,595\ldots$
$1/\sqrt{8} = 0,353\,553\,391\ldots$

Trou !

Egor Ivanovich Zolotarev (1847–1878)

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$).

Les travaux de Korkine et Zolotarev ont incité A.A. Markoff à étudier la question. Il décrit une infinité de valeurs de $C(f_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, entre $1/\sqrt{5}$ et $1/3$, possédant la même propriété que f_0. Ces valeurs convergent vers $1/3$. Il les construit grâce à l'arbre des solutions de l'équation de Markoff.

A. Markoff, 1879 et 1880.

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Soit f une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$.

Si $|f(x,y)|$ est petit avec $y \neq 0$, alors x/y est proche d'une racine de $f(X,1)$, disons de α.

Par conséquent

$$|x - y\alpha'| \sim |y| \cdot |\alpha - \alpha'|$$

et $\alpha - \alpha' = \sqrt{\Delta}/a$.

Donc

$$|f(x,y)| = |a(x - \alpha y)(x - \alpha' y)| \sim \sqrt{|\Delta|}\left|\alpha - \frac{x}{y}\right|.$$

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Soit f une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$.

Si $|f(x,y)|$ est petit avec $y \neq 0$, alors x/y est proche d'une racine de $f(X,1)$, disons de α.

Par conséquent

$$|x - y\alpha'| \sim |y| \cdot |\alpha - \alpha'|$$

et $\alpha - \alpha' = \sqrt{\Delta}/a$.

Donc

$$|f(x,y)| = |a(x - \alpha y)(x - \alpha' y)| \sim \sqrt{|\Delta|}\left|\alpha - \frac{x}{y}\right|.$$

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Soit f une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$.

Si $|f(x,y)|$ est petit avec $y \neq 0$, alors x/y est proche d'une racine de $f(X,1)$, disons de α.

Par conséquent

$$|x - y\alpha'| \sim |y| \cdot |\alpha - \alpha'|$$

et $\alpha - \alpha' = \sqrt{\Delta}/a$.

Donc

$$|f(x,y)| = |a(x-\alpha y)(x-\alpha' y)| \sim \sqrt{|\Delta|}\left|\alpha - \frac{x}{y}\right|.$$

Formes quadratiques indéfinies ($\Delta > 0$)

Soit f une forme quadratique de discriminant $\Delta > 0$.

Si $|f(x,y)|$ est petit avec $y \neq 0$, alors x/y est proche d'une racine de $f(X,1)$, disons de α.

Par conséquent

$$|x - y\alpha'| \sim |y| \cdot |\alpha - \alpha'|$$

et $\alpha - \alpha' = \sqrt{\Delta}/a$.

Donc

$$|f(x,y)| = |a(x - \alpha y)(x - \alpha' y)| \sim \sqrt{|\Delta|}\left|\alpha - \frac{x}{y}\right|.$$

Spectre de Lagrange et spectre de Markoff

Spectre de Markoff = valeurs atteintes par

$$\frac{1}{C(f)} = \sqrt{\Delta(f)}/m(f)$$

quand f décrit les formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + c$ à coefficients réels de discriminant $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ et $m(f) = \inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |f(x,y)|$.

Spectre de Lagrange = valeurs atteintes par la constante d'approximation

$$\lambda(x) = 1/\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx - p|$$

quand x décrit les nombres réels.

Le spectre de Markoff contient le spectre de Lagrange.

Les intersections des deux spectres avec l'intervalle $[\sqrt{5}, 3)$ coïncident et forment une *suite discrète*.

Spectre de Lagrange et spectre de Markoff

Spectre de Markoff = valeurs atteintes par

$$\frac{1}{C(f)} = \sqrt{\Delta(f)}/m(f)$$

quand f décrit les formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + c$ à coefficients réels de discriminant $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ et $m(f) = \inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |f(x,y)|$.

Spectre de Lagrange = valeurs atteintes par la constante d'approximation

$$\lambda(x) = 1/\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx - p|$$

quand x décrit les nombres réels.

Le spectre de Markoff contient le spectre de Lagrange.

Les intersections des deux spectres avec l'intervalle $[\sqrt{5}, 3)$ coïncident et forment une *suite discrète*.

Spectre de Lagrange et spectre de Markoff

Spectre de Markoff = valeurs atteintes par

$$\frac{1}{C(f)} = \sqrt{\Delta(f)}/m(f)$$

quand f décrit les formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + c$ à coefficients réels de discriminant $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ et $m(f) = \inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |f(x,y)|$.

Spectre de Lagrange = valeurs atteintes par la constante d'approximation

$$\lambda(x) = 1/\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx - p|$$

quand x décrit les nombres réels.

Le spectre de Markoff contient le spectre de Lagrange.

Les intersections des deux spectres avec l'intervalle $[\sqrt{5}, 3)$ coïncident et forment une *suite discrète*.

Spectre de Lagrange et spectre de Markoff

Spectre de Markoff = valeurs atteintes par

$$\frac{1}{C(f)} = \sqrt{\Delta(f)}/m(f)$$

quand f décrit les formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + c$ à coefficients réels de discriminant $\Delta(f) = b^2 - 4ac > 0$ et $m(f) = \inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} |f(x,y)|$.

Spectre de Lagrange = valeurs atteintes par la constante d'approximation

$$\lambda(x) = 1/\liminf_{q\to\infty} q \min_{p\in\mathbf{Z}} |qx - p|$$

quand x décrit les nombres réels.

Le spectre de Markoff contient le spectre de Lagrange.

Les intersections des deux spectres avec l'intervalle $[\sqrt{5}, 3)$ coïncident et forment une *suite discrète*.

Approximation rationnelle simultanée et spectre de Markoff

Relations entre les nombres de Markoff et les nombres extrémaux : approximation simultanée de x et x^2 par des nombres rationnels de même dénominateur.

Damien Roy

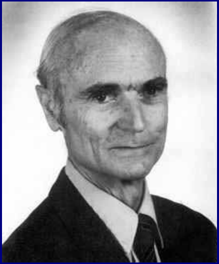
Markoff–Lagrange spectrum and extremal numbers, `arXiv.0906.0611 [math.NT]` 2 June 2009

Groupes Fuchsiens et surfaces de Riemann hyperboliques

L'arbre de Markoff peut être vu comme le dual de la triangulation du demi–plan hyperbolique par les images du domaine fondamental de l'invariant modulaire sous l'action du groupe modulaire.

Lazarus Immanuel Fuchs (1833–1902)

Triangulation de polygones, propriétés métriques de polytopes

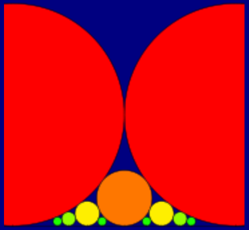
Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003)	Robert Alexander Rankin (1915 - 2001)	John Horton Conway
		

Cercles de Ford

Le cercle de Ford associé à la fraction irréductible p/q est tangent à l'axe réel au point p/q a pour rayon $1/2q^2$.

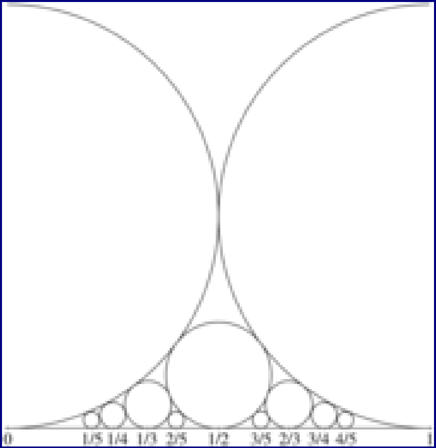
Les cercles de Ford associés à deux éléments consécutifs d'une suite de Farey sont tangents.

Lester Randolph Ford (1886–1967)



Amer. Math. Monthly (1938).

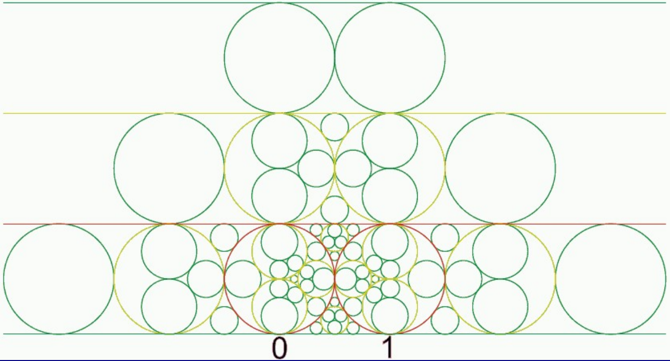
Suite de Farey d'ordre 5



$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

Fraction continue complexe

La troisième génération de la méthode d'Asmus Schmidt pour développer en fraction continue complexe



http ://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_03_15_04.html

Fraction continue et géométrie hyperbolique

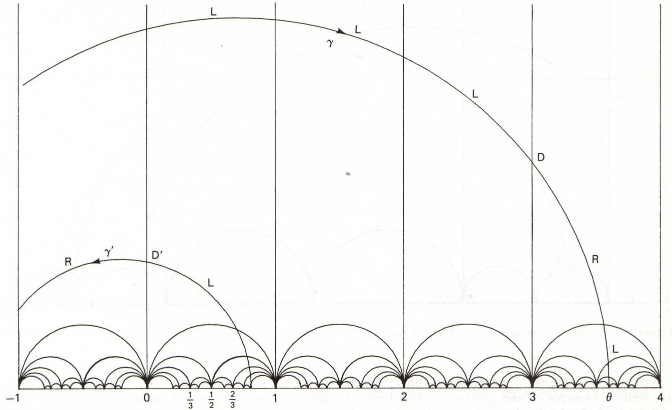


Figure 8. Reading off the continued fraction expansion of $\mathfrak{O}$ from $\mathfrak{J}$: $\mathfrak{O} = 3 + \frac{1}{1 + \cdots}$.

Géométrie des nombres de Markoff

Caroline Series,
The Geometry of Markoff Numbers,
The Mathematical Intelligencer **7** N.3 (1985), 20–29.

Groupes de Fricke

Le sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ engendré par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est le groupe libre à deux générateurs.

La surface de Riemann quotient du demi–plan de Poincaré par Γ est un *tore troué*. Les longueurs minimales de géodésiques fermées sont reliées aux $C(f)$, f forme quadratique indéfinie.

Groupes de Fricke

Le sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ engendré par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est le groupe libre à deux générateurs.

La surface de Riemann quotient du demi–plan de Poincaré par Γ est un *tore troué*. Les longueurs minimales de géodésiques fermées sont reliées aux $C(f)$, f forme quadratique indéfinie.

Groupes libres

Fricke a démontré que si A et B sont deux générateurs de Γ, alors leurs traces vérifient

$$(\mathrm{tr}A)^2 + (\mathrm{tr}B)^2 + (\mathrm{tr}AB)^2 = (\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)(\mathrm{tr}AB)$$

Harvey Cohn montre que les formes quadratiques ayant une constante de Markoff $C(f) \in (1/3, 1/\sqrt{5}]$ sont équivalentes à

$$cx^2 + (d-a)xy - by^2$$

où

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est un générateur de Γ.

Groupes libres

Fricke a démontré que si A et B sont deux générateurs de Γ, alors leurs traces vérifient

$$(\mathrm{tr} A)^2 + (\mathrm{tr} B)^2 + (\mathrm{tr} AB)^2 = (\mathrm{tr} A)(\mathrm{tr} B)(\mathrm{tr} AB)$$

Harvey Cohn montre que les formes quadratiques ayant une constante de Markoff $C(f) \in (1/3, 1/\sqrt{5}]$ sont équivalentes à

$$cx^2 + (d-a)xy - by^2$$

où

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est un générateur de Γ.

Groupe triangulaire (involutions sur l'arbre de Markoff)

On désigne par T_3 le produit libre de trois groupes cycliques d'ordre 2

$$T_3 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il est défini par générateurs et relations : il a trois générateurs x, y, z et trois relations $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$. Il est donc constitué des mots sur trois lettres dans lesquels deux lettres consécutives ne sont jamais identiques.

Il y a trois mots de longueur 1, ce sont x, y, z .

Il y a six mots de longueur 2, ce sont xy, xz, yx, yz, zx, zy.

Le nombre de mots de longueur n est $2^{n-1}3$.

Groupe triangulaire (involutions sur l'arbre de Markoff)

On désigne par T_3 le produit libre de trois groupes cycliques d'ordre 2

$$T_3 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il est défini par générateurs et relations : il a trois générateurs x, y, z et trois relations $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$. Il est donc constitué des mots sur trois lettres dans lesquels deux lettres consécutives ne sont jamais identiques.

Il y a trois mots de longueur 1, ce sont x, y, z .

Il y a six mots de longueur 2, ce sont xy, xz, yx, yz, zx, zy.

Le nombre de mots de longueur n est $2^{n-1}3$.

Groupe triangulaire (involutions sur l'arbre de Markoff)

On désigne par T_3 le produit libre de trois groupes cycliques d'ordre 2

$$T_3 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il est défini par générateurs et relations : il a trois générateurs x, y, z et trois relations $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$. Il est donc constitué des mots sur trois lettres dans lesquels deux lettres consécutives ne sont jamais identiques.

Il y a trois mots de longueur 1, ce sont x, y, z .

Il y a six mots de longueur 2, ce sont xy, xz, yx, yz, zx, zy.

Le nombre de mots de longueur n est $2^{n-1}3$.

Groupe triangulaire (involutions sur l'arbre de Markoff)

On désigne par T_3 le produit libre de trois groupes cycliques d'ordre 2

$$T_3 = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Il est défini par générateurs et relations : il a trois générateurs x, y, z et trois relations $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$. Il est donc constitué des mots sur trois lettres dans lesquels deux lettres consécutives ne sont jamais identiques.

Il y a trois mots de longueur 1, ce sont x, y, z .

Il y a six mots de longueur 2, ce sont xy, xz, yx, yz, zx, zy.

Le nombre de mots de longueur n est $2^{n-1}3$.

Chronologie

J. Liouville, 1844
J-L. Lagrange et Ch. Hermite, 1845
A. Korkine et E.I. Zolotarev, 1873
A. Markoff, 1879
F. Frobenius, 1915
L. Ford, 1917, 1938
R. Remak, 1924
J.W.S. Cassels, 1949
J. Lehner, 1952, 1964
H. Cohn, 1954, 1980
R.A. Rankin, 1957
A. Schmidt, 1976
S. Perrine, 2002

Domaine fondamental d'un tore troué

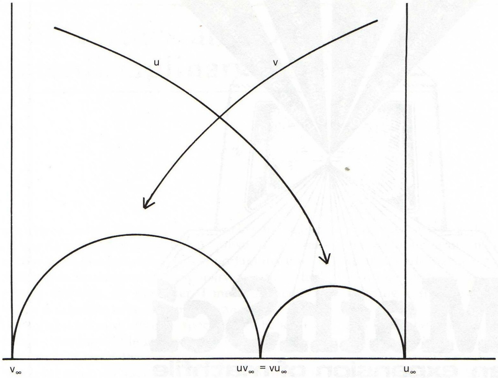


Figure 13. Fundamental region for the punctured torus.

Une courbe simple sur un tore troué

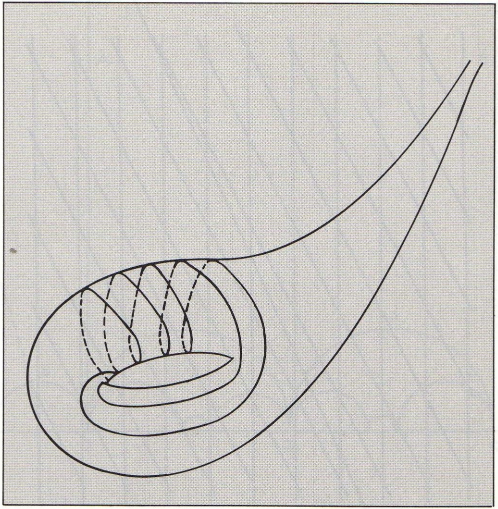


Figure 1. A simple curve on the punctured torus.

Markoff et approximation diophantienne

J.W.S. Cassels,
An introduction to Diophantine approximation,
Cambridge Univ. Press
(1957)

John William Scott Cassels

Plus grand facteur premier des couples de Markoff

Pietro Corvaja et Umberto Zannier, 2006 :
Le plus grand facteur premier du produit xy quand x, y, z est une solution de l'équation de Markoff tend vers l'infini avec $\max\{x, y, z\}$.

Énoncé équivalent :
Si S est un ensemble fini de nombres premiers, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs x, y, z, tels que xy n'aient comme diviseurs premiers que les éléments de S.
(On dit que x et y sont des S–unités.)

Plus grand facteur premier des couples de Markoff

Pietro Corvaja et Umberto Zannier, 2006 :
Le plus grand facteur premier du produit xy quand x, y, z est une solution de l'équation de Markoff tend vers l'infini avec $\max\{x, y, z\}$.

Énoncé équivalent :
Si S est un ensemble fini de nombres premiers, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs x, y, z, tels que xy n'aient comme diviseurs premiers que les éléments de S.
(On dit que x et y sont des S–unités.)

Colloquium de l'Université Laval

Québec *Jeudi 24 septembre 2009*

Autour de l'équation de Markoff

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/∼miw/