Jeux de cartes et de chapeaux, fausses perles, loterie et codes correcteurs d'erreurs

QUESTIONS

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

1. La carte secrète

Parmi une collection de cartes, vous en choisissez une sans me dire laquelle; je vous pose des questions auxquelles vous répondez par oui ou par non. Grâce à vos réponses je peux déduire quelle carte vous avez choisie. Selon le nombre de cartes, combien de questions sont nécessaires? Et quelles questions suffisent?

Par exemple, s'il y a seulement deux cartes, je vous en montre une en demandant : « est-ce celle-là ? » Que la réponse soit oui ou non je sais quel était votre choix (c'est facile, les maths !).

S'il y a quatre cartes, je vous en montre deux en vous demandant si la carte choisie est l'une des deux : si la réponse est oui il me reste à savoir laquelle des deux c'est, et, nous l'avons vu, une deuxième question me suffit. De même si, à ma première question, la réponse est non, il me reste à savoir laquelle des deux autres cartes est la bonne. Ainsi la première question nous ramène au problème précédent où il y avait seulement deux cartes. Donc pour quatre cartes, deux questions suffisent.

Pouvez-vous dire quelles sont les questions à poser pour 8 cartes ? Et pour 16 cartes ?

Pouvez-vous aussi préparer les questions de telle sorte qu'elles ne dépendent pas des réponses intermédiaires ?

2. Une fausse perle

a) Voici trois perles d'apparence semblable, il y en a deux vraies, identiques, ayant le même poids, et une fausse, qui est plus légère. Vous disposez d'une balance permettant de comparer le poids de deux objets. En une pesée, vous pouvez déterminer la fausse perle.

b) Avec 9 perles dont 8 vraies ayant le même poids et une fausse plus légère, en deux pesées vous pouvez déterminer la fausse perle.

c) Avec 81 perles dont 80 vraies et une fausse, combien vous faut-il de pesées?

3. Loterie

Un match entre deux équipes peut donner 3 résultats: ou bien l'équipe qui joue à domicile gagne, ou bien c'est l'équipe visiteuse, ou bien il y a match nul. Un ticket est gagnant si, sur 4 matchs, il prédit au moins 3 résultats correctement. Combien faut-il de tickets pour être sûr que l'un au moins est gagnant?

4. Pile ou face

Vous jouez à pile ou face trois fois. Un ticket est *gagnant* s'il prédit au moins deux résultats corrects sur les trois. Combien vous faut-il de tickets pour être sûr que l'un au moins est gagnant?

5. Deviner la couleur de son chapeau

Trois personnes, formant une équipe, ont chacune un chapeau sur la tête, blanc ou noir. Les couleurs ont été choisies de façon aléatoire. Chacune voit la couleur des chapeaux sur la tête des deux autres, mais ne connaît pas la couleur de son propre chapeau. Chacune doit deviner la couleur de son chapeau en l'écrivant sur un papier l'un des trois mots: *blanc, noir, abstention.* Elles n'ont pas le droit de communiquer entre elles, mais ont convenu d'une stratégie. L'équipe gagne si aucune des trois personnes n'indique la mauvaise couleur et une au moins une s'abstient pas. Quelle stratégie adopter pour optimiser les chances de gagner?

Par exemple si chacun parie au hasard, écrivant *blanc* ou *noir* sur son papier, la probabilité que l'équipe gagne est 1/8, car chaque personne a une chance sur 2 de bien trouver.

Une meilleure stratégie consiste pour l'équipe à convenir que l'un des trois donne une réponse *blanc* ou *noir* au hasard, et les deux autres s'abstiennent. C'est déjà mieux : l'équipe a maintenant une chance sur 2 de gagner.

Mais il y a une stratégie encore meilleure… À vous de la trouver !

6. Encore des cartes

On reprend le tout premier exercice : vous choisissez une carte sans me le dire, je vous pose des questions auxquelles vous répondez par oui ou non, mais maintenant parmi vos réponses vous avez le droit de m'en donner une fausse (et pas plus d'une). Dans cet exercice, je veux seulement détecter s'il y a une erreur dans vos réponses, vous dire si l'une d'entre elles n'est pas compatible avec les autres. Par exemple s'il y a deux cartes, je pose deux fois la même question : si vos réponses sont identiques, comme vous n'avez pas le droit de mentir plus d'une fois, je sais qu'elles sont correctes. Si vos deux réponses sont différentes, je sais qu'il y en a une juste et pas l'autre (mais je ne sais pas dire laquelle est juste).

Pouvez-vous dire combien de questions sont nécessaires pour détecter une erreur éventuelle quand il y a 4, 8 ou 16 cartes?

7. Toujours des cartes

De plus en plus fort : maintenant je vous autorise encore à me donner une réponse fausse (et pas plus d'une) et je veux pouvoir corriger une erreur éventuelle – bien entendu j'ai droit à un plus grand nombre de questions.

Ainsi, quand il y a deux cartes, je pose trois fois la même question : au moins deux des trois réponses coïncideront, ce sera donc la bonne réponse – c'est ce qu'on appelle *voter avec la majorité* !

Pouvez-vous trouver combien de questions sont nécessaires quand il y a 4 cartes, et quelles sont ces questions ?

On sait résoudre aussi le problème avec 8 cartes (c'est un peu plus délicat) et avec 16 cartes (cela demande nettement plus d'efforts).

Jeux de cartes et de chapeaux, fausses perles, loterie et codes correcteurs d'erreurs

REPONSES

Michel Waldschmidt

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

1. La carte secrète

Parmi une collection de cartes, vous en choisissez une sans me dire laquelle; je vous pose des questions auxquelles vous répondez par oui ou non. Grâce à vos réponses, je peux déduire quelle carte vous avez choisie. Selon le nombre de cartes, combien de questions sont nécessaires? Et quelles questions suffisent?

Réponse :

Avec deux cartes, une question suffit : je montre une des cartes en vous demandant si c'est celle qui a été choisie.

Avec 4 cartes, deux questions font l'affaire. Pour décider à l'avance quelles questions vous allez poser, sans que ces questions dépendent des réponses intermédiaires, je numérote les cartes, non pas 1, 2, 3, 4, mais plutôt avec les 4 *étiquettes* OO, ON, NO, NN. Je montre d'abord les deux cartes dont la première lettre est O, et je vous demande si c'est l'une des deux. Puis je montre les deux cartes dont la deuxième lettre est O, et je demande de nouveau si c'est l'une des deux. Il y a 4 couples de réponses possibles, qui sont

Oui Oui	Oui Non
Non Oui	Non Non

En remplaçant Oui par O et Non par N, le couple de réponses me donne l'étiquette de la carte secrète.

Avec 8 cartes, en posant 3 questions, il y a 8 triplets de réponses possibles

OOO OON ONO ONN NOO NON NNO NNN

De nouveau à chacune des huit cartes j'attribue une étiquette correspondant à ces huit solutions. Pour la première question je montre les quatre cartes dont la première lettre est O, pour la seconde je montre les 4 cartes dont la seconde lettre est O, et pour la troisième question je montre les 4 cartes ayant pour dernière lettre O. Les trois réponses reçues me permettent de déterminer la carte secrète.

Commentaire :

Ce qui est derrière cet exercice est la numérotation binaire (en base 2) : si on remplace oui par le chiffre 0 et non par 1, les étiquettes sont simplement les entiers de 0 à 7 écrits en base 2. Cela revient à écrire à la suite les nombres entiers en ne gardant que ceux dont tous les chiffres sont 0 et 1 :

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111,…

(on complète à gauche avec des 0 : par exemple si on veut trois chiffres on remplace 10 par 010). Ainsi pour 16 cartes il faudra 4 questions car cela donne $2\times2\times2\times2=16$ réponses possibles.

2. Une fausse perle

a) Voici trois perles d'apparence semblable, il y en a deux vraies, identiques, ayant le même poids, et une fausse, qui est plus légère. Vous disposez d'une balance permettant de comparer le poids de deux objets. En une pesée, vous pouvez déterminer la fausse perle.

Réponse :

On choisit deux des trois perles, on en met une de chaque côté de la balance. Si la balance n'est pas en équiliibre, la fausse perle est du côté le plus léger. Si la balance reste en équilibre, c'est que les deux perles choisies ont le même poids, donc la fausse perle est celle qui n'est pas sur la balance.

b) Avec 9 perles dont 8 vraies et une fausse (plus légère), combien vous faut-il de pesées?

Réponse :

On répartit les 9 perles en trois groupes de trois. On met un des groupes de 3 sur un côté de la balance, un autre groupe de trois sur l'autre côté. Si la balance penche d'un côté, la fausse perle est dans le groupe de 3 le plus léger. Si la balance reste en équilibre, c'est que la fausse perle est dans le groupe de trois qui n'a pas été pesé. On est donc ramené au problème précédent.

Avec cette procédure, la seconde pesée dépend du résultat de la première. Pour avoir un protocole indépendant des résultats intermédiaires, on numérote les 9 perles. Plus exactement on choisit comme numéros non pas 1 à 9, mais les 9 *étiquettes*

GG	GD	G0
DG	DD	D0
0G	0D	00

Pour la première pesée, on met dans le plateau de gauche les trois perles de la première ligne (la première lettre est G), et dans celui de droite les trois perles de la deuxième ligne (la première lettre est D). On laisse de côté les trois dernières perles.

Pour la seconde pesée, on regarde la seconde lettre : on met dans le plateau de gauche les trois perles de la première colonne et dans celui de droite celles de la seconde colonne. On note alors pour chacune des deux pesées le résultat : G si le côté gauche de la balance est le plus léger, D si c'est le côté droit, 0 si elle est en équilibre. Les deux pesées nous indiquent l'étiquette de la fausse perle.

c) Avec 81 perles dont 80 vraies et une fausse, plus légère, combien vous faut-il de pesées?

Réponse :

On peut répartir les 81 perles en trois groupes de 27, la première pesée dira celui de ces trois groupes où se trouve la fausse perle. Une fois qu'on sait dans quel groupe de 27 elle se trouve, on les répartit en trois groupes de 9, et la seconde pesée détermine celui de ces trois groupes où elle se trouve. Comme nous avons vu, deux pesées achèvent le travail, ce qui fait un total de 4 pesées.

On peut aussi attribuer à chaque perle une des 81 étiquettes formée de 4 lettres, chacune des lettres est G, D ou 0, et effectuer les quatre pesées en mettant sur les plateaux de la balance, à gauche les 27 perles dont la lettre est G, à droite les 27 perles dont la lettre est D, les quatre pesées correspondant aux quatre lettres.

Commentaire :

Il s'agit ici de l'écriture en base 3 : on écrit à la suite l'un de l'autre les nombres dont les chiffres sont 0, 1 ou 2 :

0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112,…

(on complète à gauche par des 0 s'il le faut) et on remplace par exemple G par 1 et D par 2.

3. Loterie

Un match entre deux équipes peut donner 3 résultats: ou bien l'équipe qui joue à domicile gagne, ou bien c'est l'équipe visiteuse, ou bien il y a match nul. Un ticket est gagnant si, sur 4 matchs, il prédit au moins 3 résultats correctement. Combien faut-il de tickets pour être sûr que l'un au moins est gagnant?

Réponse :

Chaque match a trois résultats possibles, disons N pour un match nul, V quand l'équipe visiteuse gagne et L quand c'est l'équipe locale. Il y a quatre matchs, cela fait en tout 3×3×3×3=81 possibilités.

Sur ces 81 possibilités, un ticket donné est gagnant (au sens où il prédit au moins 3 résultats correctement) exactement 9 fois. En effet il peut avoir tout bon (une fois sur 81), ou avoir la première prédiction incorrecte (deux fois), ou la seconde, ou la troisième, ou la quatrième, ce qui fait 1+2+2+2+2=9. Par exemple le ticket NNNN gagne si le résultat est

NNNN, LNNN, VNNN, NLNN, NVNN, NNLN, NNVN, NNNL, NNNV

Il faut donc un minimum de 9 tickets pour être sûr de gagner. Et s'il y a un choix convenable de ces 9 tickets, il en résultera qu'à chaque fois exactement un des 9 tickets est gagnant. Vous pourrez vérifier que si vous choisissez les 9 tickets suivants:

N N N N	V N V L	L N L V
N V V V	V V L N	L V N L
N L L L	V L N V	L L V N

quel que soit le résultat des matchs, exactement un de ces tickets a 3 ou 4 réponses correctes.

Commentaire :

Il s'agit d'un code correcteur d'erreurs sur un alphabet à trois éléments. De tels codes ont été trouvés vers 1950 par un spécialiste des radars, Marcel Golay. Ils ont été abondamment utilisés par la NASA, par exemple ils ont permis d'assister en direct à une éruption du satellite volcanique de Jupiter baptisé Io. Les idées de Golay ont été utilisées aussi par un mathématicien, John Leech, pour résoudre des questions d'empilement de sphères.

4. Pile ou face

Vous jouez à pile ou face trois fois. Un ticket est gagnant s'il prédit au moins 2 résultats corrects sur les 3. Combien vous faut-il de tickets pour être sûr que l'un au moins est gagnant?

Réponse :

Une solution est de prendre deux tickets, l'un qui prédit trois fois *face*, l'autre trois fois *pile*. Ainsi un des deux aura deux ou trois réponses correctes.

Une autre solution est de prendre n'importe quel ticket en premier, et de choisir le second qui n'a aucune prédiction en commun avec le premier. Par exemple si le premier est

Pile Face Pile, on prend comme second *Face Pile Face*. Alors l'un des deux tickets aura deux ou trois résultats exacts.

Commentaire

Grâce au code correcteur d'erreurs trouvé par Hamming à la même époque que celui de Golay, on montre (voir plus loin) qu'en jouant à pile ou face 7 fois, il suffit de 16 tickets pour être sûr que l'un d'entre eux n'aura pas plus qu'une prédiction erronée.

5. Deviner la couleur de son chapeau

Trois personnes, formant une équipe, ont chacune un chapeau sur la tête, blanc ou noir. Les couleurs ont été choisies de façon aléatoire. Chacune voit la couleur des chapeaux sur la tête des deux autres, mais ne connaît pas la couleur de son propre chapeau. Chacune doit deviner la couleur de son chapeau en l'écrivant sur un papier l'un des trois mots : blanc, noir, abstention. *Elles n'ont pas le droit de communiquer entre elles, mais ont convenu d'une stratégie. L'équipe gagne si aucune des trois personnes n'indique la mauvaise couleur et une au moins ne s'abstient pas. Quelle stratégie adopter pour optimiser les chances de gagner?*

Réponse :

Il y a 2×2×2=8 distributions de couleurs possibles. En notant B pour blanc et N pour noir, ce sont

BBB	BBN	BNB	BNN
NBB	NBN	NNB	NNN

Parmi ces huit répartitions possibles, deux ont toutes les couleurs identiques (la première BBB et la dernière NNN), les 6 autres ont deux couleurs : ou bien deux blancs et un noir, ou bien deux noirs et un blanc. L'équipe parie que la répartition des couleurs n'est pas BBB ni NNN.

La stratégie est alors la suivante : si un des membres de l'équipe voit deux chapeaux de la même couleur, il parie que le sien n'est pas de cette couleur-là. S'il voit deux chapeaux de couleurs différentes, il s'abstient.

Quand les chapeaux ne sont pas tous de la même couleur, il y en a deux d'une couleur tandis que le troisième est de l'autre couleur ; par exemple s'il y en a deux blancs et un noir, celui qui a le chapeau noir voit deux chapeaux blancs, il écrit Noir sur son papier ; les deux autres voient deux chapeaux de couleurs différentes, ils s'abstiennent, et l'équipe gagne.

De même s'il y a deux chapeaux noirs et un blanc, celui qui a le chapeau blanc écrit la bonne réponse (Blanc) sur son papier, les deux autres s'abstiennent.

Bien sûr, deux fois sur 8 l'équipe perd : si tous les chapeaux sont de la même couleur, disons blancs, chacun voit deux chapeaux blancs et avec cette stratégie écrit noir sur son papier, donc tout le monde se trompe ! Il reste quand même une probabilité de gagner de 6 sur 8, soit 75%.

Il existe des variantes, qui permettent de garder la probabilité de gagner à 75% même si les chapeaux sont distribués par quelqu'un qui connaît la stratégie précédente (voir *Pile ou Face*).

La théorie des codes correcteurs d'erreurs permet de montrer aussi qu'avec 7 personnes, l'équipe peut convenir d'une stratégie analogue lui donnant une probabilité de gagner de 87,5%.

Bien entendu cette question de chapeaux est un divertissement, les codes correcteurs d'erreurs interviennent plus sérieusement dans la vie courante, ne serait-ce que quand vous écoutez un CD ou quand vous utilisez un téléphone portable. Mais la base mathématique est la même !

6. Encore des cartes

On reprend le tout premier exercice, mais maintenant vous avez le droit de me donner une réponse fausse (et pas plus d'une). Dans cet exercice, je veux seulement détecter s'il y a une erreur dans vos réponses, vous dire si l'une d'entre elles n'est pas compatible avec les autres.

Pouvez-vous dire combien de questions sont nécessaires pour détecter une erreur quand il y a 2, 4, 8 ou 16 cartes?

Réponse :

Quand il n'y avait pas d'erreur il suffisait d'une question pour 2 cartes, 2 questions pour 4 cartes, 3 questions pour 8 cartes et 4 questions pour 16 cartes.

Quand une erreur est possible, il suffit d'une question supplémentaire pour la détecter. Cette dernière question est choisie de telle sorte qu'une série de réponses correctes ait un nombre de réponses *non* qui soit pair. Cette idée est celle du *bit de parité en informatique*.

Avec 2 cartes, on pose deux fois la même question : si les deux réponses sont les mêmes, *Oui Oui* ou *Non Non*, sachant qu'il n'y a pas plus d'une erreur, on en déduit que les deux réponses sont correctes (le nombre de *Non* est 0 ou 2, il est donc pair). Si les réponses ne sont pas les mêmes, on peut dire qu'il y en a une juste et une fausse, mais, bien entendu, on ne sait pas laquelle est juste et laquelle est fausse.

Avec 4 cartes, on pose trois questions, les deux premières sont les mêmes que dans la situation où il n'y a pas de réponse fausse, la troisième est choisie de telle sorte que les réponses correctes sont données par le tableau (avec O pour Oui et N pour Non)

OOO	ONN
NON	NNO

Quand on reçoit les trois réponses, on compte le nombre de N. S'il y en a zéro ou deux les trois réponses sont correctes, s'il y en a un ou trois, on peut dire qu'il y a une réponse incorrecte parmi les trois.

Avec 8 cartes, on pose 4 questions, les trois premières sont les mêmes que tout à l'heure, la quatrième est choisie pour que les réponses correctes soient

OOOO	OONN	ONON	ONNO
NOON	NONO	NNOO	NNNN

Quand les quatre réponses sont correctes, il y a 0, 2 ou 4 réponses N, quand l'une des réponses est erronée, il y a 1 ou 3 réponses N.

Commentaire :

Le bit de parité intervient un peu partout : les clés des comptes bancaires ou du numéro de sécurité sociale, les ordinateurs, les cartes bancaires, les numéros ISBN pour la classification des livres utilisent tous ce procédé.

7. Toujours des cartes

De plus en plus fort : maintenant je vous autorise encore à me donner une réponse fausse (et pas plus d'une) et je veux pouvoir corriger une erreur éventuelle – bien entendu j'ai droit à un plus grand nombre de questions.

Pouvez-vous trouver combien de questions sont nécessaires quand il y a 4 cartes, et quelles sont ces questions ?

Réponse :

Avec 2 cartes, il suffit de poser trois fois la même question : une des réponses sera répétée deux ou trois fois, c'est donc la bonne.

Avec 4 cartes, cinq questions permettent de corriger une erreur. On pose d'abord les deux questions qui permettent de trouver la carte quand il n'y a pas d'erreur, puis on répète ces deux questions, enfin l'on en pose une cinquième qui est le bit de parité entre les deux premières questions. Autrement dit les cinq questions sont sélectionnées de telle sorte que les bonnes réponses soient

OOOOO	ONONN
NONON	NNNNN

Si la première et la troisième réponse sont identiques, comme elles correspondent à la même question, c'est qu'elles sont justes. Si la seconde et la quatrième réponse sont identiques, pour la même raison, elles sont justes. Donc les quatre premières réponses aux questions permettent d'avoir au moins une information fiable. Si les deux informations sont fiables, on connaît la carte choisie (et on peut vérifier si la dernière réponse est correcte). Sinon, on sait quelle est l'information fiable, et on sait aussi que la dernière réponse est correcte puisqu'il y a au plus une erreur. On en déduit la carte sélectionnée.

Commentaire :

On peut montrer qu'avec 8 cartes, 6 questions permettent de corriger une erreur. Pour cela on choisit les questions correspondant aux 8 réponses que voici :

OOOOOO	OONONN	ONONON	ONNNNO
NOONNO	NONNON	NNOONN	NNNOOO

On montre aussi qu'avec 16 cartes il suffit de 7 questions : voici les réponses correspondantes

OOOOOOO	OOONNNO	OONOONN	OONNNON
ONOOHON	ONONONN	ONNONNO	ONNNOOO
NOOONNN	NOONOON	NONONOO	NONNONO
NNOOONO	NNONNOO	NNNOOON	NNNNNNN

Cela correspond aussi aux 16 tickets à acheter quand on joue 7 fois de suite à pile ou face et qu'on veut garantir au moins 6 réponses justes (remplacer O par Pile et N par Face par exemple). Avec ceux de Golay, c'est le plus ancien code correcteur d'erreurs, il a été inventé par R. Hamming en 1950. On connaît maintenant des codes qui permettent de corriger un très grand nombre d'erreurs, c'est indispensable pour la transmission par satellite. Les photos de planètes qui ont été envoyées par des vaisseaux spatiaux de la NASA comme Mariner ou Voyager ne seraient pas exploitables sans des codes correcteurs d'erreurs très performants.

Michel WALDSCHMIDT
8 rue Berlioz
91470 Limours
e-mail: miw@math.jussieu.fr
URL http://www.math.jussieu.fr/~miw

Les deux personnes ayant un chapeau blanc voient un chapeau blanc et un noir, elles s’abstiennent.

La personne ayant un chapeau noir voit deux chapeaux blancs, elle écrit ***Noir***

L’équipe gagne!

Les deux personnes avec un chapeau noir voient un chapeau blanc et un noir, elles s’abstiennent.

La personne avec un chapeau blanc voit deux chapeaux noirs, elle écrit ***Blanc***

L’équipe gagne!

Chacun voit deux chapeaux blancs, tout le monde écrit ***Noir***

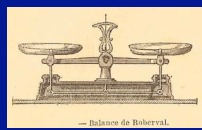
L'équipe perd!

Chacun voit deux chapeau noirs, tout le monde écrit ***Blanc***

L'équipe perd!

Pour trois perles: une pesée suffit

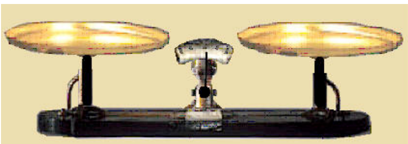
La fausse perle
n’est pas pesée



La fausse perle
est à gauche

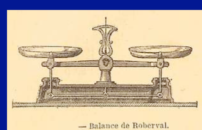
La fausse perle
est à droite

7



Pour *9* perles: on en met *3* à gauche et *3* à droite

La fausse perle
n’est pas pesée



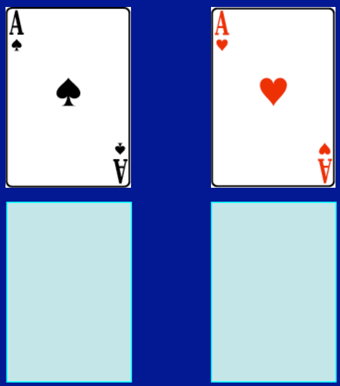
La fausse perle
est à gauche

La fausse perle
est à droite

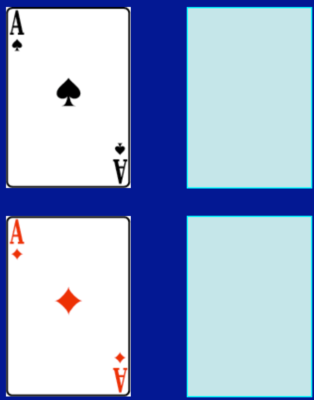
8

Quatre cartes, cinq questions, corrige une erreur

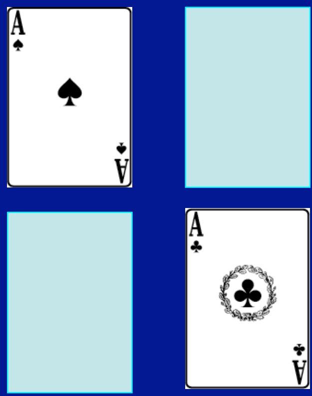
Première question:



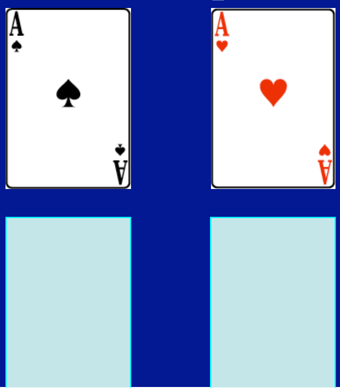
Deuxième question:



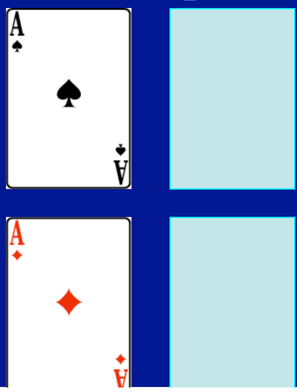
Cinquième question:



Troisième question:



Quatrième question:

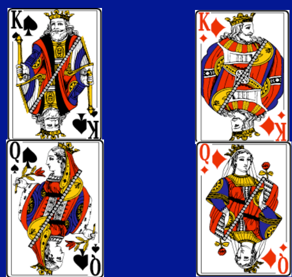


Huit cartes, six questions, corrige une erreur

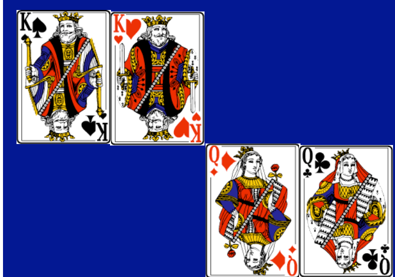
Première question

Deuxième question

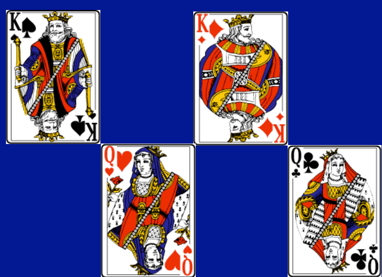
Troisième question



Quatrième question



Cinquième question



Sixième question